

Moti rigidi e moti affini

C'è un'altra distinzione tra diversi tipi di grandezze vettoriali che, sebbene molto importante dal punto di vista fisico, non è così necessaria dal punto di vista matematico. Si tratta della distinzione tra proprietà *longitudinali* e proprietà *rotazionali*. La direzione e la intensità di una grandezza può dipendere da qualche azione o effetto che ha luogo lungo una certa retta, oppure può dipendere da qualcosa della stessa natura di una rotazione attorno ad un asse.

[Maxwell J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, 1892, vol. I, p. 13]

Indice

1 Moti	2
2 Moti rigidi	2
3 Asse istantaneo di rotazione	4
3.1 Vettore assiale	5
3.2 Centro istantaneo di rotazione	5
4 Moti rigidi in termini di coordinate	5
5 Moti affini	6
6 Gradiente della velocità	7
7 Descrizione di campi di velocità affini	9

1 Moti

Il *moto di un corpo* \mathcal{B} è una funzione regolare

$$\mathbf{p} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} \quad (1)$$

tale che per qualsiasi t

$$\mathbf{p}(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \quad (2)$$

è un posizionamento e

$$\mathbf{p}_A(\cdot) \equiv \mathbf{p}(A, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} \quad (3)$$

è il moto di un qualsiasi punto $A \in \mathcal{B}$. La descrizione del moto si può dare anche in termini di deformazioni. Indicando con $\bar{\mathcal{R}}$ la forma del corpo ad un fissato istante t_0 , si definisce

$$\phi : \bar{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E} \quad (4)$$

tale che per ogni punto $A \in \mathcal{B}$ trasformi la posizione $\bar{\mathbf{p}}_A \equiv \mathbf{p}(A, t_0)$ nella posizione

$$\mathbf{p}_A(t) = \mathbf{p}(A, t) = \phi(\bar{\mathbf{p}}_A, t). \quad (5)$$

L'immagine in \mathcal{E} di \mathbf{p}_A si dice *traiettoria* del punto A . La *velocità* all'istante t del punto A è il vettore

$$\dot{\mathbf{p}}_A(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\mathbf{p}_A(t + \tau) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (6)$$

Fissato un sistema di coordinate cartesiane attraverso la scelta di un'origine \mathbf{o} e di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, si può dare una descrizione del moto in termini di coordinate

$$\mathbf{p}_A(t) = \mathbf{o} + x_{1A}(t)\mathbf{e}_1 + x_{2A}(t)\mathbf{e}_2 + x_{3A}(t)\mathbf{e}_3. \quad (7)$$

Corrispondentemente, l'espressione della velocità del punto A in termini di componenti risulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_A(t) &:= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} ((x_{1A}(t + \tau) - x_{1A}(t))\mathbf{e}_1 + (x_{2A}(t + \tau) - x_{2A}(t))\mathbf{e}_2 + (x_{3A}(t + \tau) - x_{3A}(t))\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{d}{dt}x_{1A}(t)\mathbf{e}_1 + \frac{d}{dt}x_{2A}(t)\mathbf{e}_2 + \frac{d}{dt}x_{3A}(t)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Si dice *campo di velocità* la funzione

$$\mathbf{p}_A(t) \mapsto \dot{\mathbf{p}}_A(t) \quad (9)$$

2 Moti rigidi

Un moto si dice *rigido* se, comunque si fissi t_0 , la descrizione del moto in termini di deformazioni (4) è tale che, per ogni coppia di punti $A, B \in \mathcal{B}$, risulta ad ogni istante t

$$\phi(\bar{\mathbf{p}}_B, t) = \phi(\bar{\mathbf{p}}_A, t) + \mathbf{R}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A), \quad (10)$$

essendo $\mathbf{R}(t)$ una rotazione. Un *moto rigido* risulta pertanto definito dal moto di un punto qualsiasi del corpo, ad esempio A , e da \mathbf{R} . L'espressione corrispondente per le velocità è

$$\dot{\phi}(\bar{\mathbf{p}}_B, t) = \dot{\phi}(\bar{\mathbf{p}}_A, t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A). \quad (11)$$

