Decomposizione in sottospazi ciclici per un endomorfismo nilpotente

Sia N un endomorfismo nilpotente dello spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Si dimostra che lo spazio $\mathcal{U}$ è decomponibile nella somma diretta di sottospazi ciclici rispetto ad N.

Sia q l'indice di nilpotenza di N. Si osservi che, essendo $N^q = O$, risulta

$$\ker N \subset \ker N^2 \subset \ldots \subset \ker N^q = \mathcal{U}$$

Si può costruire una base per ciascuno dei sottospazi $\ker N^2, \ldots, \ker N^q$ nel seguente modo.

Si consideri il sottospazio $\mathrm{V}_0 := \ker N \cap \operatorname{im} N$ e una base di questo. Per ciascun vettore d_{i0} di tale base si consideri un vettore b_{i1} tale che

$$Nb_{i1} = d_{i0}$$

I vettori b_{i1} risultano indipendenti poiché

$$\alpha^i b_{i1} = o \quad \Rightarrow \quad \alpha^i N b_{i1} = \alpha^i d_{i0} = o$$

Indicando con W_1 il sottospazio generato dai vettori b_{i1} risulta dunque che

$$N|_{\mathrm{W}_1} : \mathrm{W}_1 \to \mathrm{V}_0$$

è un isomorfismo. Pertanto l'immagine inversa di V_0 è

$$\ker N^2 = \mathrm{W}_1 \oplus \ker N$$

Si consideri ora il sottospazio $\mathrm{V}_1 := \mathrm{W}_1 \cap \operatorname{im} N$ e una base di questo. Per ciascun vettore d_{i1} di tale base si consideri un vettore b_{i2} tale che

$$Nb_{i2} = d_{i1}$$

Indicando con W_2 il sottospazio generato dai vettori b_{i2}, anche

$$N|_{\mathrm{W}_2} : \mathrm{W}_2 \to \mathrm{V}_1$$

risulta essere un isomorfismo. Pertanto l'immagine inversa di V_1 è

$$\ker N^3 = \mathrm{W}_2 \oplus \mathrm{W}_1 \oplus \ker N$$

Proseguendo si giunge ad esprimere lo spazio $\mathcal{U}$ come

$$\mathcal{U} = \mathrm{W}_{q-1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{W}_0$$

avendo posto $\mathrm{W}_0 := \ker N$.

Si osservi ora che si può costruire una base di $\mathcal{U}$ e riordinarne i vettori in gruppi ciascuno dei quali genera un sottospazio ciclico, nel seguente modo.

Si prelevi uno dei vettori $b_{i,q-1}$ di una base di W_{q-1} assieme ai vettori

$$Nb_{i,q-1}, N^2 b_{i,q-1}, \ldots, N^{q-1} b_{i,q-1}$$

appartenenti agli altri sottospazi $\mathrm{W}_{q-2}, \ldots, \mathrm{W}_0$. Si ottiene in tal modo la base di un sottospazio ciclico di dimensione q. Si ripeta tale procedura per ciascuno dei vettori della base di W_{q-1}.

Si noti che i vettori $Nb_{i,q-1}$ sono indipendenti essendo

$$N|_{\mathrm{W}_{q-1}} : \mathrm{W}_{q-1} \to \mathrm{V}_{q-2} \subset \mathrm{W}_{q-2}$$

un isomorfismo.

Si ampli la famiglia costituita dai vettori $Nb_{i,q-1}$ sino ad ottenere una base di W_{q-2}. Si prelevi da tale base ciascuno dei vettori $b_{i,q-2}$ aggiunti, assieme ai vettori

$$Nb_{i,q-2}, N^2 b_{i,q-2}, \ldots, N^{q-2} b_{i,q-2}$$

Si ottengono in tal modo delle basi di sottospazi ciclici di dimensione $q-1$. Proseguendo si ottiene infine una base di $\mathcal{U}$ e, corrispondentemente, una decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma di sottospazi ciclici rispetto ad N.

Si osservi che la decomposizione di $\mathcal{U}$ così ottenuta non è unica, essendo dipendente dalle basi scelte nei sottospazi V_k. Le dimensioni e il numero dei sottospazi W_k sono però unici. Ne deriva che è unico il numero dei sottospazi ciclici generati, come pure è unico il numero di quelli, tra questi, aventi la stessa dimensione.