

Calcolo della matrice di una rotazione

Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale in uno spazio vettoriale \mathcal{V} . Costruire in tale base la matrice della rotazione con asse parallelo a

$$\mathbf{a} := \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

e ampiezza $\theta := \pi/6$.

Si genera una base ortonormale

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$$

con

$$\mathbf{a}_3 := \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Indicando le componenti di \mathbf{a} nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$[\mathbf{a}]_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

le componenti del vettore \mathbf{a}_3 risultano

$$[\mathbf{a}_3]_e = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dato un vettore \mathbf{v} la sua proiezione ortogonale sul sottospazio ortogonale ad \mathbf{a}_3 è

$$\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3.$$

Infatti, essendo $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$, risulta

$$(\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 0.$$

Il vettore \mathbf{a}_2 può pertanto essere generato a partire da un arbitrario vettore \mathbf{v} . Ad esempio in corrispondenza di

$$\mathbf{v} := 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

si ottiene il vettore ortogonale ad \mathbf{a}_3 di componenti

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dalle quali, dividendo per la norma, si ottengono le componenti di \mathbf{a}_2

$$[\mathbf{a}_2]_e := \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore \mathbf{a}_1 , essendo definito come

$$\mathbf{a}_1 := \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3,$$

ha componenti

$$[\mathbf{a}_1]_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si può ora costruire la matrice della rotazione \mathbf{R} nella base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

$$[\mathbf{R}]_a := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per ottenere la matrice di \mathbf{R} nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si utilizza, nella formula del cambiamento di base, la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$[\mathbf{A}] := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Si noti che, essendo le basi ortonormali, la matrice $[\mathbf{A}]$ risulta tale che

$$[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^T.$$

Pertanto la matrice cercata è

$$[\mathbf{R}]_e := [\mathbf{A}] [\mathbf{R}]_a [\mathbf{A}]^T = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2 + 13\sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{14} & 6 - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{14} \\ 4 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{14} & 8 + 10\sqrt{3} & 16 - 6\sqrt{3} - \sqrt{14} \\ 6 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{14} & 12 - 6\sqrt{3} + \sqrt{14} & 18 + 5\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione numerica approssimata delle matrici calcolate è la seguente

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -0.57735 & 0.771517 & 0.267261 \\ -0.57735 & -0.617213 & 0.534522 \\ 0.57735 & 0.154303 & 0.801784 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{R}]_e = \begin{pmatrix} 0.875595 & -0.381753 & 0.29597 \\ 0.420031 & 0.904304 & -0.0762129 \\ -0.238552 & 0.191048 & 0.952152 \end{pmatrix}.$$