Sostituendo alla (10) l'espressione in termini di moto di ciascun punto

$$\mathbf{p}_B(t) = \mathbf{p}_A(t) + \mathbf{R}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A), \quad (12)$$

la (11) diventa

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A). \quad (13)$$

Si noti che dalla (12) si ha

$$\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A = \mathbf{R}(t)^\top(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (14)$$

Sostituendo questa espressione nella (13) risulta per le velocità

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\top(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (15)$$

Ponendo

$$\mathbf{W}(t) := \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\top, \quad (16)$$

la (15) si può scrivere infine

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (17)$$

Il tensore $\mathbf{W}(t)$, detto *velocità angolare*, risulta antisimmetrico. Si osservi infatti che se $\mathbf{R}(t)$ è una rotazione anche $\mathbf{R}(t)^{-1} = \mathbf{R}(t)^\top$ lo è. Pertanto

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}(t)^\top = \mathbf{I}. \quad (18)$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^\top + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}(t)^\top = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t) + \mathbf{W}(t)^\top = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t)^\top = -\mathbf{W}(t). \quad (19)$$

Si noti inoltre che, ponendo

$$\mathbf{d}(t) := \mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t), \quad (20)$$

alla (17) corrisponde

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t). \quad (21)$$

Per la antisimmetria della velocità angolare si ha

$$\dot{\mathbf{d}}(t) \cdot \mathbf{d}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{d}(t) = \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{W}(t)^\top\mathbf{d}(t) = -\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) \quad (22)$$

Ne derivano le due proprietà equivalenti

$$\dot{\mathbf{d}}(t) \cdot \mathbf{d}(t) = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{d}(t) = 0. \quad (24)$$

Dalla prima risulta che la differenza di velocità

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_B(t) - \dot{\mathbf{p}}_A(t) \quad (25)$$

o è nulla o è ortogonale al vettore differenza (20). Dalla seconda risulta che $\mathbf{W}(t)$ trasforma un qualsiasi vettore in un vettore ad esso ortogonale.

Un *campo di velocità rigido* è un campo di velocità in cui le velocità sono tali che valga la (17), con $\mathbf{W}(t)$ antisimmetrico.

3 Asse istantaneo di rotazione

Un tensore antisimmetrico $\mathbf{W}(t)$ di uno spazio vettoriale reale di dimensione tre ha un autovalore nullo. Infatti, essendo il polinomio caratteristico di terzo grado esiste almeno un autovalore reale λ . Indicando con $\mathbf{a}_o(t)$ un autovettore unitario corrispondente a λ si ha

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \lambda \mathbf{a}_o(t). \quad (26)$$

Ne deriva che, per la (24),

$$\lambda = \mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0. \quad (27)$$

Risulta dunque

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \mathbf{o}. \quad (28)$$

Si considerino i punti che all'istante t occupano posizioni sulla retta per $\mathbf{p}_A(t)$

$$\mathbf{c}_o(h, t) = \mathbf{p}_A(t) + h \mathbf{a}_o(t). \quad (29)$$

Essi hanno tutti la stessa velocità poichè, per la (28),

$$\dot{\mathbf{c}}_o(h, t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{c}_o(h, t) - \mathbf{p}_A(t)) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t). \quad (30)$$

Tale proprietà vale per qualsiasi retta parallela a $\mathbf{a}_o(t)$. Pertanto ad ogni retta parallela a $\mathbf{a}_o(t)$ corrisponde una velocità, in generale diversa da retta a retta.

Si consideri ora una qualsiasi coppia di punti A e B e il vettore differenza (20). Si osservi che per la differenza delle velocità (25) risulta, per la (28),

$$\dot{\mathbf{d}}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{W}(t)^\top \mathbf{a}_o(t) = -\mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{W}(t)\mathbf{a}_o(t) = 0. \quad (31)$$

Pertanto la differenza di velocità, se non è nulla, è ortogonale non solo al vettore $\mathbf{d}(t)$, per la (23), ma anche al vettore $\mathbf{a}_o(t)$. Alla proprietà (31) corrisponde anche un'altra interpretazione. Se la si pone nella forma

$$(\dot{\mathbf{p}}_B(t) - \dot{\mathbf{p}}_A(t)) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0, \quad (32)$$

ne discende che

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) \cdot \mathbf{a}_o(t), \quad (33)$$

