Posizionamenti e deformazioni

La introduzione degli assi coordinati nella geometria, fatta da Cartesio, è stato uno dei passi più importanti nel progresso della matematica, in quanto ha ricondotto i metodi della geometria al calcolo di grandezze numeriche. Ma, ai fini del ragionamento fisico, a differenza che nel calcolo, è bene evitare di introdurre esplicitamente le coordinate cartesiane e fissare l'attenzione prima su un punto dello spazio invece che sulle sue tre coordinate, e sulla intensità e sulla direzione di una forza invece che sulle sue tre componenti. Questo modo di vedere le grandezze fisiche e geometriche è più primitivo e naturale dell'altro.

[Maxwell J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, 1892, vol. I, p. 9]

Indice

1 Posizionamento e deformazione

Indicando con $\mathcal{B}$ un insieme $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \dots\}$ i cui elementi identificano i punti di un corpo, diremo *posizionamento* una funzione

$$\mathsf{p} : \mathcal{B} \to \mathcal{E} \tag{1}$$

che fa corrispondere a ciascun punto del corpo una posizione, in modo tale che a punti distinti corrispondano posizioni distinte. Si dice *forma* del corpo $\mathcal{B}$ l'insieme

$$\mathcal{R} := \operatorname{im} \mathsf{p}. \tag{2}$$

Si dice *configurazione* del corpo $\mathcal{B}$ l'insieme delle coppie

$$\big(\mathsf{A}, \mathsf{p}(\mathsf{A})\big) \quad \forall \mathsf{A} \in \mathcal{B}\,, \tag{3}$$

essendo p un *posizionamento*. In corrispondenza di due posizionamenti $\bar{\mathsf{p}}$ e p, a cui corrispondono due forme $\bar{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{R}$ la funzione biunivoca, detta *deformazione*,

$$\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}, \tag{4}$$

definita come $\boldsymbol{\phi} := \mathsf{p} \circ (\bar{\mathsf{p}})^{-1}$, trasforma per ogni punto $\mathsf{A} \in \mathcal{B}$ la posizione $\bar{\mathsf{p}}(\mathsf{A})$ nella posizione

$$\mathsf{p}(\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}(\mathsf{A})). \tag{5}$$

Risulta a sua volta definito il *campo di spostamento*,

$$\mathbf{u} : \bar{\mathsf{p}}(\mathsf{A}) \mapsto (\mathsf{p}(\mathsf{A}) - \bar{\mathsf{p}}(\mathsf{A})) \quad \forall \mathsf{A} \in \mathcal{B}. \tag{6}$$

2 Deformazioni rigide e deformazioni affini

Se la deformazione $\boldsymbol{\phi}$ è una isometria che conserva l'orientamento si dice *deformazione rigida*. In questo caso, scelto un punto A del corpo, la posizione di un qualsiasi punto B nel posizionamento p è data dalla seguente espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{R}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}), \tag{7}$$

essendo $\mathbf{R}$ una rotazione di $\mathcal{V}$.

Se $\boldsymbol{\phi}$ è, più in generale, una trasformazione affine che conserva l'orientamento si dice *deformazione affine* o *deformazione omogenea*. Scelto un punto A del corpo, la posizione di un generico punto B nel posizionamento p è data dalla espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}), \tag{8}$$

dove $\mathbf{F}$ è un tensore (endomorfismo di $\mathcal{V}$), tale che $\det \mathbf{F} > 0$. Si noti che in una deformazione affine le rette sono trasformate in rette. Infatti la retta

$$\bar{\boldsymbol{c}}(h) = \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} + h\,\bar{\mathbf{a}} \tag{9}$$

è trasformata, per via della (8), nella curva

$$\boldsymbol{c}(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}(h)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}(\bar{\boldsymbol{c}}(h) - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + h\,\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}. \tag{10}$$

Ma tale curva non è altro che la retta

$$\boldsymbol{c}(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + h\,\mathbf{a} \tag{11}$$

con vettore tangente

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}. \tag{12}$$

3 Composizione di deformazioni affini

Si consideri la composizione di due deformazioni affini

$$\phi := \phi_{[2]}\phi_{[1]}. \tag{13}$$

Considerando una coppia di punti $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{B}$, nella prima deformazione si ha

$$\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}). \tag{14}$$

Nella seconda deformazione è

$$\phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B})\big) = \phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})\big) + \mathbf{F}_{[2]}(\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) - \phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})). \tag{15}$$

Sostituendo la (14) nell'ultimo termine si ottiene

$$\phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B})\big) = \phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})\big) + \mathbf{F}_{[2]}\big(\mathbf{F}_{[1]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})\big). \tag{16}$$

Pertanto per la composizione (13) risulta

$$\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) \tag{17}$$

con

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{[2]}\mathbf{F}_{[1]}. \tag{18}$$

Si noti che in generale nè la composizione (13) nè la composizione (18) sono commutative.

