Spettro di endomorfismi normali

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno e A un suo endomorfismo.
Se A è un endomorfismo autoaggiunto allora i suoi autovalori sono reali. Infatti

$$\{ \forall u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \langle Au\,, u\rangle - \langle u\,, Au\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha \langle u\,, u\rangle - \overline{\lambda}_\alpha \langle u\,, u\rangle = 0 \,\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha - \overline{\lambda}_\alpha = 0$$

Se inoltre A è definito positivo i suoi autovalori sono positivi. Infatti poiché

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,, u\rangle > 0$$

risulta

$$\{ \forall u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \langle Au\,, u\rangle = \langle \lambda_\alpha u\,, u\rangle = \lambda_\alpha \langle u\,, u\rangle > 0 \,\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha > 0$$

Se A è un endomorfismo emisimmetrico allora i suoi autovalori sono immaginari. Infatti

$$\{ \forall u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \langle Au\,, u\rangle + \langle u\,, Au\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha \langle u\,, u\rangle + \overline{\lambda}_\alpha \langle u\,, u\rangle = 0 \,\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha + \overline{\lambda}_\alpha = 0$$

Se A è un endomorfismo unitario allora i suoi autovalori hanno valore assoluto uguale a uno. Infatti poiché

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,, Av\rangle = \langle A^* Au\,, v\rangle = \langle u\,, v\rangle$$

risulta

$$\{ \forall u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \langle u\,, u\rangle = \langle Au\,, Au\rangle = \lambda_\alpha \overline{\lambda}_\alpha \langle u\,, u\rangle \,\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\alpha \overline{\lambda}_\alpha = 1$$

Viceversa un endomorfismo A che sia esprimibile come combinazione lineare con coefficienti reali di proiezioni ortogonali $P_1, \ldots, P_r$ tali che

$$\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I$$
$$\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; P_\alpha P_\beta = O$$

è autoaggiunto. Infatti

$$A^* = (\eta_1 P_1 + \ldots + \eta_r P_r)^* = \overline{\eta}_1 P_1^* + \ldots + \overline{\eta}_r P_r^* = \eta_1 P_1 + \ldots + \eta_r P_r = A$$

Inoltre se i coefficienti η_α sono positivi allora A risulta definito positivo. Infatti

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,, u\rangle &= \langle \eta_1 P_1 u + \ldots + \eta_r P_r u\,, P_1 u + \ldots + P_r u\rangle \\ &= \eta_1 \langle P_1 u\,, P_1 u\rangle + \ldots + \eta_r \langle P_r u\,, P_r u\rangle > 0 \end{aligned}$$

È semplice poi dimostrare che se i coefficienti della combinazione lineare sono immaginari allora l'endomorfismo A è emisimmetrico; se i coefficienti della combinazione lineare hanno valore assoluto uguale a uno allora l'endomorfismo A è unitario.
È interessante infine osservare che nel caso di un endomorfismo autoaggiunto A si ha, ponendo $\lambda_M := \max(\lambda_\alpha)$,

$$\lambda_M \langle u\,, u\rangle - \langle Au\,, u\rangle = \sum_{\alpha=1}^{r} (\lambda_M - \lambda_\alpha) \langle P_\alpha u\,, u\rangle = \sum_{\alpha=1}^{r} (\lambda_M - \lambda_\alpha) \langle P_\alpha u\,, P_\alpha u\rangle \geq 0$$

il segno di eguaglianza valendo nel caso in cui $u \in \ker(A - \lambda_M I)$. Si ha dunque

$$\lambda_M = \max \frac{\langle Au\,,u\rangle}{\langle u\,,u\rangle}$$

Ponendo invece $\lambda_m := \min(\lambda_\alpha)$, si ottiene

$$\lambda_m = \min \frac{\langle Au\,,u\rangle}{\langle u\,,u\rangle}$$

Usando la norma indotta dal prodotto interno si ha poi

$$\max\left(\frac{\|Au\|}{\|u\|}\right)^2 = \max \frac{\langle Au\,,Au\rangle}{\langle u\,,u\rangle} = \max \frac{\langle A^2 u\,,u\rangle}{\langle u\,,u\rangle} = \max|\lambda_\alpha|^2$$
$$\min\left(\frac{\|Au\|}{\|u\|}\right)^2 = \min|\lambda_\alpha|^2$$

Per un endomorfismo autoaggiunto risulta dunque

$$\min|\lambda_\alpha| \le \frac{\|Au\|}{\|u\|} \le \max|\lambda_\alpha|$$

e, in particolare,

$$\|A\| = \max|\lambda_\alpha|$$