Decomposizione di uno spazio vettoriale definito su $\mathbb{R}$

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. In tal caso i polinomi irriducibili, essendo polinomi su $\mathbb{R}$, sono di grado 1 o 2.

Alla decomposizione in fattori primi del polinomio minimo

$$p = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$$

corrisponde la decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma degli autospazi generalizzati

$$\mathcal{U} = \mathrm{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathrm{V}_r$$

Il polinomio minimo di $A|_{\mathrm{V}_\alpha}$ è $f_\alpha^{k_\alpha}$ e

$$\dim \mathrm{V}_\alpha = h_\alpha \nu_\alpha \qquad h_\alpha \geq k_\alpha$$

essendo ν_α il grado del polinomio f_α.

Se V_α è irriducibile allora è anche ciclico e quindi risulta

$$\dim \mathrm{V}_\alpha = k_\alpha \nu_\alpha$$

Se V_α è invece riducibile allora è decomponibile nella somma diretta di sottospazi ciclici irriducibili $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$. Poiché il polinomio minimo della restrizione di A a $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$ è un divisore di f^{k_α} e la dimensione di $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$ è uguale al grado di tale polinomio, risulta

$$\dim \mathrm{W}_{\alpha\beta} = l_\alpha \nu_\alpha \qquad l_\alpha \leq k_\alpha$$

Si consideri ora il caso di un endomorfismo A semisemplice.

La decomposizione in fattori primi del polinomio minimo è in tal caso

$$p = f_1 \dots f_r$$

Poiché $k_\alpha = 1$, gli autospazi generalizzati sono tali che

$$\dim \mathrm{V}_\alpha = h_\alpha \nu_\alpha \qquad h_\alpha \geq 1$$

Se V_α è irriducibile allora la sua dimensione è uguale al grado ν_α di f_α. Se invece è riducibile esiste una sua decomposizione nella somma diretta di sottospazi ciclici irriducibili $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$. Poiché il polinomio minimo corrispondente a ciascuno di tali sottospazi ciclici è f_α, non avendo questo alcun divisore proprio, tutti i sottospazi $\mathrm{W}_{\alpha\beta}$ sono tali che

$$\dim \mathrm{W}_{\alpha\beta} = \nu_\alpha$$

Ciascun autospazio generalizzato V_α è dunque decomponibile nella somma di sottospazi invarianti irriducibili di dimensione 1 se $\nu_\alpha = 1$, oppure di dimensione 2 se $\nu_\alpha = 2$.

Sia W uno dei sottospazi irriducibili di dimensione 2.

Il polinomio minimo di $A|_{\mathrm{W}}$ è un polinomio irriducibile di grado 2 rappresentabile come

$$p(t) = t^2 - 2at + b^2 \qquad b^2 > a^2$$

Il sottospazio W essendo irriducibile è anche ciclico. Esiste perciò un vettore $u \in \mathrm{W}$ tale che i vettori

$$u\,,\ A|_{\mathrm{W}} u$$

costituiscono una base di W. Poiché

$$p(A|_{\mathrm{W}}) = O \quad \Rightarrow \quad (A|_{\mathrm{W}})^2 = -b^2 I + 2aA|_{\mathrm{W}}$$

la matrice di $A|_{\mathrm{W}}$ in tale base è

$$\begin{pmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$$

Una diversa base si può costruire con il vettore u e il vettore

$$v := \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}(Au - au)$$

che risulta indipendente da u per qualsiasi valore degli scalari a e b. In questa nuova base la matrice di $A|_{\mathrm{W}}$ è

$$\begin{pmatrix} a & -\sqrt{b^2 - a^2} \\ \sqrt{b^2 - a^2} & a \end{pmatrix}$$

Si noti che tali matrici sono indipendenti dalla scelta di u. Inoltre, essendo A semisemplice, i vettori $u\,,\ A|_{\mathrm{W}} u$ risultano indipendenti per qualsiasi u, altrimenti esisterebbe un sottospazio invariante di dimensione 1 a cui corrisponderebbe, per la semisemplicità, un complemento invariante, contraddicendo la irriducibilità di W.