Trasformazioni lineari

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due spazi vettoriali. Una funzione

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

si dice *trasformazione lineare* se

$$\begin{array}{cc} \forall u, v \in \mathcal{U} & A(u+v) = A(u) + A(v) \\ \forall \alpha \in \Gamma,\ \forall u \in \mathcal{U} & A(\alpha u) = \alpha A(u) \end{array}$$

Il valore $A(u)$ che una trasformazione A assume in corrispondenza di un vettore u si indica di solito più semplicemente con Au.
In corrispondenza di ogni trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ risulta definito il *nucleo* di A come l'insieme

$$\ker A := \{u \in \mathcal{U} \mid Au = o\}$$

e l'*immagine* di A come l'insieme

$$\operatorname{im} A := \{v \in \mathcal{V} \mid v = Au\,,\ u \in \mathcal{U}\}$$

Il *nucleo* risulta essere un sottospazio. Infatti

$$\begin{array}{cc} \forall u_1, u_2 \in \ker A & A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = o \\ \forall u \in \ker A\,,\ \forall \alpha \in \Gamma & A(\alpha u) = \alpha A u = o \end{array}$$

È semplice verificare che anche $\operatorname{im} A$ è un sottospazio.
Una trasformazione lineare A è *iniettiva* se e solamente se

$$\ker A = \{o\}$$

Infatti se A è iniettiva allora

$$Ao = o \quad \Rightarrow \quad \{\forall u \neq o \quad Au \neq o\} \quad \Rightarrow \quad \ker A = \{o\}$$

Viceversa se $\ker A = \{o\}$ allora

$$Au_1 = Au_2 \quad \Rightarrow \quad A(u_1 - u_2) = o \quad \Rightarrow \quad (u_1 - u_2) = o \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2$$

Dal teorema precedente deriva che una trasformazione lineare

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

è *biiettiva* (iniettiva e suriettiva) se e solamente se

$$\ker A = \{o\}\,,\ \operatorname{im} A = \mathcal{V}$$

Una trasformazione lineare *biiettiva* si dice *isomorfismo*.

Un altro interessante teorema è il seguente.

Se $\ker A = \{o\}$ allora una famiglia $\{b_1 \dots b_r\}$ di vettori indipendenti è trasformata in una famiglia $\{Ab_1 \dots Ab_r\}$ di vettori indipendenti. Infatti se i vettori $\{Ab_1 \dots Ab_r\}$ fossero dipendenti esisterebbero degli scalari α^i non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i A b_i = o \quad \Rightarrow \quad A \sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i = o \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i = o$$

Risulterebbero dunque dipendenti anche i vettori $\{b_1 \dots b_r\}$.

Da questo teorema discende immediatamente che se $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ è un isomorfismo allora $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$. Infatti se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base di $\mathcal{U}$ allora ogni vettore $u = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i b_i$ viene trasformato in un vettore $\sum_{i=1}^{r} \alpha^i A b_i$. La famiglia $\{Ab_1 \dots Ab_n\}$ genera dunque $\mathcal{V} = \operatorname{im} A$. Essendo $\ker A = \{o\}$ tale famiglia è costituita da vettori indipendenti ed è dunque una base di $\mathcal{V}$.

In generale in corrispondenza di ogni trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ è possibile decomporre $\mathcal{U}$ nella somma

$$\mathcal{U} = \ker A \oplus \mathrm{U}$$

essendo U un qualsiasi complemento di $\ker A$.

Poiché la restrizione $A|_{\mathrm{U}}$ di A al sottospazio U è iniettiva, e

$$\operatorname{im} A|_{\mathrm{U}} = \operatorname{im} A$$

una base di U è trasformata in una base di $\operatorname{im} A$ e dunque $\dim \mathrm{U} = \dim (\operatorname{im} A)$. Ponendo

$$\begin{array}{rl} & n := \dim \mathcal{U} \\ \textit{nullità} & \nu := \dim (\ker A) \\ \textit{rango} & r := \dim (\operatorname{im} A) \end{array}$$

dalla decomposizione data di $\mathcal{U}$ risulta

$$n = \nu + r$$

Da ciò deriva che

– una trasformazione lineare è *iniettiva* se e solo se $n = r$;

– una trasformazione lineare è *suriettiva* se e solo se $r = m := \dim \mathcal{V}$;

– una trasformazione lineare è un *isomorfismo* se e solo se $n = r = m$.

Se tra due spazi vettoriali $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ esiste un isomorfismo si dice che $\mathcal{U}$ è *isomorfo* a $\mathcal{V}$ e viceversa o che $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono *isomorfi*. Da quanto appena visto discende che due spazi isomorfi hanno la stessa dimensione.

In corrispondenza di ogni isomorfismo, essendo questo una funzione biiettiva, è definita la sua funzione *inversa*. È semplice dimostrare che tale funzione risulta lineare e biiettiva e dunque è anch'essa un isomorfismo.