## Decomposizione polare

Una interessante conseguenza delle proprietà degli endomorfismi normali è il seguente teorema.

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno. In corrispondenza di ogni automorfismo $A$ di $\mathcal{U}$ esiste un solo endomorfismo unitario $R$, e due soli endomorfismi $U$ e $V$ autoaggiunti e definiti positivi tali che

$$A = RU$$
$$A = VR$$

Tali endomorfismi possono infatti essere costruiti nel modo seguente.

Si consideri l'endomorfismo

$$A^* A$$

Esso risulta autoaggiunto e definito positivo poiché

$$(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$$
$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle A^* A u\,, u\rangle = \langle Au\,, Au\rangle \geq 0$$
$$\langle Au\,, Au\rangle = 0 \iff Au = o$$
$$\ker A = \{o\} \iff \{Au = o \iff u = o\}$$

Esiste dunque la decomposizione spettrale

$$A^* A = \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_r P_r$$

con tutti gli autovalori $\mu_\alpha$ positivi. L'endomorfismo

$$U := \sqrt{\mu_1} P_1 + \ldots + \sqrt{\mu_r} P_r$$

risulta anch'esso autoaggiunto e definito positivo, essendo positivi i coefficienti della combinazione lineare delle proiezioni ortogonali $P_\alpha$.

Poiché $U$ è definito positivo è anche $\ker U = \{o\}$. Esiste dunque $U^{-1}$ ed è perciò possibile definire l'endomorfismo

$$R := AU^{-1}$$

Tale endomorfismo risulta essere unitario. Infatti

$$R^* R = (AU^{-1})^* AU^{-1} = (U^{-1})^* A^* AU^{-1} = (U^{-1}) U^2 U^{-1} = I$$

per le proprietà, semplici da verificare,

$$U^2 := UU = A^* A$$
$$(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$$

L'endomorfismo $V$ può essere costruito a partire dall'endomorfismo $AA^*$.

La decomposizione polare descritta può essere estesa al caso di un isomorfismo tra due spazi vettoriali dotati di prodotto interno. In tal caso $R$ risulterà essere una isometria.