La proiezione ortogonale della velocità su $\mathbf{a}_o(t)$ risulta dunque uguale per tutti i punti del corpo. La velocità di un qualsiasi punto si può allora esprimere come somma di una velocità $\mathbf{v}_o(t)$ parallela a $\mathbf{a}_o(t)$, uguale per tutti i punti, e di una velocità ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$. In particolare lungo una retta su un piano per $\mathbf{p}_A(t)$ ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$

$$\mathbf{c}(h, t) = \mathbf{p}_A(t) + h\mathbf{d}(t), \quad \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{a}_o(t) = 0, \quad (34)$$

le velocità si possono esprimere come

$$\dot{\mathbf{c}}(h, t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) = \mathbf{v}_o(t) + \mathbf{v}_A^\perp(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t), \quad (35)$$

con

$$\mathbf{v}_o(t) := (\dot{\mathbf{p}}_A(t) \cdot \mathbf{a}_o(t))\mathbf{a}_o(t), \quad (36)$$

$$\mathbf{v}_A^\perp(t) := (\dot{\mathbf{p}}_A(t) - \mathbf{v}_o(t)), \quad (37)$$

essendo $\mathbf{v}_A^\perp(t)$, come $\mathbf{d}(t)$, un vettore ortogonale a $\mathbf{a}_o(t)$. È sufficiente scegliere $\mathbf{d}(t)$ ortogonale anche a $\mathbf{v}_A^\perp(t)$ perché $\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t)$, che per la (24) e la (31) risulterà ortogonale sia ad $\mathbf{d}(t)$ che a $\mathbf{a}_o(t)$, sia parallelo a $\mathbf{v}_A^\perp(t)$. Esiste allora un solo valore di h tale che

$$\mathbf{v}_A^\perp(t) + h\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) = \mathbf{o}, \quad (38)$$

individuando così, attraverso la (34), una posizione a cui corrisponde la velocità $\mathbf{v}_o(t)$ parallela a $\mathbf{a}_o(t)$. La retta per tale posizione parallela a $\mathbf{a}_o(t)$ si dice *asse istantaneo di rotazione*.

3.1 Vettore assiale

Poiché $\mathbf{W}(t)$ trasforma un qualsiasi vettore $\mathbf{d}(t)$ in un vettore ortogonale sia ad $\mathbf{d}(t)$ che a $\mathbf{a}_o(t)$, si può pensare di costruire un vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ tale che sia

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{d}(t) \quad \forall \mathbf{d}(t) \in \mathcal{V}. \quad (39)$$

Tale vettore esiste ed è unico. Infatti ponendo, in una base ortonormale,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{e}_1 + \omega_2(t)\mathbf{e}_2 + \omega_3(t)\mathbf{e}_3, \quad (40)$$

le componenti sono date dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \omega_3(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \omega_1(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &\Rightarrow \omega_2(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (41)$$

Poiché

$$\mathbf{W}(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{o}, \quad (42)$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$ è un autovettore corrispondente a $\lambda = 0$. Esso è pertanto parallelo ad $\mathbf{a}_o(t)$. Il vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$ è detto *vettore assiale* di $\mathbf{W}(t)$. La relazione (39) definisce, per via delle (41), una corrispondenza biunivoca tra tensori antisimmetrici e vettori in uno spazio \mathcal{V} di dimensione tre.

3.2 Centro istantaneo di rotazione

In uno spazio euclideo di dimensione due, in corrispondenza di un campo di velocità rigido all'istante t , si dice *centro istantaneo di rotazione* la posizione del punto C tale che $\dot{\mathbf{p}}_C(t) = \mathbf{o}$. Poiché

$$\dot{\mathbf{p}}_A(t) - \dot{\mathbf{p}}_C(t) = \mathbf{W}(t)(\mathbf{p}_A(t) - \mathbf{p}_C(t)), \quad (43)$$

se $\mathbf{p}_C(t)$ è il centro istantaneo di rotazione la velocità $\dot{\mathbf{p}}_A(t)$ coincide con la differenza tra le velocità ed è dunque ortogonale alla retta congiungente le posizioni $\mathbf{p}_A(t)$ e $\mathbf{p}_C(t)$. Questo permette di calcolare il centro di rotazione come la intersezione delle rette passanti per le posizioni $\mathbf{p}_A(t)$ e $\mathbf{p}_C(t)$ di due punti qualsiasi e ortogonali alle loro velocità.