Poichè per $\mathbf{F}$ esiste la decomposizione polare

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \tag{19}$$

una deformazione affine ϕ può essere espressa, scegliendo ad arbitrio un punto A, come

$$\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{R}\mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) \tag{20}$$

e decomposta in una traslazione

$$\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) = \phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + (\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}), \tag{21}$$

tale che $\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})$, seguita da una dilatazione che lasci fissa la posizione $\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})$

$$\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B})) = \phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})) + \mathbf{U}(\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}) - \phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}), \tag{22}$$

seguita da una rotazione, con posizione $\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})$ ancora fissa,

$$\phi_{[2]}(\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B}))) = \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) + \mathbf{R}(\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{B})) - \phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})). \tag{23}$$

Nella deformazione $\phi_{[1]}$ le rette ortogonali per $\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})$ generate dagli autovettori di $\mathbf{U}$, dette *direzioni principali* della dilatazione, restano unite. Le distanze tra le posizioni lungo le direzioni principali risultano modificate per un fattore pari al corrispondente autovalore di $\mathbf{U}$. Nella deformazione $\phi_{[2]}$ la retta per $\phi(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A})$ generata dall'autovettore di $\mathbf{R}$, detta *asse della rotazione*, resta invariata.

4 Deformazioni affini in termini di coordinate

Fissato un sistema di coordinate cartesiane in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione due, le posizioni di due punti qualsiasi $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{B}$ nel posizionamento $\bar{\mathsf{p}}$ possono essere descritte attraverso le espressioni

$$\begin{aligned} \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} &= \boldsymbol{o} + \bar{x}_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \bar{x}_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2, \\ \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{B}} &= \boldsymbol{o} + \bar{x}_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + \bar{x}_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{24}$$

Le posizioni degli stessi punti nel posizionamento p sono descritte dalle espressioni

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}) &= \boldsymbol{o} + x_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2, \\ \phi(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{B}}) &= \boldsymbol{o} + x_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Nel caso di una deformazione rigida, sostituendo le espressioni (24) e (25) nella (7), si ottiene

$$\boldsymbol{o} + x_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{o} + x_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2 + \mathbf{R}\big((\bar{x}_{1\mathsf{B}} - \bar{x}_{1\mathsf{A}})\mathbf{e}_1 + (\bar{x}_{2\mathsf{B}} - \bar{x}_{2\mathsf{A}})\mathbf{e}_2\big), \tag{26}$$

da cui deriva

$$x_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2 = x_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + x_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2 + (\bar{x}_{1\mathsf{B}} - \bar{x}_{1\mathsf{A}})\mathbf{R}\mathbf{e}_1 + (\bar{x}_{2\mathsf{B}} - \bar{x}_{2\mathsf{A}})\mathbf{R}\mathbf{e}_2. \tag{27}$$

Descrivendo la rotazione attraverso un angolo θ nel seguente modo

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \tag{28}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_2 = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \tag{29}$$

dalla (27), eguagliando le componenti su ciascuno dei vettori della base, si ottiene la relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix} x_{1\mathsf{B}} \\ x_{2\mathsf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1\mathsf{A}} \\ x_{2\mathsf{A}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{1\mathsf{B}} - \bar{x}_{1\mathsf{A}} \\ \bar{x}_{2\mathsf{B}} - \bar{x}_{2\mathsf{A}} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Nel caso di una deformazione affine, dalla (8), utilizzando le coordinate e ponendo per l'endomorfismo $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2, \tag{31}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2, \tag{32}$$

si ottiene la seguente relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix} x_{1\mathsf{B}} \\ x_{2\mathsf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1\mathsf{A}} \\ x_{2\mathsf{A}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{1\mathsf{B}} - \bar{x}_{1\mathsf{A}} \\ \bar{x}_{2\mathsf{B}} - \bar{x}_{2\mathsf{A}} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

