Prodotto interno

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale con $\Gamma = \mathbb{C}$. Si dice *prodotto interno* una funzione

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$$

tale che[1]

1. $\forall u, v \in \mathcal{U} \qquad \langle u\,, v\rangle = \overline{\langle v\,, u\rangle}$
2. $\forall u, v \in \mathcal{U}\,, \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad \langle \alpha u\,, v\rangle = \alpha \langle u\,, v\rangle$
3. $\forall u, v, w \in \mathcal{U} \qquad \langle u + v\,, w\rangle = \langle u\,, w\rangle + \langle v\,, w\rangle$
4. $\forall u \in \mathcal{U} \qquad \langle u\,, u\rangle \geq 0 \quad , \quad u = o \iff \langle u\,, u\rangle = 0$

È semplice dimostrare che gli assiomi precedenti implicano che

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle o\,, u\rangle = 0$$

In uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno due vettori si dicono *ortogonali* se

$$\langle u\,, v\rangle = 0$$

Due sottospazi U e V si dicono *ortogonali* se

$$\forall u \in \mathrm{U},\ \forall v \in \mathrm{V} \quad \langle u\,, v\rangle = 0$$

Tale relazione si scrive anche $\mathrm{U} \perp \mathrm{V}$.
Due vettori ortogonali u, v diversi dal vettore nullo sono indipendenti. Infatti se fosse $u = \alpha v$ allora

$$v \neq o\,, \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u\,, v\rangle = \langle \alpha v\,, v\rangle = \alpha \langle v\,, v\rangle \neq 0$$

Da ciò deriva che se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base allora

$$\{\, \langle u\,, b_i\rangle = 0\,, \forall b_i \,\} \iff u = o$$

Si osservi che, scelta una base $\{b_1 \dots b_n\}$, in corrispondenza di un prodotto interno risultano definiti gli scalari

$$g_{ji} := \langle b_i\,, b_j\rangle$$

Il valore del prodotto interno per una qualsiasi coppia di vettori u, v, assume pertanto la forma seguente

$$\langle u\,, v\rangle = \varphi^i(u)\overline{\varphi^j(v)}\langle b_i\,, b_j\rangle = \varphi^i(u)\overline{\varphi^j(v)} g_{ji}$$

[1] Una funzione che ha le proprietà 1, 2, 3 si dice *sesquilineare*, mentre una funzione che ha la proprietà 4 si dice *definita positiva*.

Indicando con $\mathbf{G}$ la matrice costituita dagli scalari g_{ji} (j indice di riga, i indice di colonna) la espressione precedente si può scrivere

$$\langle u\,,v\rangle = \varphi(v)^H \mathbf{G}\varphi(u)$$

dove si è posto $\varphi(v)^H := \overline{\varphi(v)}^T$.

In generale, scelta una base, ad ogni prodotto interno corrisponde dunque una matrice $\mathbf{G}$. Questa, per il primo e il quarto degli assiomi stabiliti, è tale che

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{G}}^T$$
$$\forall \mathbf{u} \quad \mathbf{u}^H\mathbf{G}\mathbf{u} \geq 0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \mathbf{u}^H\mathbf{G}\mathbf{u} = 0$$

È dunque una matrice *hermitiana* e *definita positiva*.

Viceversa, scelta una base e assegnata una matrice $\mathbf{G}$ hermitiana e definita positiva, un prodotto interno è definito dalla funzione

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \qquad u, v \mapsto \varphi(v)^H \mathbf{G}\varphi(u)$$

Un particolare prodotto interno si ottiene assegnando $\mathbf{G} = \mathbf{I}$.

Una base $\{b_1 \dots b_n\}$ tale che

$$\langle b_i\,, b_j\rangle = \delta_{ji}$$

si dice *ortonormale*.

Si noti che nel caso di base ortonormale si ha

$$\forall u \in \mathcal{U} \qquad \langle u\,, b_i\rangle = \langle \varphi^j(u) b_j\,, b_i\rangle = \varphi^j(u)\langle b_j\,, b_i\rangle = \varphi^i(u)$$

Si può dimostrare che, comunque si assegni un prodotto interno, è sempre possibile costruire una base ortonormale. La dimostrazione consiste nella definizione dell'algoritmo di *ortogonalizzazione di Schmidt*.

Nel caso in cui lo spazio vettoriale $\mathcal{U}$ sia definito sul campo dei numeri reali ($\Gamma = \mathbb{R}$), si dice *prodotto interno* una funzione

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle : \mathcal{U}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

che soddisfi gli assiomi 2,3,4, sostituendo al primo il seguente

1′. $\forall u, v \in \mathcal{U} \qquad \langle u\,, v\rangle = \langle v\,, u\rangle$

Il prodotto interno standard nello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ è

$$\langle \mathbf{u}\,, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^H\mathbf{u}$$

mentre in $\mathbb{R}^n$ è

$$\langle \mathbf{u}\,, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

Si consideri infine una coppia di spazi vettoriali $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dotati di prodotto interno. Una trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tale che

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} \quad \langle Au_1\,, Au_2\rangle_{\mathcal{V}} = \langle u_1\,, u_2\rangle_{\mathcal{U}}$$

si dice *isometria*. Una isometria è una trasformazione lineare iniettiva poiché $\ker A = \{o\}$. Infatti

$$u \in \ker A \quad \Rightarrow \quad \langle Au\,, Au\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u\,, u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = o$$