4 Moti rigidi in termini di coordinate

Considerando uno spazio euclideo di dimensione due dotato di un sistema di coordinate cartesiane indotte dalla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, in un moto rigido la rotazione può essere descritta nel seguente modo

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{e}_1 = \cos \theta(t)\mathbf{e}_1 + \sin \theta(t)\mathbf{e}_2, \quad (44)$$

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{e}_2 = -\sin \theta(t)\mathbf{e}_1 + \cos \theta(t)\mathbf{e}_2. \quad (45)$$

Alla relazione (10) corrisponde la seguente relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix} x_{1B}(t) \\ x_{2B}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1A}(t) \\ x_{2A}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{1B} - \bar{x}_{1A} \\ \bar{x}_{2B} - \bar{x}_{2A} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Derivando rispetto a t si ha

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1B}(t) \\ \dot{x}_{2B}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1A}(t) \\ \dot{x}_{2A}(t) \end{pmatrix} + \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) & -\cos \theta(t) \\ \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{1B} - \bar{x}_{1A} \\ \bar{x}_{2B} - \bar{x}_{2A} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Ricavando dalla (46) l'espressione

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_{1B} - \bar{x}_{1A} \\ \bar{x}_{2B} - \bar{x}_{2A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1B}(t) - x_{1A}(t) \\ x_{2B}(t) - x_{2A}(t) \end{pmatrix} \quad (48)$$

e sostituendola nella (47) si ottiene

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1B}(t) \\ \dot{x}_{2B}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1A}(t) \\ \dot{x}_{2A}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta}(t) \\ \dot{\theta}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1B}(t) - x_{1A}(t) \\ x_{2B}(t) - x_{2A}(t) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Questa è la relazione tra le componenti delle velocità corrispondente alla (17). La matrice che compare nella (49) è dunque la matrice di $\mathbf{W}(t)$.

In generale, in uno spazio euclideo di dimensione tre dotato di un sistema di coordinate cartesiane indotte dalla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, alla relazione (17) corrisponde la seguente relazione tra le componenti

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1B}(t) \\ \dot{x}_{2B}(t) \\ \dot{x}_{3B}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1A}(t) \\ \dot{x}_{2A}(t) \\ \dot{x}_{3A}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1B}(t) - x_{1A}(t) \\ x_{2B}(t) - x_{2A}(t) \\ x_{3B}(t) - x_{3A}(t) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

La matrice di \mathbf{W} è antisimmetrica poiché

$$\mathbf{W}^\top = -\mathbf{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_j. \quad (51)$$

5 Moti affini

Un moto si dice *affine* se, comunque si fissi t_0 , la descrizione del moto in termini di deformazioni (4) è tale che, per ogni coppia di punti $A, B \in \mathcal{B}$, risulta ad ogni istante t

$$\phi(\bar{\mathbf{p}}_B, t) = \phi(\bar{\mathbf{p}}_A, t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A), \quad (52)$$

essendo $\mathbf{F}(t)$ un tensore tale che $\det \mathbf{F}(t) > 0$. Un *moto affine* risulta pertanto definito dal moto di un punto qualsiasi del corpo, ad esempio A , e da \mathbf{F} . La espressione corrispondente per le velocità è

$$\dot{\phi}(\bar{\mathbf{p}}_B, t) = \dot{\phi}(\bar{\mathbf{p}}_A, t) + \dot{\mathbf{F}}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A). \quad (53)$$

Sostituendo alla (52) la espressione in termini di moto di ciascun punto

$$\mathbf{p}_B(t) = \mathbf{p}_A(t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathbf{p}}_B - \bar{\mathbf{p}}_A), \quad (54)$$

si ottiene per le velocità

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{p}_B(t_0) - \mathbf{p}_A(t_0)). \quad (55)$$