5 Parametrizzazioni

Fissato un sistema di coordinate cartesiane in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione due, la posizione di un punto A nel posizionamento $\bar{\mathsf{p}}$ è data dalla espressione (24). Ponendo $s_{1\mathsf{A}} := \bar{x}_{1\mathsf{A}}$, $s_{2\mathsf{A}} := \bar{x}_{2\mathsf{A}}$, la (24) diventa

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} = \boldsymbol{o} + s_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + s_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2. \tag{34}$$

Ad ogni posizione corrisponde dunque una coppia di coordinate

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} \mapsto (s_{1\mathsf{A}}, s_{2\mathsf{A}}) \tag{35}$$

e, viceversa, ad ogni coppia di coordinate corrisponde una posizione

$$(s_{1\mathsf{A}}, s_{2\mathsf{A}}) \mapsto \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}. \tag{36}$$

Indicando con $\boldsymbol{\kappa}$ tale funzione, detta *parametrizzazione* della forma del corpo $\bar{\mathcal{R}} := \operatorname{im}\bar{\mathsf{p}}$, si ha

$$\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} = \boldsymbol{\kappa}(s_{1\mathsf{A}}, s_{2\mathsf{A}}). \tag{37}$$

In generale una parametrizzazione di una forma del corpo può essere indipendente dal sistema di coordinate di $\mathcal{E}$. Nel caso in cui $\dim\mathcal{E} = 2$ si assume che la forma del corpo sia la chiusura di un aperto in $\mathbb{R}^2$.

Si può dare una descrizione della deformazione $\boldsymbol{\phi}$ in termini di coordinate definendo sul dominio della parametrizzazione due funzioni scalari ϕ_1 e ϕ_2 tali che

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2)) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2)\mathbf{e}_2. \tag{38}$$

Nel caso in cui $\dim\mathcal{E} = 3$ si assume che la forma del corpo sia la chiusura di un aperto in $\mathbb{R}^3$. In tal caso per la descrizione della deformazione $\boldsymbol{\phi}$ in termini di coordinate occorrono tre funzioni scalari ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3.

6 Gradiente della deformazione

Si consideri nel posizionamento $\bar{\mathsf{p}}$ la retta per $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2)$

$$\bar{\boldsymbol{c}}_1(h) := \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + h\,\mathbf{e}_1. \tag{39}$$

Utilizzando un sistema di coordinate come nella (34) e la parametrizzazione (37) si ha la seguente descrizione

$$\bar{\boldsymbol{c}}_1(h) := \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + h\,\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2) + h\,\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{o} + (s_1 + h)\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(s_1 + h, s_2). \tag{40}$$

Tale retta è trasformata da $\boldsymbol{\phi}$ nella curva

$$\boldsymbol{c}_1(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_1(h)) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\kappa}(s_1 + h, s_2)). \tag{41}$$

Se $\boldsymbol{\phi}$ non è affine, in generale tale curva non è una retta. Usando per $\boldsymbol{\phi}$ l'espressione in termini di coordinate (38), per la curva (41) si ha

$$\boldsymbol{c}_1(h) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1 + h, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1 + h, s_2)\mathbf{e}_2, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{c}_1(0) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2)\mathbf{e}_2. \tag{43}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ ha pertanto l'espressione

$$\boldsymbol{c}_1' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,(\boldsymbol{c}_1(h) - \boldsymbol{c}_1(0)) = \partial_1\phi_1\,\mathbf{e}_1 + \partial_1\phi_2\,\mathbf{e}_2, \tag{44}$$

dove ∂_1 è la derivata rispetto al primo argomento. La retta

$$\bar{\boldsymbol{c}}_2(h) := \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + h\,\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2) + h\,\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{o} + s_1\mathbf{e}_1 + (s_2 + h)\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2 + h) \tag{45}$$

è trasformata nella curva

$$\boldsymbol{c}_2(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}_2(h)) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2 + h)). \tag{46}$$

