Endomorfismi diagonalizzabili

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ tale che esista la decomposizione

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r}$$

dove i sottospazi $\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$ sono gli autospazi di A.
Si consideri la corrispondente decomposizione dell'endomorfismo A

$$A = A_1 + \ldots + A_r \qquad A_\alpha := A|_{\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}} P_\alpha$$

Questa particolare decomposizione, detta *decomposizione spettrale*, è caratterizzata dalla seguente proprietà

$$\forall \alpha \qquad A_\alpha = \lambda_\alpha P_\alpha$$

dove P_α è la proiezione canonica su $\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$. Infatti, poiché

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad P_\alpha u \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha}$$
$$v \in \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_\alpha I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad Av = \lambda_\alpha v$$

risulta

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad A_\alpha u = A|_{\mathrm{U}_{\lambda_\alpha}} P_\alpha u = A P_\alpha u = \lambda_\alpha P_\alpha u$$

La decomposizione spettrale di A è dunque

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$$

Viceversa, è semplice dimostrare che se un endomorfismo A di $\mathcal{U}$ è esprimibile come combinazione lineare di proiezioni $P_1, \ldots, P_r$ tali che

$$\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I$$
$$\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; P_\alpha P_\beta = O$$

allora le immagini delle proiezioni sono gli autospazi di A e perciò lo spazio $\mathcal{U}$ è decomponibile nella somma degli autospazi di A.
Si consideri ora, in corrispondenza della decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma di autospazi dell'endomorfismo A, una base $\{b_1 \ldots b_n\}$ di $\mathcal{U}$ ottenuta unendo delle basi di ciascun autospazio. Dalla decomposizione spettrale è evidente che la matrice dell'endomorfismo A in tale base risulta diagonale. Viceversa se esiste una base $\{b_1 \ldots b_n\}$ tale che la matrice di un endomorfismo A è diagonale allora lo spazio vettoriale $\mathcal{U}$ è decomponibile nella somma degli autospazi di A. Infatti

$$Ab_i = a^j{}_i b_j = \eta_\alpha b_i \quad \Rightarrow \quad (A - \eta_\alpha I) b_i = 0 \quad \Rightarrow \quad b_i \in \mathrm{U}_{\eta_\alpha}$$

Ad ogni η_α corrisponde dunque un autospazio di A ed ogni vettore della base appartiene ad un autospazio. È dunque

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \dim \mathrm{U}_{\lambda_\alpha} = \dim \mathcal{U}$$

e quindi

$$\mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r} = \mathcal{U}$$

Per tali ragioni un endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathcal{U}$ in corrispondenza del quale esiste una decomposizione di $\mathcal{U}$ in autospazi si dice *diagonalizzabile*.