Appendice 3. Rotazioni

Indice

1 Tensori ortogonali

Si consideri un tensore ortogonale $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Essendo $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, si ha

$$\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det \mathbf{I} = 1. \tag{1}$$

Pertanto risulta $|\det \mathbf{Q}| = 1$. Un tensore ortogonale si dice *rotazione* se il determinante è 1.

Si supponga che esista un *sottospazio invariante* $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{Q}$. Per tale sottospazio si ha

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \quad \mathbf{Q}\mathbf{w} \in \mathcal{W}. \tag{2}$$

In particolare $\mathcal{W}$ è un autospazio se esiste λ tale che

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \quad \mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}. \tag{3}$$

Il sottospazio $\mathcal{W}^\perp$ costituito da tutti i vettori ortogonali ai vettori di $\mathcal{W}$, detto *complemento ortogonale* di $\mathcal{W}$, è anch'esso invariante. Infatti, essendo $\mathbf{Q}$ un isomorfismo e $\mathcal{W}$ invariante, comunque si scelga un vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ esiste un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ tale che $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Per ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ e ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{W}^\perp$ risulta pertanto

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{v} \in \mathcal{W}^\perp. \tag{4}$$

2 Rotazioni e simmetrie in uno spazio di dimensione 2

Sia $\mathbf{Q}$ un tensore ortogonale in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimensione 2 definito sul campo dei reali. In tal caso un sottospazio invariante può solo avere dimensione 1 ed è pertanto definito dalla condizione che esistano λ e $\mathbf{w}$ tali che $\mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Questa condizione equivale alla seguente

$$(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{w} = 0, \tag{5}$$

che implica, affinché sia $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$,

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{6}$$

In corrispondenza di un tale vettore $\mathbf{w}$ si ha

$$\mathbf{Q}\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{w} \cdot \lambda\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1. \tag{7}$$

Indicando la matrice di $\mathbf{Q}$, in una qualsiasi base ortonormale, con

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

questa ha, essendo $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, le seguenti proprietà

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \tag{9}$$

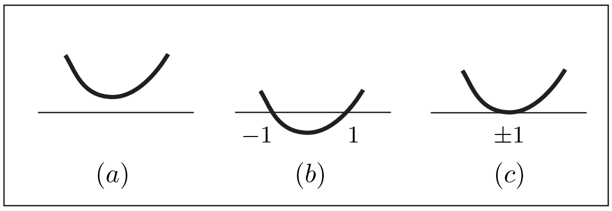
$$b_2^2 + a_2^2 = 1, \tag{10}$$

$$a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0, \tag{11}$$

mentre le radici dell'equazione caratteristica (6) sono date dall'espressione

$$\frac{(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 4 \det \mathbf{Q}}}{2}. \tag{12}$$

Per il polinomio caratteristico si possono avere pertanto i seguenti casi:



- Nel caso (a), in assenza di zeri del polinomio caratteristico, non esiste nessun sottospazio invariante. Infatti risulta

$$\big((a_1 + a_2)^2 - 4 \det \mathbf{Q}\big) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < (a_1 + a_2)^2 < 4 \det \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = 1. \tag{13}$$

Ne deriva, dalle proprietà della matrice di $\mathbf{Q}$, che

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = -b_2, \quad a_2 = \pm\sqrt{1 - b_2^2}. \tag{14}$$

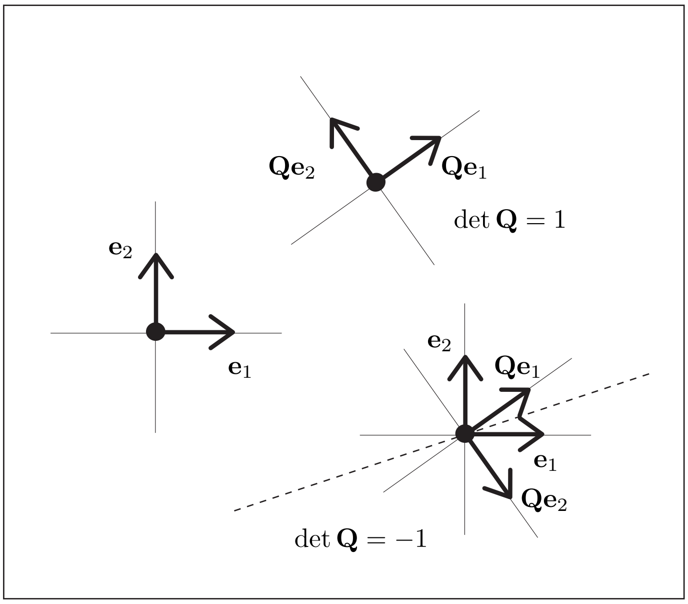
Per questa ragione la matrice di $\mathbf{Q}$ può essere espressa nella forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Si può osservare che se $\mathbf{Q}$ fosse la composizione di una rotazione con un ‘ribaltamento’ attorno a $\mathbf{Q}\mathbf{e}_1$ la matrice di $\mathbf{Q}$ sarebbe, essendo $\mathbf{Q}\mathbf{e}_2$ opposto al precedente,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Questo caso è illustrato nella figura in basso in cui si vede come si possa tracciare un *asse di simmetria* (linea tratteggiata) a cui corrisponde un autospazio con autovalore 1, mentre ad una retta ortogonale all’asse di simmetria corrisponde un autospazio con autovalore -1.