Utilizzando la (38) si ha

$$\boldsymbol{c}_2(h) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1, s_2 + h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2 + h)\mathbf{e}_2, \tag{47}$$

$$\boldsymbol{c}_2(0) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2)\mathbf{e}_2. \tag{48}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ ha pertanto l'espressione

$$\boldsymbol{c}_2' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\boldsymbol{c}_2(h) - \boldsymbol{c}_2(0)\right) = \partial_2\phi_1 \, \mathbf{e}_1 + \partial_2\phi_2 \, \mathbf{e}_2, \tag{49}$$

dove ∂_2 è la derivata rispetto al secondo argomento. Infine una retta

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{c}}(h) &:= \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}} + h\,\bar{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2) + h\,\bar{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\kappa}(s_1, s_2) + h(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) \\ &= \boldsymbol{o} + (s_1 + h\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (s_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\kappa}(s_1 + h\alpha_1, s_2 + h\alpha_2) \end{aligned} \tag{50}$$

è trasformata nella curva

$$\boldsymbol{c}(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}(h)) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\kappa}(s_1 + h\alpha_1, s_2 + h\alpha_2)). \tag{51}$$

Ancora dalla (38) si ottiene

$$\boldsymbol{c}(h) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1 + h\alpha_1, s_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1 + h\alpha_1, s_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_2, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{o} + \phi_1(s_1, s_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(s_1, s_2)\mathbf{e}_2. \tag{53}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ risulta pertanto avere l'espressione

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\boldsymbol{c}(h) - \boldsymbol{c}(0)\right) = \left(\alpha_1\, \partial_1\phi_1 + \alpha_2\, \partial_2\phi_1\right) \mathbf{e}_1 + \left(\alpha_1\, \partial_1\phi_2 + \alpha_2\, \partial_2\phi_2\right) \mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_1 \left(\partial_1\phi_1 \, \mathbf{e}_1 + \partial_1\phi_2 \, \mathbf{e}_2\right) + \alpha_2 \left(\partial_2\phi_1 \, \mathbf{e}_1 + \partial_2\phi_2 \, \mathbf{e}_2\right). \end{aligned} \tag{54}$$

Si osservi che

$$\bar{\boldsymbol{c}}_1' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\bar{\boldsymbol{c}}_1(h) - \bar{\boldsymbol{c}}_1(0)\right) = \mathbf{e}_1, \tag{55}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}_2' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\bar{\boldsymbol{c}}_2(h) - \bar{\boldsymbol{c}}_2(0)\right) = \mathbf{e}_2, \tag{56}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\bar{\boldsymbol{c}}(h) - \bar{\boldsymbol{c}}(0)\right) = \bar{\mathbf{a}} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2. \tag{57}$$

Tra i vettori tangenti esistono pertanto le seguenti relazioni

$$\bar{\boldsymbol{c}}' = \alpha_1\, \bar{\boldsymbol{c}}_1' + \alpha_2\, \bar{\boldsymbol{c}}_2', \tag{58}$$

$$\boldsymbol{c}' = \alpha_1\, \boldsymbol{c}_1' + \alpha_2\, \boldsymbol{c}_2', \tag{59}$$

Risulta allora definita un'applicazione lineare $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ che trasforma i vettori tangenti alle rette per $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ nei vettori tangenti alla curve corrispondenti per $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ in modo tale che

$$\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) : \bar{\boldsymbol{c}}_1' \mapsto \boldsymbol{c}_1', \tag{60}$$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) : \bar{\boldsymbol{c}}_2' \mapsto \boldsymbol{c}_2', \tag{61}$$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) : \alpha_1\, \bar{\boldsymbol{c}}_1' + \alpha_2\, \bar{\boldsymbol{c}}_2' \mapsto \alpha_1\, \boldsymbol{c}_1' + \alpha_2\, \boldsymbol{c}_2'. \tag{62}$$

Dalle espressioni di $\boldsymbol{c}_1'$ e $\boldsymbol{c}_2'$ risulta

$$\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\mathbf{e}_1 = \partial_1\phi_1 \, \mathbf{e}_1 + \partial_1\phi_2 \, \mathbf{e}_2, \tag{63}$$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})\mathbf{e}_2 = \partial_2\phi_1 \, \mathbf{e}_1 + \partial_2\phi_2 \, \mathbf{e}_2. \tag{64}$$

