Appendice 1. Spazi vettoriali

Indice

1 Spazi vettoriali

Si dice *spazio vettoriale sui reali* la struttura algebrica

$$(\mathcal{U}\,,\,+\,,\,\mathbb{R}\,,\ast\,),$$

dove $\mathcal{U}$ è un insieme, i cui elementi si dicono *vettori*, $\mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali e le *operazioni*

$$\begin{aligned} + &: \mathcal{U}\times\mathcal{U}\to\mathcal{U},\\ \ast &: \mathbb{R}\times\mathcal{U}\to\mathcal{U}, \end{aligned}$$

sono tali che

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{U}$,
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{U}$,
3. $\exists\, \mathbf{o}\in\mathcal{U} \quad | \quad \forall \mathbf{u}\in\mathcal{U} \quad \mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{u}$,
4. $\forall \mathbf{u}\in\mathcal{U} \quad \exists\, -\mathbf{u} \quad | \quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{o}$,
5. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{U}\,,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$,
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u}\in\mathcal{U}\,,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
7. $\alpha(\beta\mathbf{u})=(\alpha\beta)\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}\in\mathcal{U}\,,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
8. $1\,\mathbf{u}=\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}\in\mathcal{U}$

Il simbolo $\ast$ è sempre omesso, come nelle espressioni qui sopra. Dai precedenti assiomi derivano le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u}&=\mathbf{o},\\ \alpha\mathbf{o}&=\mathbf{o},\\ -1\mathbf{u}&=-\mathbf{u},\\ \alpha\mathbf{u}=\mathbf{o} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{u}=\mathbf{o}. \end{aligned}$$

2 Dipendenza lineare

Si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ il vettore

$$\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3, \tag{1}$$

dove α_1, α_2, α_3 sono dei numeri reali. Una combinazione lineare si può costruire con un qualsiasi numero di vettori.

Scelti dei vettori, essi si dicono *linearmente indipendenti* nel caso in cui una loro combinazione lineare è uguale al vettore nullo *solo se* i coefficienti sono tutti nulli.

3 Basi

Una *base* di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è un insieme ordinato di vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ tale che qualsiasi vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ si possa esprimere come loro combinazione lineare

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n. \tag{2}$$

Si dimostra che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori. Questo numero si dice *dimensione* dello spazio $\mathcal{V}$ e si indica con $\dim \mathcal{V}$.

Si dimostra che ad ogni vettore corrisponde una sola combinazione lineare dei vettori di una base fissata. I coefficienti di tale combinazione lineare si dicono *componenti* del vettore in tale base.

4 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è una funzione

$$\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} \tag{3}$$

tale che

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$,
3. $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Un modo per definire un prodotto scalare consiste nell'assegnare una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ che si assume *ortonormale*, cioè tale che

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{se} \quad i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Il prodotto tra due vettori si potrà poi calcolare utilizzando la loro espressione in termini di combinazione lineare dei vettori base. Ad esempio nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{5}$$

Si definisce *norma* di un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ il numero reale

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{6}$$

Ad esempio dalla (5) si ottiene

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{7}$$

Si dice *angolo tra due vettori* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il numero reale α tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}. \tag{8}$$

Per estendere il prodotto scalare (3) ad uno spazio vettoriale definito sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ occorre sostituire 1. con

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

Ne deriva, attraverso la 3., che

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \overline{\alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} = \bar{\alpha} \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} = \bar{\alpha} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{9}$$

Si noti che la (5) diventa di conseguenza

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + u_3 \bar{v}_3. \tag{10}$$

5 Applicazioni lineari

Una *applicazione lineare* è una funzione tra due spazi vettoriali

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \tag{11}$$

tale che

1. $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Sia ad esempio $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base di $\mathcal{V}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ una base di $\mathcal{U}$. Si ha

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = u_1 \mathbf{A}(\mathbf{e}_1) + u_2 \mathbf{A}(\mathbf{e}_2) + u_3 \mathbf{A}(\mathbf{e}_3). \tag{12}$$

Un tale vettore risulta una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$. Esprimendo questi come combinazioni lineari dei vettori base

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11} \mathbf{f}_1 + a_{21} \mathbf{f}_2, \tag{13}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12} \mathbf{f}_1 + a_{22} \mathbf{f}_2, \tag{14}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_{13} \mathbf{f}_1 + a_{23} \mathbf{f}_2, \tag{15}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) &= (a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3) \mathbf{f}_1 \\ &\quad + (a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3) \mathbf{f}_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Si noti che, ponendo $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{f}_1 + w_2 \mathbf{f}_2$ e disponendo le componenti di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ in vettori colonna, risulta

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

La matrice che compare in questa relazione si dice *matrice di* $\mathbf{A}$. Si noti che le colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$.