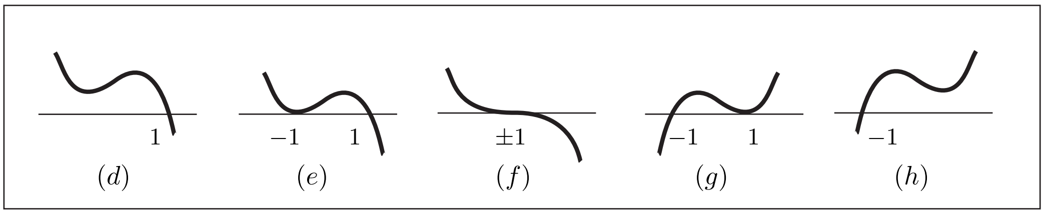
In generale un ‘ribaltamento’ dà luogo ad un cambiamento di orientamento a cui corrisponde $\det \mathbf{Q} = -1$. Esistono allora, come si vede dall’espressione (4), due autovalori reali e distinti. Si tratta dunque del caso (b).

- Viceversa nel caso (b), ai due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ corrispondono due autospazi, che sono mutuamente ortogonali per la (4). In tal caso $\mathbf{Q}$ si dice *simmetria*.

- Nel caso (c) se $\lambda = 1$ allora $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Se $\lambda = -1$ si tratta di una rotazione di ampiezza π.

3 Tensori ortogonali in uno spazio di dimensione 3

Si consideri ora un tensore ortogonale $\mathbf{Q}$ in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimensione 3 definito sul campo dei reali. In questo caso un sottospazio invariante può avere dimensione 1 oppure 2. Il polinomio caratteristico è di terzo grado e il suo grafico è uno dei seguenti:



In ogni caso esiste almeno uno zero del polinomio caratteristico e il corrispondente autospazio di dimensione 1 il cui complemento ortogonale, per la (4), è invariante.

- Nel caso (d) esiste un solo autovalore e dunque un solo autospazio. Essendo il complemento ortogonale invariante, alla restrizione di $\mathbf{Q}$ a tale sottospazio corrisponde il caso (a). Risulta pertanto $\det \mathbf{Q} = 1$. Indicando con $\mathbf{a}_3$ un autovettore unitario e con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una base ortonormale, la matrice di $\mathbf{Q}$ in tale base risulta

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

- Nel caso (e) risulta $\det \mathbf{Q} = (-1)^2 = 1$. Esiste un autospazio di dimensione 1 in corrispondenza di $\lambda = 1$. Sul complemento ortogonale $\mathbf{Q}$ si comporta come nel caso (c) con $\lambda = -1$. Si tratta dunque di una rotazione di ampiezza π.

- Nel caso (f) è $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ oppure $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$. Rispettivamente risulta $\det \mathbf{Q} = 1$ e $\det \mathbf{Q} = -1$.

- Nel caso (g) risulta $\det \mathbf{Q} = -1$. Esiste un autospazio di dimensione 1 in corrispondenza di $\lambda = -1$. Sul complemento ortogonale $\mathbf{Q}$ si comporta come nel caso (c) con $\lambda = 1$.

- Nel caso (h) esiste un solo autovalore e dunque un solo autospazio. Essendo il complemento ortogonale invariante, una qualsiasi coppia di vettori in esso, per quanto visto nel caso (a), è ruotata da $\mathbf{Q}$. Indicando con $\mathbf{a}_3$ è un autovettore unitario e con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una base ortonormale, la matrice di $\mathbf{Q}$ in tale base risulta, essendo $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Risulta pertanto $\det \mathbf{Q} = -1$.

4 Rotazioni in uno spazio di dimensione 3

Se si considerano solo le rotazioni $\mathbf{R}$, selezionando tra i casi precedenti quelli in cui il determinante è uguale a 1, si ha in generale il caso (d). Esiste dunque un sottospazio invariante di dimensione 1 corrispondente a $\lambda = 1$. Tale sottospazio si chiama *asse della rotazione*. Il sottospazio ad esso ortogonale è invariante e alla restrizione di $\mathbf{R}$ a tale sottospazio corrisponde il caso (a). Indicando con $\mathbf{a}_3$ un autovettore unitario e con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una base ortonormale, la matrice di $\mathbf{Q}$ in tale base risulta

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Casi particolari sono il caso (e) e il caso (f) con autovalore 1.