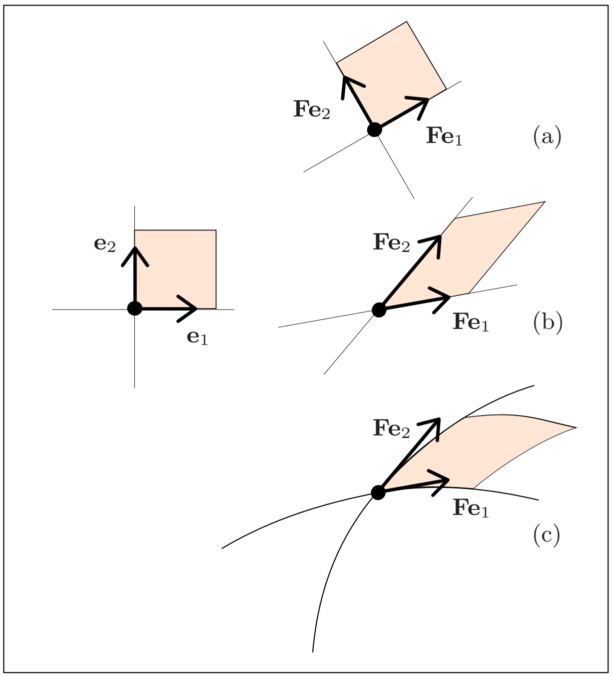

Figura 1: Gradiente di una deformazione (a) rigida, (b) affine, (c) generica.

Pertanto la matrice di $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O})$ è

$$[\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O})] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial s_1} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial s_1} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial s_2} \end{pmatrix}. \tag{65}$$

L'applicazione lineare $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O})$ così definita è detta *gradiente* della deformazione $\boldsymbol{\phi}$ in $\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}$. Si può dimostrare che essa è indipendente dalla parametrizzazione.
Si può dimostrare inoltre che se $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) = \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) \quad \forall \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}$, cioè se $\mathbf{F}$ è uniforme, allora $\boldsymbol{\phi}$ è affine e viceversa.

Si assume in generale che una deformazione sia tale che

$$\det \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) > 0 \quad \forall \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}. \tag{66}$$

7 Gradiente dello spostamento

Dalla definizione (6) di *campo di spostamento* si ha

$$\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}, \tag{67}$$

che lungo la curva (50) per $\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}$ diventa

$$\mathbf{u}(\bar{\boldsymbol{c}}(h)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}(h)) - \bar{\boldsymbol{c}}(h) = \boldsymbol{c}(h) - \bar{\boldsymbol{c}}(h), \tag{68}$$
$$\mathbf{u}(\bar{\boldsymbol{c}}(0)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\boldsymbol{c}}(0)) - \bar{\boldsymbol{c}}(0) = \boldsymbol{c}(0) - \bar{\boldsymbol{c}}(0). \tag{69}$$

Da queste espressioni, utilizzando sia la definizione di gradiente di un campo vettoriale che la definizione di gradiente della deformazione, si ottiene

$$\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O)\,\bar{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{c}' - \bar{\boldsymbol{c}}' = \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\bar{\boldsymbol{c}}' - \bar{\boldsymbol{c}}' = (\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O) - \mathbf{I})\bar{\boldsymbol{c}}'. \tag{70}$$

Poiché questa relazione vale per la derivata lungo una qualsiasi curva, risulta

$$\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O) = \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O) - \mathbf{I}. \tag{71}$$

Si può dare una descrizione dello spostamento $\mathbf{u}$ in termini di componenti definendo sul dominio della parametrizzazione due funzioni scalari u_1 e u_2 tali che

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa}(s_1,s_2)) = u_1(s_1,s_2)\mathbf{e}_1 + u_2(s_1,s_2)\mathbf{e}_2. \tag{72}$$

Poiché lungo le curve (40) e (45) si ha rispettivamente

$$\mathbf{u}(\bar{\boldsymbol{c}}_1) = u_1(s_1+h,s_2)\mathbf{e}_1 + u_2(s_1+h,s_2)\mathbf{e}_2, \tag{73}$$

$$\mathbf{u}(\bar{\boldsymbol{c}}_2) = u_1(s_1,s_2+h)\mathbf{e}_1 + u_2(s_1,s_2+h)\mathbf{e}_2, \tag{74}$$

dalla definizione di gradiente di un campo vettoriale si ottiene

$$\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O)\,\bar{\boldsymbol{c}}_1' = \partial_1 u_1\,\mathbf{e}_1 + \partial_1 u_2\,\mathbf{e}_2, \tag{75}$$

$$\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O)\,\bar{\boldsymbol{c}}_2' = \partial_2 u_1\,\mathbf{e}_1 + \partial_2 u_2\,\mathbf{e}_2. \tag{76}$$

