Dipendenza lineare

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale e $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ una famiglia di vettori in $\mathcal{U}$. Un vettore u si dice *combinazione lineare* dei vettori b_i se può essere espresso come

$$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i \qquad \alpha^i \in \Gamma$$

Si dice che una famiglia di vettori $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ *genera lo spazio* $\mathcal{U}$ se qualsiasi vettore in $\mathcal{U}$ è una combinazione lineare dei vettori b_i. Una tale famiglia di vettori si chiama *sistema di generatori.*

I vettori $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ si dicono *linearmente indipendenti* se

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i = o \quad \Rightarrow \quad \{\forall i\ \alpha^i = 0\}$$

altrimenti si dicono *linearmente dipendenti.*

Una famiglia di vettori indipendenti che genera lo spazio $\mathcal{U}$ si dice *base* di $\mathcal{U}$.

Si dimostra che se esiste un sistema di generatori $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ di $\mathcal{U}$ allora esiste una base. Si può infatti costruire una base prelevando dal sistema di generatori il primo vettore non nullo e poi ciascuno dei successivi, escludendo quelli che risultano essere combinazione lineare dei precedenti. Dunque un sistema di generatori contiene una base.

Si dimostra inoltre che se esiste un sistema di generatori $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ di $\mathcal{U}$ allora una qualsiasi famiglia di vettori indipendenti può essere estesa in modo da diventare una base. Si può infatti considerare ciascuno dei vettori del sistema di generatori e aggiungerlo a tale famiglia solo se si ottiene ancora una famiglia di vettori indipendenti.

Sia $\{b_1, b_2, \dots\ b_r\}$ una famiglia di vettori indipendenti. Se un vettore u può essere espresso come combinazione lineare dei vettori b_i tale combinazione lineare è unica. Infatti se

$$u = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i$$
$$u = \sum_{i=1}^{r} \beta^i b_i$$

ne deriva (sottraendo) che

$$o = \sum_{i=1}^{r} (\alpha^i - \beta^i) b_i$$

Poiché i vettori b_i sono indipendenti deve essere

$$\alpha^i = \beta^i \qquad \forall i$$

Assegnata una base $\{b_1, b_2, \dots\ b_n\}$ sono dunque univocamente definiti per ogni vettore $u \in \mathcal{U}$ i coefficienti della combinazione lineare $u = \sum_{i=1}^{n} u^i b_i$. Tali coefficienti si dicono *componenti di* u.