Sottospazi

Se $\mathcal{U}$ è uno spazio vettoriale un insieme $\mathrm{U} \subset \mathcal{U}$ si dice *sottospazio di* $\mathcal{U}$ se

$$\forall u, v \in \mathrm{U} \qquad (u+v) \in \mathrm{U}$$

$$\forall u \in \mathrm{U}\,,\, \forall \alpha \in \Gamma \qquad \alpha u \in \mathrm{U}$$

Da ciò deriva

$$\begin{array}{lll} \forall u \in \mathrm{U} \quad (-1)u = -u & \Rightarrow & -u \in \mathrm{U} \\ \forall u \in \mathrm{U} \quad u + (-u) = o & \Rightarrow & o \in \mathrm{U} \end{array}$$

È semplice verificare che la intersezione di due sottospazi è anch'essa un sottospazio.
Anche l'insieme $\{o\}$ costituito dal solo *vettore nullo* o è un sottospazio.
Se U_1 e U_2 sono due sottospazi di $\mathcal{U}$ si definisce lo spazio *somma*

$$\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2$$

come il sottospazio costituito dai vettori $u \in \mathcal{U}$ che si possono ottenere come somma di un vettore $u_1 \in \mathrm{U}_1$ e un vettore $u_2 \in \mathrm{U}_2$.
Un caso particolarmente importante è quello di due sottospazi tali che

$$\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \{o\}$$

Lo spazio somma di tali sottospazi si dice *somma diretta* e si indica

$$\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2$$

In questo caso un vettore $u_1 \in \mathrm{U}_1$ e un vettore $u_2 \in \mathrm{U}_2$ diversi dal vettore nullo sono sempre indipendenti. Infatti

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = o \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 u_1 = -\alpha_2 u_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 u_1 \in \mathrm{U}_2$$

In particolare se $\{b_1 \dots b_r\}$ è una base di U_1 e $\{d_1 \dots d_s\}$ è una base di U_2 allora la famiglia di vettori $\{b_1 \dots b_r, d_1 \dots d_s\}$ genera il sottospazio $\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2$, è costituita da vettori indipendenti ed è dunque una base di $\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2$.
Se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base di $\mathcal{U}$ sia U_1 il sottospazio generato dai vettori $\{b_1 \dots b_r\}$ e U_2 il sottospazio generato dai vettori $\{b_{r+1} \dots b_n\}$. È evidente che i due sottospazi hanno in comune solo il vettore nullo e che

$$\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 = \mathcal{U}$$

Viceversa se U è un generico sottospazio di $\mathcal{U}$ e $\{b_1 \dots b_r\}$ è una sua base, comunque si estenda questa base con dei vettori $\{b_{r+1} \dots b_n\}$ in modo da ottenere una base di $\mathcal{U}$, il sottospazio V generato dalla famiglia di vettori $\{b_{r+1} \dots b_n\}$ risulterà tale che

$$\mathrm{U} \oplus \mathrm{V} = \mathcal{U}$$

Il sottospazio V si dice essere un *complemento* di U in $\mathcal{U}$.
È inoltre importante osservare che se U_1 e U_2 sono tali che

$$\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2 = \mathcal{U}$$

allora per ogni vettore $u \in \mathcal{U}$ esiste una sola coppia di vettori $u_1 \in \mathrm{U}_1$ e $u_2 \in \mathrm{U}_2$ tali che

$$u = u_1 + u_2$$

Infatti se esistesse un'altra coppia di vettori $v_1 \in \mathrm{U}_1$ e $v_2 \in \mathrm{U}_2$ tali che $u = v_1 + v_2$ allora risulterebbe

$$o = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2)$$
$$\{(u_1 - v_1) \in \mathrm{U}_1\,,\ (u_2 - v_2) \in \mathrm{U}_2\} \quad \Rightarrow \quad \{(u_1 - v_1) = o\,,\ (u_2 - v_2) = o\}$$

La definizione di spazio somma si può estendere, con ovvio significato, al caso di più sottospazi. Tutte le proprietà descritte si estendono di conseguenza.