Sottospazi invarianti

Sia A un endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Un sottospazio $\mathrm{U} \subset \mathcal{U}$ si dice *invariante* rispetto ad A se

$$\forall u \in \mathrm{U} \quad Au \in \mathrm{U}$$

La *restrizione* di A al sottospazio invariante U è l'endomorfismo

$$A|_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$$

tale che

$$\forall u \in \mathrm{U} \quad A|_{\mathrm{U}} u = Au$$

Lo spazio vettoriale $\mathcal{U}$ si dice *riducibile* se è decomponibile nella somma diretta di sottospazi invarianti rispetto ad A.

Se $\mathcal{U}$ è riducibile, in corrispondenza di una decomposizione in sottospazi invarianti

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_r$$

l'endomorfismo A può essere espresso come somma degli endomorfismi $A_\alpha := A|_{\mathrm{U}_\alpha} P_\alpha$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_r$$

avendo indicato con P_α la proiezione canonica su U_α. Si ha infatti

$$A = A(P_1 + \ldots + P_r) = AP_1 + \ldots + AP_r = A|_{\mathrm{U}_1} P_1 + \ldots + A|_{\mathrm{U}_r} P_r = A_1 + \ldots + A_r$$

Si noti che gli endomorfismi A_α hanno la seguente proprietà

$$\alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad A_\alpha A_\beta = O$$

Sia $\{b_1 \ldots b_n\}$ una base di $\mathcal{U}$ costruita unendo delle basi di ciascun sottospazio U_α. Poiché i sottospazi U_α sono invarianti rispetto ad A risulta

$$b_i \in \mathrm{U}_\alpha \quad \Rightarrow \quad Ab_i \in \mathrm{U}_\alpha$$

Da questo deriva che la matrice di A ha la caratteristica *forma a blocchi*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & & & \\ & \hat{\mathbf{A}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\mathbf{A}}_r \end{pmatrix}$$

È cioè costituita dalle matrici $\hat{\mathbf{A}}_\alpha$ delle restrizioni $A|_{\mathrm{U}_\alpha}$ disposte lungo la diagonale, mentre tutti gli altri termini sono nulli.

Si noti che se i sottospazi U_α hanno dimensione 1 la matrice $\mathbf{A}$ risulta diagonale.