Essendo dalla (54)

$$\mathbf{p}_B(t_0) - \mathbf{p}_A(t_0) = \mathbf{F}(t)^{-1}(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)), \quad (56)$$

risulta

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)^{-1}(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (57)$$

Ponendo

$$\mathbf{L}(t) := \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)^{-1}, \quad (58)$$

la (57) si può scrivere

$$\dot{\mathbf{p}}_B(t) = \dot{\mathbf{p}}_A(t) + \mathbf{L}(t)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (59)$$

Considerando la deformazione da un istante t fissato ad un qualsiasi istante $t + \tau$

$$\phi_t(\mathbf{p}_B(t), \tau) = \phi_t(\mathbf{p}_A(t), \tau) + \mathbf{F}_t(\tau)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)), \quad (60)$$

si ha la seguente espressione per le velocità all'istante t è

$$\dot{\phi}_t(\mathbf{p}_B(t), 0) = \dot{\phi}_t(\mathbf{p}_A(t), 0) + \dot{\mathbf{F}}_t(0)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_A(t)). \quad (61)$$

Dal confronto con la (59) risulta

$$\mathbf{L}(t) = \dot{\mathbf{F}}_t(0)\mathbf{F}_t(0)^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_t(0). \quad (62)$$

Questa espressione permette di dare un'utile caratterizzazione di \mathbf{L} . Dalla decomposizione polare del gradiente della deformazione

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{U}_t(\tau) \quad (63)$$

si ottiene, derivando in $\tau = 0$,

$$\mathbf{L}(t) = \dot{\mathbf{F}}_t(0) = \dot{\mathbf{R}}_t(0)\mathbf{U}_t(0) + \mathbf{R}_t(0)\dot{\mathbf{U}}_t(0) = \dot{\mathbf{R}}_t(0) + \dot{\mathbf{U}}_t(0), \quad (64)$$

poiché $\mathbf{F}_t(0) = \mathbf{I}$ implica $\mathbf{R}_t(0) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U}_t(0) = \mathbf{I}$. Si noti che $\dot{\mathbf{R}}_t(0)$ è antisimmetrico e $\dot{\mathbf{U}}_t(0)$ è simmetrico. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t(\tau)^\top \mathbf{R}_t(\tau) = \mathbf{I} &\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_t(\tau)^\top \mathbf{R}_t(\tau) + \mathbf{R}_t(\tau)^\top \dot{\mathbf{R}}_t(\tau) = \mathbf{O} \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_t(0)^\top + \dot{\mathbf{R}}_t(0) = \mathbf{O}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_t(\tau)^\top = \dot{\mathbf{U}}_t(\tau) \Rightarrow \dot{\mathbf{U}}_t(0)^\top = \dot{\mathbf{U}}_t(0). \quad (66)$$

Esprimendo $\mathbf{L}(t)$ come somma della parte simmetrica e della parte antisimmetrica

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{D}(t) + \mathbf{W}(t), \quad (67)$$

con

$$\mathbf{D}(t) := \frac{1}{2}(\mathbf{L}(t) + \mathbf{L}(t)^\top), \quad \mathbf{W}(t) := \frac{1}{2}(\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}(t)^\top) \quad (68)$$

risulta dunque

$$\mathbf{D}(t) = \dot{\mathbf{U}}_t(0), \quad \mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{R}}_t(0). \quad (69)$$

Per questa ragione $\mathbf{D}(t)$ e $\mathbf{W}(t)$ sono dette rispettivamente *velocità di dilatazione* e *velocità angolare*.

Un *campo di velocità affine* è un campo di velocità in cui le velocità sono tali che valga la (59), essendo $\mathbf{L}(t)$ una qualsiasi applicazione lineare.