Una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in se stesso

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \tag{18}$$

si dice *endomorfismo* di $\mathcal{V}$. Scelta una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la matrice di un endomorfismo $\mathbf{A}$ è la matrice quadrata definita dalle espressioni

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + a_{31} \mathbf{e}_3, \tag{19}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{32} \mathbf{e}_3, \tag{20}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_{13} \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3. \tag{21}$$

6 Applicazione lineare trasposta

Data una applicazione lineare tra due spazi vettoriali con prodotto scalare

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \tag{22}$$

si dice *trasposta* la applicazione lineare

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \tag{23}$$

tale che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{24}$$

Se si scelgono delle basi ortonormali sia in $\mathcal{V}$ che in $\mathcal{U}$ la matrice di $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ risulta essere la trasposta della matrice di $\mathbf{A}$.

Un endomorfismo $\mathbf{U} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *simmetrico* se $\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{U}$. Un endomorfismo $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *ortogonale* se $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Si noti che, poiché

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{25}$$

si ha

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{26}$$

Dunque un endomorfismo $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ conserva il prodotto scalare se e solo se è ortogonale. Un endomorfismo $\mathbf{W} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *antisimmetrico* se $\mathbf{W}^\mathsf{T} = -\mathbf{W}$. Se la base è ortonormale la matrice di un endomorfismo simmetrico è simmetrica, la matrice di un endomorfismo antisimmetrico è antisimmetrica.

Se gli spazi vettoriali sono complessi si dice in generale *aggiunta* invece di *trasposta*. Se si scelgono delle basi ortonormali sia in $\mathcal{V}$ che in $\mathcal{U}$ la matrice di $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ risulta essere la trasposta coniugata della matrice di $\mathbf{A}$. Se la base è ortonormale la matrice di un endomorfismo simmetrico è *hermitiana* (uguale alla trasposta coniugata).

7 Tensori

Nel seguito si userà il termine *tensore* per indicare qualsiasi applicazione lineare, come è usuale nella Meccanica dei Solidi e più in generale nella Meccanica del Continuo.

8 Decomposizione spettrale

Un tensore $\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *diagonalizzabile* se esiste la decomposizione, detta *spettrale*,

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{P}_m, \quad (m \leq \dim \mathcal{V}), \tag{27}$$

dove i tensori $\mathbf{P}_i$, detti *proiettori*, sono tali che $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathbf{v} = \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \tag{28}$$

$$(\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_m)\mathbf{v} = \mathbf{v}, \tag{29}$$

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j \mathbf{v} = \mathbf{o}\,. \tag{30}$$

Gli scalari λ_i si dicono *autovalori* di $\mathbf{A}$. Le immagini dei proiettori $\mathbf{P}_i$ si dicono *autospazi* di $\mathbf{A}$. Si noti che se $\mathbf{v}_i \in \operatorname{im} \mathbf{P}_i$ allora, poichè $\mathbf{P}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ e $\mathbf{P}_j \mathbf{v}_i = \mathbf{o}$, risulta dalla (27)

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \tag{31}$$

Essendo tale espressione equivalente a

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{o}, \tag{32}$$

gli autovalori sono le radici dell'*equazione caratteristica*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{33}$$

Il vettore $\mathbf{v}_i$ è un *autovettore* corrispondente all'autovalore λ_i.

Si dimostra che un tensore simmetrico $\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ è diagonalizzabile, gli autovalori sono reali e gli autospazi sono mutuamente ortogonali. Per l'ortogonalità degli autospazi i proiettori $\mathbf{P}_i$ risultano tali che

$$\mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_i)\mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{v}. \tag{34}$$

I proiettori che hanno questa proprietà si dicono *proiettori ortogonali*. I proiettori ortogonali sono simmetrici. Infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_i)\mathbf{v} + \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v} = \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_i)\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v} + \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v} = \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{P}_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_i^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}_i .
\end{aligned} \tag{35}$$

Un tensore simmetrico $\mathbf{A}$ si dice *definito positivo* se

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{o}. \tag{36}$$

Gli autovalori di un tensore definito positivo sono tutti positivi. Infatti in corrispondenza di un autovettore $\mathbf{v}_i$ si ha