La matrice di $\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O)$ risulta pertanto

$$[\nabla\mathbf{u}(\bar{\mathsf{p}}_O)] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial s_2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial s_2} \end{pmatrix}. \tag{77}$$

8 Deformazione locale

Si osservi che se la deformazione fosse affine, alla retta per $\bar{\mathsf{p}}_O$ (39) corrisponderebbe la retta

$$\boldsymbol{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_O) + h\,\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\mathbf{e}_1. \tag{78}$$

Se la deformazione non è affine la (78) non è vera in generale. Si può allora definire la differenza

$$\mathfrak{o}(h) := \boldsymbol{c}_1(h) - \big(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_O) + h\,\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\mathbf{e}_1\big) = \big(\boldsymbol{c}_1(h) - \boldsymbol{c}_1(0)\big) - h\,\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\mathbf{e}_1, \tag{79}$$

la quale, essendo per la (60)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\boldsymbol{c}_1(h) - \boldsymbol{c}_1(0)\big) = {\boldsymbol{c}_1}' = \mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\mathbf{e}_1, \tag{80}$$

risulta tale che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\mathfrak{o}(h)\|}{|h|} = 0. \tag{81}$$

Nel caso di deformazione non affine si ottiene dunque dalla definizione (79), invece della (78), l'espressione

$$\boldsymbol{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_O) + h\,\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_O)\mathbf{e}_1 + \mathfrak{o}(h). \tag{82}$$

Poiché, per la (81), $\|\mathfrak{o}(h)\|$ tende a zero più rapidamente di h, si può dire che in generale "vicino" a $\bar{\mathsf{p}}_O$ la deformazione $\boldsymbol{\phi}$ è affine.

9 Dilatazioni e scorrimenti

Nel caso di deformazione affine la dilatazione $\mathbf{U}$ descrive come si modificano le rette per una qualsiasi posizione, dilatandosi o contraendosi e variando l'angolo tra di esse. I vettori differenza tra le posizioni lungo le direzioni principali si "allungano" o si "accorciano", restando paralleli a se stessi, per un fattore pari al corrispondente autovalore di $\mathbf{U}$.

Se la deformazione non è affine le rette non si trasformano più in rette, in generale. La dilatazione $\mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$, ottenuta dalla decomposizione polare di $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$, descrive in questo caso come i vettori tangenti alle rette per $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ si modificano, "allungandosi" o "accorciandosi" e variando l'angolo tra di essi, in vettori tangenti alle curve corrispondenti a quelle rette. Gli autovettori di $\mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ si "allungano" o si "accorciano", restando paralleli a se stessi, per un fattore pari al corrispondente autovalore. Poiché $\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ varia con la posizione $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$, anche $\mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ dipende in generale dalla posizione e così pure le direzioni principali e gli autovalori.

In corrispondenza di una posizione $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ e di un vettore $\mathbf{a}$, si dicono, rispettivamente, *dilatazione* e *allungamento* nella direzione di $\mathbf{a}$ gli scalari

$$\lambda := \frac{\|\mathbf{U}\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}, \qquad \varepsilon := \frac{\|\mathbf{U}\mathbf{a}\| - \|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \lambda - 1. \tag{83}$$

In corrispondenza delle direzioni principali, essendo $\mathbf{U}\mathbf{a}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$, risulta $\lambda = \lambda_i$. La dilatazione in una direzione principale si dice *dilatazione principale*.

In corrispondenza di una posizione $\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}$ una coppia di vettori ortogonali $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ è trasformata da $\mathbf{U}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}})$ in una coppia di vettori non più ortogonali, in generale. Si dice *scorrimento* tra $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ l'angolo $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ tale che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{\mathbf{U}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{U}\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{U}\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{U}\mathbf{a}_2\|}. \tag{84}$$

Se $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ sono autovettori di $\mathbf{U}$, corrispondono cioè alle direzioni principali, risulta $\gamma = 0$.