6 Gradiente della velocità

Nel caso di un generico moto ad ogni istante t è definita la deformazione

$$\phi(\cdot, t) : \bar{\mathcal{R}} \mapsto \mathcal{E}. \quad (70)$$

Si consideri una retta

$$\bar{\mathbf{c}}(h) = \bar{\mathbf{p}}_A + h \bar{\mathbf{d}} \quad (71)$$

e per ogni t la curva $\mathbf{c}(\cdot, t)$ tale che

$$\mathbf{c}(h, t) = \phi(\bar{\mathbf{c}}(h), t). \quad (72)$$

Il vettore tangente in $\mathbf{c}(0, t)$ è

$$\mathbf{d}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{c}(h, t) - \mathbf{c}(0, t)). \quad (73)$$

Ad ogni istante risulta pertanto definito, per ciascun punto A , il gradiente di $\phi(\cdot, t)$, come l'applicazione lineare

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{p}}_A, t) : \bar{\mathbf{d}} \mapsto \mathbf{d}(t), \quad (74)$$

che trasforma i vettori tangenti alle curve per $\bar{\mathbf{p}}_A$ nei vettori tangenti alle curve corrispondenti per $\mathbf{p}_A(t) = \phi(\bar{\mathbf{p}}_A, t)$.

All'istante t la velocità dei punti del corpo è descritta dalla funzione

$$\mathbf{v}_t : \mathbf{p}_A(t) \mapsto \dot{\mathbf{p}}_A(t). \quad (75)$$

che ha come dominio la forma del corpo all'istante t ed è detta *campo spaziale della velocità*. Il gradiente di tale campo vettoriale [v. APPENDICE 2] è quella applicazione lineare $\nabla \mathbf{v}_t$ tale che

$$\nabla \mathbf{v}_t \mathbf{d}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{v}_t(\mathbf{c}(h, t)) - \mathbf{v}_t(\mathbf{c}(0, t))) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\dot{\mathbf{c}}(h, t) - \dot{\mathbf{c}}(0, t)). \quad (76)$$

Poiché dalla (73) si ha

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\dot{\mathbf{c}}(h, t) - \dot{\mathbf{c}}(0, t)), \quad (77)$$

dalla (76) si ottiene

$$\nabla \mathbf{v}_t \mathbf{d}(t) = \dot{\mathbf{d}}(t). \quad (78)$$

Dalla (74) si ha anche

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\mathbf{d}(t + \tau) - \mathbf{d}(t)) = \dot{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{p}}_A, t) \bar{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{p}}_A, t) \mathbf{F}(\bar{\mathbf{p}}_A, t)^{-1} \mathbf{d}(t). \quad (79)$$

Sostituendo questa nella (78) risulta, omettendo gli argomenti,

$$\nabla \mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (80)$$

Considerando la deformazione da un istante t fissato ad un qualsiasi istante $t + \tau$

$$\phi_t(\cdot, \tau) : \mathbf{p}_A(t) \mapsto \mathbf{p}_A(t + \tau), \quad (81)$$

risulta definito, per ciascun punto A , il gradiente di $\phi_t(\cdot, \tau)$, come l'applicazione lineare

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{p}_A(t), \tau) : \mathbf{d}(t) \mapsto \mathbf{d}(t + \tau), \quad (82)$$

che trasforma i vettori tangenti alle curve per $\mathbf{p}_A(t)$ nei vettori tangenti alle curve corrispondenti per $\mathbf{p}_A(t + \tau)$. Al posto della (79) si ottiene

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\mathbf{d}(t + \tau) - \mathbf{d}(t)) = \dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{p}_A(t), t) \mathbf{d}(t) \quad (83)$$

risultando dunque

$$\nabla \mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{F}}_t. \quad (84)$$

7 Descrizione di campi di velocità affini

Si può illustrare il significato del gradiente della velocità nel seguente modo. In uno spazio di dimensione due si consideri ad un istante t un corpo a forma di quadrato. Fissata una base ortonormale adattata ai lati del quadrato, si indichi la matrice del gradiente della velocità con

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (85)$$

Il campo velocità è dato dalla espressione (59). Per un intervallo τ abbastanza piccolo il corpo assume la forma descritta dalla espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_B(t + \tau) &= \mathbf{p}_B(t) + \dot{\mathbf{p}}_B(t)\tau + \mathbf{o}(\tau) \\ &= \mathbf{p}_B(t) + (\dot{\mathbf{p}}_O(t) + \mathbf{L}(t)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_O(t)))\tau + \mathbf{o}(\tau) \end{aligned} \quad (86)$$