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i > 0. \tag{37}$$

Viceversa se un tensore simmetrico ha autovalori positivi esso è definito positivo. Infatti, nel caso $\dim \mathcal{V} = 3$, utilizzando una base ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ costituita da autovettori, risulta per qualsiasi vettore $\mathbf{u}$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}(u_1\mathbf{v}_1 + u_2\mathbf{v}_2 + u_3\mathbf{v}_3) \cdot (u_1\mathbf{v}_1 + u_2\mathbf{v}_2 + u_3\mathbf{v}_3) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 > 0. \tag{38}$$

Una volta calcolati gli autovalori dalla condizione (33), i proiettori ortogonali sugli autospazi si possono calcolare osservando che, per le proprietà (28)–(30), dalla (27) si ha, ad esempio nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 2$ e gli autovalori sono distinti,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 - \lambda_1(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2. \tag{39}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}), \tag{40}$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_2. \tag{41}$$

Nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_1(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{P}_3,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_2(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{P}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{P}_3,
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_3(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\
&= (\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{P}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{P}_2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Se gli autovalori sono distinti, essendo

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{P}_3, \tag{45}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{P}_1, \tag{46}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2, \tag{47}$$

risulta

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}), \tag{48}$$
$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}), \tag{49}$$
$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}). \tag{50}$$

Il calcolo consiste nel valutare le matrici dei proiettori ortogonali attraverso le espressioni corrispondenti alle espressioni qui sopra.

9 Decomposizione polare

Un tensore

$$\mathbf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \tag{51}$$

tale che $\det \mathbf{F} > 0$, si può esprimere in un unico modo come composizione

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \tag{52}$$

essendo $\mathbf{R}$ una rotazione e $\mathbf{U}$ un tensore simmetrico definito positivo.

Definendo il *tensore di Cauchy-Green*

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}, \tag{53}$$

si osservi che questo risulta simmetrico e definito positivo. Infatti

$$\mathbf{C}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{u} \geq 0, \tag{54}$$

essendo il prodotto nullo se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Pertanto $\mathbf{C}$ è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono positivi. Se esiste $\mathbf{U}$ esso è diagonalizzabile, avendo assunto che sia simmetrico e definito positivo. Nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha dunque, dalla (27),

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3, \tag{55}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{U}^2 &= (\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3)(\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3) \\ &= \lambda_1^2 \mathbf{P}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{P}_3. \end{aligned} \tag{56}$$

Si noti ora che $\mathbf{C}$ è uguale al quadrato di $\mathbf{U}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2. \tag{57}$$

Pertanto la decomposizione spettrale di $\mathbf{C}$ e la decomposizione spettrale di $\mathbf{U}$ sono tali che

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \lambda_1^2 \mathbf{P}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{P}_3. \tag{58}$$

Il tensore $\mathbf{U}$ si ottiene dunque costruendo per prima cosa $\mathbf{C}$, poi la sua decomposizione spettrale

$$\mathbf{C} = \eta_1 \mathbf{P}_1 + \eta_2 \mathbf{P}_2 + \eta_3 \mathbf{P}_3, \tag{59}$$

e infine ponendo

$$\mathbf{U} := \sqrt{\eta_1}\mathbf{P}_1 + \sqrt{\eta_2}\mathbf{P}_2 + \sqrt{\eta_3}\mathbf{P}_3. \tag{60}$$

Tale tensore risulta definito positivo, essendo positivi i suoi autovalori. La unicità di $\mathbf{U}$ deriva da tale proprietà, essendo uniche le radici positive degli autovalori di $\mathbf{C}$. La rotazione si ottiene infine dalla espressione

$$\mathbf{R} := \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{F}(\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\sqrt{\eta_2}}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{\sqrt{\eta_3}}\mathbf{P}_3). \tag{61}$$

Il tensore $\mathbf{R}$ risulta infatti ortogonale essendo

$$\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R} = (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^\mathsf{T}(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}) = (\mathbf{U}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{U}^2\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}. \tag{62}$$

Il determinante di $\mathbf{R}$ risulta positivo essendo positivo il determinante di $\mathbf{F}$ e il determinante di $\mathbf{U}$.

