Autovalori e autospazi

L'obiettivo di costruire una decomposizione di uno spazio vettoriale in sottospazi invarianti rispetto ad un endomorfismo motiva le definizioni che seguono.

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Un esempio di sottospazio invariante rispetto ad A è

$$\mathrm{U}_0 := \ker A$$

Più in generale, comunque si fissi uno scalare λ, il sottospazio

$$\mathrm{U}_\lambda := \ker (A - \lambda I)$$

risulta invariante rispetto ad A. Infatti

$$\forall u \in \mathrm{U}_\lambda \quad (A - \lambda I)u = o \quad \Rightarrow \quad Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad Au \in \mathrm{U}_\lambda$$

Questo dimostra non solo che U_λ è invariante, ma che qualsiasi vettore $u \in \mathrm{U}_\lambda$ genera un sottospazio invariante. Dunque U_λ, se ha dimensione maggiore di zero, è decomponibile nella somma diretta di sottospazi invarianti di dimensione 1.

Affinché il sottospazio U_λ non contenga solo il vettore nullo, poiché

$$\ker (A - \lambda I) \neq \{o\} \iff \det (A - \lambda I) = 0$$

occorre che λ sia una radice dell'equazione algebrica

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

Le radici di questa equazione (detta *equazione caratteristica*) si dicono *autovalori* dell'endomorfismo A. Il *polinomio caratteristico*

$$P(\lambda) := \det (A - \lambda I)$$

risulta essere di grado $n := \dim \mathcal{U}$. Se lo spazio $\mathcal{U}$ è definito su un campo Γ *algebricamente chiuso*[1] allora esiste almeno un autovalore e la somma delle molteplicità algebriche risulta uguale ad n. Nel seguito si supporrà che Γ sia il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ poiché questo, a differenza del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, è algebricamente chiuso.

L'insieme $\sigma(A)$ degli autovalori di un endomorfismo A si chiama *spettro* di A.

I sottospazi U_λ corrispondenti a ciascun $\lambda \in \sigma(A)$ si dicono *autospazi*. I vettori di un autospazio di dicono *autovettori*.

Dalle definizioni date seguono alcuni semplici teoremi.

---

[1] Un campo si dice *algebricamente chiuso* se ogni equazione algebrica in esso ha almeno una radice. In un campo algebricamente chiuso un polinomio $P(\lambda)$ di grado n è fattorizzabile nella forma

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

essendo le *molteplicità algebriche* m_i tali che $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$.

Si consideri una base di $\mathcal{U}$ ottenuta estendendo una base $\{b_1 \dots b_{n_\alpha}\}$ di un autospazio $\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$. Poiché

$$b_i \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_\alpha I) b_i = 0 \quad \Rightarrow \quad A b_i = \lambda_\alpha b_i$$

le prime n_α colonne della matrice di A contengono tutti termini nulli tranne i termini sulla diagonale che sono uguali a λ_α. Il polinomio caratteristico ha perciò la forma

$$P(\lambda) = (\lambda_\alpha - \lambda)^{n_\alpha} Q(\lambda)$$

Se la molteplicità algebrica di λ_α è m_α deve essere $n_\alpha \leq m_\alpha$. Risulta dunque

$$\dim \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \leq m_\alpha$$

È semplice poi dimostrare che due autospazi U_{λ_1} e U_{λ_2} hanno in comune solo il vettore nullo. Infatti

$$u \in \mathrm{U}_{\lambda_1} \cap \mathrm{U}_{\lambda_2} \;\Rightarrow\; \{(A - \lambda_1 I)u = o\,,\, (A - \lambda_2 I)u = o\} \;\Rightarrow\; \quad (\lambda_1 - \lambda_2)u = o \quad \Rightarrow \quad u = o$$

Se esiste una decomposizione di $\mathcal{U}$ in sottospazi invarianti rispetto ad A

$$\mathcal{U} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$$

allora gli autovalori delle restrizioni $A|_\mathrm{V}$ e $A|_\mathrm{W}$ sono anche autovalori di A e, viceversa, ciascun autovalore di A è autovalore di almeno una delle restrizioni $A|_\mathrm{V}$ e $A|_\mathrm{W}$, ovvero

$$\sigma(A) = \sigma(A|_\mathrm{V}) \cup \sigma(A|_\mathrm{W})$$

Infatti in una base ottenuta unendo una base di V e una base di W, la matrice di A ha una forma a blocchi. Il polinomio caratteristico di A, ottenuto da tale matrice, risulta pertanto fattorizzato nel prodotto dei due polinomi caratteristici delle restrizioni di A.

È inoltre utile osservare che, facendo riferimento alla precedente decomposizione di $\mathcal{U}$, se le due restrizioni di A non hanno autovalori in comune e $\lambda_\alpha \in \sigma(A|_\mathrm{W})$, allora l'autospazio $\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$ è contenuto in W.

Infatti se $u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$, indicando con v e w le proiezioni canoniche di u sui sottospazi V e W, si ha

$$(A - \lambda_\alpha I)(v + w) = o \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_\alpha I)v = -(A - \lambda_\alpha I)w$$

Poiché i sottospazi V e W sono invarianti anche rispetto a $(A - \lambda_\alpha I)$ e hanno in comune solo il vettore nullo, deve essere

$$(A|_\mathrm{V} - \lambda_\alpha I)v = o$$
$$(A|_\mathrm{W} - \lambda_\alpha I)w = o$$

Risulta dunque

$$\lambda_\alpha \notin \sigma(A|_\mathrm{V}) \quad \Rightarrow \quad v = o \quad \Rightarrow \quad u \in \mathrm{W}$$

Si osservi infine che

$$\dim \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \leq m_\alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{r} \dim \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \leq n = \dim \mathcal{U}$$

Da questo deriva che

$$\mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r} \subseteq \mathcal{U}$$

In generale dunque gli autospazi di un endomorfismo A non sono sufficienti a costruire una decomposizione di $\mathcal{U}$ in sottospazi invarianti rispetto ad A. [2]

[2] Questo fatto motiva la definizione di *autospazi generalizzati* i quali sono dei sottospazi invarianti contenenti gli autospazi e la cui somma è $\mathcal{U}$.