Determinante di un endomorfismo

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Si osservi che se $\mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{A}}$ sono le matrici di A in due diverse basi esse sono tali che, indicando con $\mathbf{Q}$ la matrice delle componenti della seconda base rispetto alla prima,

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

È perciò

$$\det \hat{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$$

Questo motiva la seguente definizione.

Si definisce *determinante* di un endomorfismo il determinante della sua matrice in una qualsiasi base.

È interessante notare che la condizione di biiettività per un endomorfismo A di $\mathcal{U}$

$$\ker A = \{o\}$$

risulta equivalente alla condizione

$$\det A \neq 0$$

Infatti si ha

$$\ker A = \{o\} \iff \nu = 0 \iff n = r \iff n = \rho \iff \det \mathbf{A} \neq 0 \iff \det A \neq 0$$

avendo indicato con $\mathbf{A}$ la matrice di A in una qualsiasi base, con ρ il suo rango, con n la dimensione di $\mathcal{U}$, con r la dimensione di $\operatorname{im} A$, con ν la dimensione di $\ker A$.