10 Prodotto tensoriale

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. In corrispondenza di una coppia di vettori $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ risulta definito il tensore, detto *prodotto tensoriale* tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}, \tag{63}$$

tale che[1]

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U}. \tag{64}$$

Sia ad esempio $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{U}$. Ponendo $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, risulta

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{u} = v_1\mathbf{u}, \tag{65}$$
$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{u} = v_2\mathbf{u}, \tag{66}$$
$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_3 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{u} = v_3\mathbf{u}. \tag{67}$$

Pertanto la matrice di $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$ è tale che la colonna j-ma è costituita dalle componenti del vettore $\mathbf{u}$ moltiplicate per v_j, l'elemento sulla riga i e la colonna j risultando $v_j u_i$:

$$\begin{pmatrix} v_1u_1 & v_2u_1 & v_3u_1 \\ v_1u_2 & v_2u_2 & v_3u_2 \\ v_1u_3 & v_2u_3 & v_3u_3 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Si noti che, essendo

$$\begin{aligned}((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j &= ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_j = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{v}) = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{e}_j),\end{aligned} \tag{69}$$

risulta

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^\mathsf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}. \tag{70}$$

[1]Si può dare una definizione alternativa del prodotto tensoriale assumendo che sia $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$. Ma questo corrisponde semplicemente a scambiare le posizioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ attorno al simbolo $\otimes$.

Si osservi che, in corrispondenza di due tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, si ha

$$(\mathbf{v}\otimes(\mathbf{A}\mathbf{u}))\mathbf{w} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{w} \quad \forall\mathbf{w}\in\mathcal{U} \tag{71}$$
$$((\mathbf{B}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{B}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \quad \forall\mathbf{w}\in\mathcal{U}. \tag{72}$$

Risulta dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\otimes(\mathbf{A}\mathbf{u}) &= \mathbf{A}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) \\ (\mathbf{B}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u} &= (\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{B}^{\mathsf{T}}. \end{aligned} \tag{73}$$

Si dimostra che i prodotti tensoriali

$$\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{74}$$

costruiti con i vettori di una base di $\mathcal{U}$ costituiscono una base dello spazio degli tensori. Qualsiasi tensore è dunque esprimibile come loro combinazione lineare.

11 Prodotto scalare tra tensori

Si consideri uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ e una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. Si osservi che, utilizzando la definizione di *traccia* data in Appendice 2, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) &= \frac{\operatorname{vol}((\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{e}_3)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \\ &= \frac{\operatorname{vol}((\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{u},\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{u})}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \\ &= \frac{\operatorname{vol}((\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)u_1\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)u_2\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)+\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)u_3\mathbf{e}_3)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1)u_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_2)u_2+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_3)u_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \end{aligned} \tag{75}$$

Ne deriva che, per la (73), in corrispondenza di qualsiasi tensore $\mathbf{A}$ di $\mathcal{V}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{u}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{v}\otimes(\mathbf{A}\mathbf{u})) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})) \\ (\mathbf{B}\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} &= \operatorname{tr}((\mathbf{B}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{tr}((\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{B}^{\mathsf{T}}). \end{aligned} \tag{76}$$

Queste espressioni motivano una definizione di prodotto scalare tra un tensore e un prodotto tensoriale $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ tale che sia

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{u}) \tag{77}$$

Dalle (76) deriva che

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \operatorname{tr}((\mathbf{A}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}) = \operatorname{tr}((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\mathbf{A}^{\mathsf{T}}). \tag{78}$$

e anche

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = \operatorname{tr}((\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{v})\otimes\mathbf{u}) = \operatorname{tr}((\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{A}) = \operatorname{tr}((\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^{\mathsf{T}}\mathbf{A}). \tag{79}$$

Poichè un qualsiasi tensore può essere espresso come combinazione lineare dei prodotti tensoriali costruiti con i vettori di una base, la definizione data di prodotto scalare si estende ad una qualsiasi coppia di tensori $\mathbf{C}$ e $\mathbf{A}$, risultando

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}). \tag{80}$$

Dalla simmetria del prodotto scalare tra vettori deriva poi

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \tag{81}$$

Una importante proprietà del prodotto scalare è che il prodotto di un tensore simmetrico $\mathbf{U}$ con un tensore antisimmetrico $\mathbf{W}$ è nullo. Si ha infatti

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = \operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}^{\mathsf{T}}) = -\operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}), \tag{82}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = \operatorname{tr}(\mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}) = \operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}). \tag{83}$$

12 Determinante

Dato un tensore

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \tag{84}$$

si definisce (v. Appendice 2) *determinante* di $\mathbf{A}$ il rapporto tra i volumi

$$\det \mathbf{A} = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$$

Da tale definizione discende che il determinante di $\mathbf{A}$ è uguale al determinante della matrice di $\mathbf{A}$ in una qualsiasi base.