Endomorfismi unitari

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno. Un endomorfismo A di $\mathcal{U}$ si dice *unitario* se è una isometria, cioè se

$$A^*A = I$$

Essendo una isometria una trasformazione iniettiva un endomorfismo unitario è un automorfismo. Per un endomorfismo unitario si ha dunque

$$A^* = A^{-1}$$

La sua matrice in una base ortonormale risulta pertanto tale che[1]

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1}$$

Un endomorfismo unitario di uno spazio vettoriale definito su $\mathbb{R}$ si dice *ortogonale*. Gli endomorfismi ortogonali costituiscono un sottogruppo di $GL(\mathcal{U})$ detto *gruppo ortogonale* $O(\mathcal{U})$.
Si noti che

$$A^*A = I \quad \Rightarrow \quad (\det A)^2 = 1$$

Gli endomorfismi ortogonali R tali che $\det R = 1$ si dicono *rotazioni* e costituiscono un sottogruppo di $O(\mathcal{U})$ detto *gruppo speciale ortogonale* $SO(\mathcal{U})$.

Si dicono *riflessioni* quegli endomorfismi ortogonali R che sono anche endomorfismi autoaggiunti e sono tali che $\det R = -1$. Si noti che

$$R = R^* \iff R = I - 2P$$

essendo P una proiezione ortogonale. Infatti se $R = I - 2P$ e $P = P^*$ allora

$$R^* = (I - 2P)^* = I - 2P^* = I - 2P = R$$

Viceversa se $R = R^*$ allora $P := \frac{1}{2}(I - R)$ è una proiezione ortogonale. Infatti risulta $P = P^*$. Si osservi inoltre che $\operatorname{im} P$ e $\operatorname{im}(I - P)$ sono invarianti rispetto a $R := I - 2P = -P + (I - P)$. In particolare

$$u \in \operatorname{im} P \quad \Rightarrow \quad Ru = -u$$
$$u \in \operatorname{im}(I - P) \quad \Rightarrow \quad Ru = u$$

La matrice della restrizione di R a $\operatorname{im} P$ è dunque la matrice identità moltiplicata per -1, mentre la matrice della restrizione di R a $\operatorname{im}(I - P)$ è la matrice identità. Pertanto $\det R = -1$ se e solo se la dimensione di $\operatorname{im} P$ è dispari.

[1] Una matrice che ha questa proprietà si dice *unitaria*. Una matrice unitaria costituita da numeri reali si dice *ortogonale*.