5 Simmetrie in uno spazio di dimensione 3

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\,\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1 \tag{20}$$

6 Generatore infinitesimo

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{W} + \mathbf{W}^2(1 - \cos\theta) \tag{21}$$

7 Parametrizzazione del gruppo delle rotazioni

7.1 Rotazioni come prodotto di tre rotazioni elementari

Come si è visto, ad una rotazione corrisponde un asse e un'ampiezza e, viceversa, fissato un versore ed un angolo a questi corrisponde una rotazione.

In alternativa, una rotazione può anche essere descritta come il prodotto di tre rotazioni di ampiezza θ_1, θ_2, θ_3, rispettivamente attorno a tre assi ortogonali corrispondenti ai vettori di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1. \tag{22}$$

Le matrici nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ delle rotazioni elementari sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

La stessa rotazione può inoltre essere descritta come prodotto di tre rotazioni con assi definiti in diversi modi e ampiezze in generale diverse dalle precedenti. Ad esempio si può costruire come composizione di una rotazione $\mathbf{Q}_1$ con asse $\mathbf{e}_1$, seguita da una rotazione $\mathbf{Q}_2$ con asse $\mathbf{Q}_1\mathbf{e}_2$, seguita da una rotazione $\mathbf{Q}_3$ con asse $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{e}_3$.

Con *angoli di Eulero* si indicano le ampiezze delle rotazioni corrispondenti alla composizione di una rotazione $\mathbf{Q}_1$ con asse $\mathbf{e}_3$, seguita da una rotazione $\mathbf{Q}_2$ con asse $\mathbf{Q}_1\mathbf{e}_1$, seguita da una rotazione $\mathbf{Q}_3$ con asse $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{e}_3$.

Nel caso in cui gli assi non siano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, nella costruzione della matrice della rotazione prodotto occorre fare attenzione a scrivere le matrici delle rotazioni elementari nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

8 Decomposizione spettrale di una rotazione

Ampliando il campo dei reali al campo dei complessi, la (6) ha in generale anche due radici complesse coniugate $(a \pm ib)$ tali che $a^2 + b^2 = 1$, essendo $\det \mathbf{R} = 1$. La rotazione $\mathbf{R}$, avendo ora tre autovalori distinti, ha tre sottospazi invarianti mutuamente ortogonali e può pertanto essere espressa come

$$\mathbf{R} = (a + ib)\mathbf{P}_1 + (a - ib)\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3, \tag{24}$$

essendo i tensori $\mathbf{P}_i$ dei *proiettori ortogonali.* Ne deriva che

$$\begin{aligned}\mathbf{R} - (a + ib)\mathbf{I} &= (a + ib)\mathbf{P}_1 + (a - ib)\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 - (a + ib)(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\\ &= (1 - (a + ib))\mathbf{P}_3 - 2ib\mathbf{P}_2\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R} - (a - ib)\mathbf{I} &= (a + ib)\mathbf{P}_1 + (a - ib)\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 - (a - ib)(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\\ &= (1 - (a - ib))\mathbf{P}_3 + 2ib\mathbf{P}_1.\end{aligned} \tag{26}$$

Componendo tra loro nello stesso ordine i termini a sinistra e a destra si ottiene

$$(\mathbf{R} - (a + ib)\mathbf{I})(\mathbf{R} - (a - ib)\mathbf{I}) = (1 - (a + ib))(1 - (a - ib))\mathbf{P}_3, \tag{27}$$

$$\mathbf{R}^2 - 2a\mathbf{R} + \mathbf{I} = 2(1 - a)\mathbf{P}_3. \tag{28}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2(1 - a)}(\mathbf{R}^2 - 2a\mathbf{R} + \mathbf{I}). \tag{29}$$

Questa espressione di $\mathbf{P}_3$ permette di ottenere da un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ il vettore $\mathbf{P}_3\mathbf{u}$ parallelo all'asse di rotazione.

Si noti che l'estensione al campo complesso ha il solo scopo di ottenere la espressione di $\mathbf{P}_3$ che risulta valida anche nello spazio $\mathcal{V}$ definito sui reali, per il quale il sottospazio ortogonale all'asse è un sottospazio invariante, immagine del proiettore ortogonale $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_3)$.

In corrispondenza di un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ non appartenente all'asse, il vettore $\mathbf{v} := (\mathbf{I} - \mathbf{P}_3)\mathbf{u}$ risulta ortogonale all'asse. Per l'ampiezza θ della rotazione si ha, dalla definizione di angolo tra vettori,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}. \tag{30}$$

Poiché $\mathbf{P}_3\mathbf{v} = \mathbf{P}_3(\mathbf{I} - \mathbf{P}_3)\mathbf{u} = 0$ si ha

$$(\mathbf{R}^2 - 2a\mathbf{R} + \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = 2a\mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{R}^2\mathbf{v} \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} = 2a\mathbf{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^2\mathbf{v} = 2a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{R}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = a. \tag{33}$$