Decomposizione spettrale per endomorfismi normali

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno.

Se A è un endomorfismo normale di $\mathcal{U}$ allora $\mathcal{U}$ è decomponibile nella somma degli autospazi di A. Inoltre tali autospazi risultano tra loro ortogonali.

Si osservi per prima cosa che, essendo A normale, esiste la decomposizione ortogonale

$$\mathcal{U} = \ker A \oplus \operatorname{im} A$$

Inoltre risulta

$$\forall\lambda \in \mathbb{C} \quad AA^* = A^*A \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)$$

Infatti

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* &= (A - \lambda I)(A^* - \overline{\lambda} I)\\ &= (AA^* - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + \lambda\overline{\lambda} I) = (A^*A - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + \lambda\overline{\lambda} I)\\ &= (A^* - \overline{\lambda} I)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)\end{aligned}$$

Essendo il campo scalare algebricamente chiuso lo spettro $\sigma(A)$ non è vuoto. È dunque possibile definire l'endomorfismo $(A - \lambda_1 I)$ con $\lambda_1 \in \sigma(A)$. Poiché anche tale endomorfismo risulta normale esiste la decomposizione ortogonale

$$\mathcal{U} = \ker (A - \lambda_1 I) \oplus \operatorname{im} (A - \lambda_1 I)$$

e si ha

$$\operatorname{im} (A - \lambda_1 I) = \operatorname{im} (A - \lambda_1 I)^*$$

Il sottospazio $\mathrm{W}_1 := \operatorname{im} (A - \lambda_1 I)$ è dunque invariante sia rispetto ad A che ad A^*. Da ciò deriva che anche la restrizione $A|_{\mathrm{W}_1}$ è normale. Se $\mathrm{W}_1 \neq \{o\}$ esiste dunque la decomposizione ortogonale

$$\mathrm{W}_1 = \ker (A|_{\mathrm{W}_1} - \lambda_2 I) \oplus \operatorname{im} (A|_{\mathrm{W}_1} - \lambda_2 I)$$

con $\lambda_2 \in \sigma(A|_{\mathrm{W}_1}) \subset \sigma(A)$. Si osservi che, essendo $\mathrm{U}_{\lambda_2} \subset \mathrm{W}_1$, risulta

$$\ker (A|_{\mathrm{W}_1} - \lambda_2 I) = \mathrm{U}_{\lambda_2}$$

Si consideri la corrispondente decomposizione del sottospazio $\mathrm{W}_2 := \operatorname{im} (A|_{\mathrm{W}_1} - \lambda_2 I)$ e così via sino a giungere a $\mathrm{W}_r = \{o\}$. Si ottiene in tal modo la seguente decomposizione ortogonale di $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_{\lambda_1} \oplus \mathrm{U}_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_{\lambda_r}$$

La corrispondente decomposizione spettrale di A

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$$

è caratterizzata dal fatto che le proiezioni P_α risultano ortogonali.

È semplice dimostrare che, viceversa, un endomorfismo che sia esprimibile come combinazione lineare di proiezioni ortogonali $P_1, \ldots, P_r$ tali che

$$\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I$$

$$\alpha \neq \beta \;\Rightarrow\; P_\alpha P_\beta = O$$

risulta essere normale. Questo fatto costituisce la motivazione alla definizione di *endomorfismo normale*.