Assumendo nulla la velocità del centro $\mathbf{p}_O(t)$ si ha

$$\mathbf{p}_B(t + \tau) = \mathbf{p}_B(t) + \mathbf{L}(t)(\mathbf{p}_B(t) - \mathbf{p}_O(t))\tau + \mathbf{o}(\tau). \quad (87)$$

Nelle figure che seguono sono riportate le forme assunte dal quadrato corrispondenti alle seguenti matrici di $\mathbf{L}(t)$, disposte nello stesso ordine

Figura 1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Figura 3

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

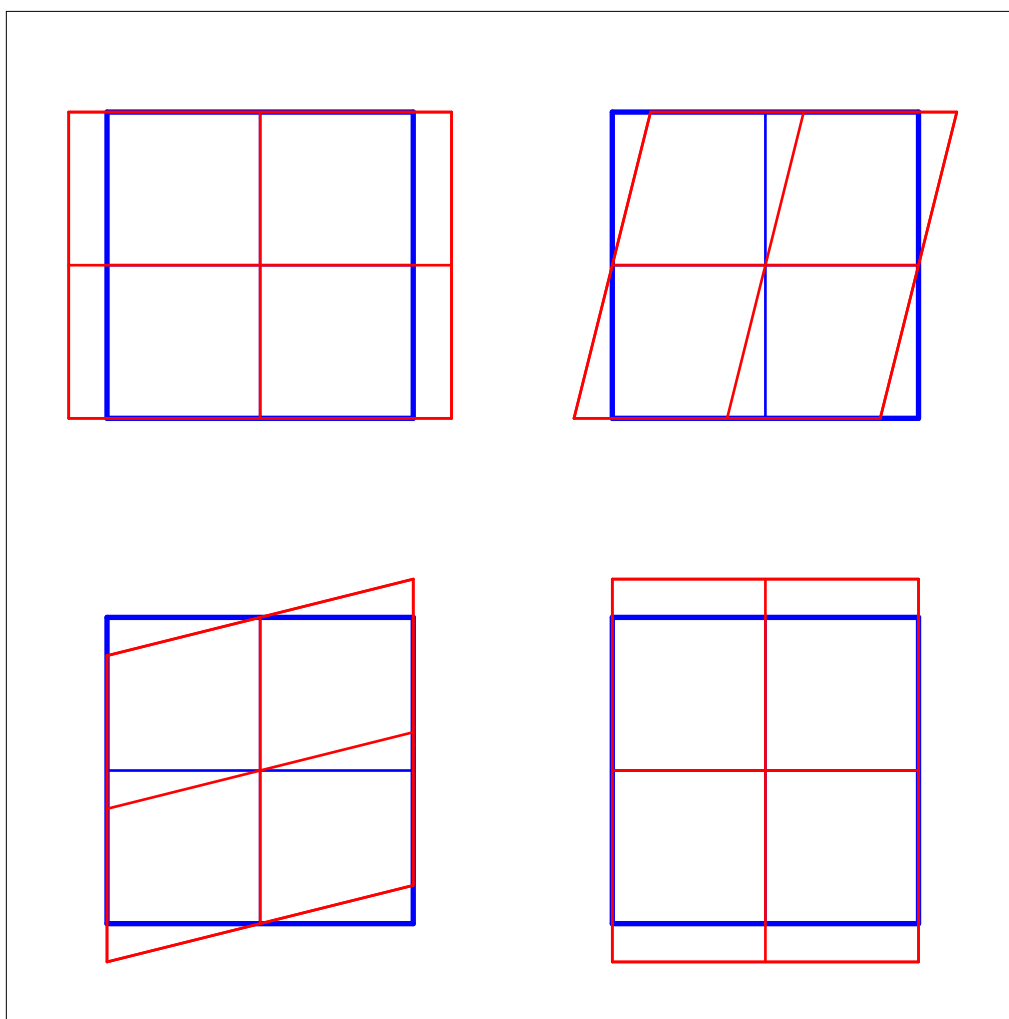


Figura 1: Gradiente del campo di velocità

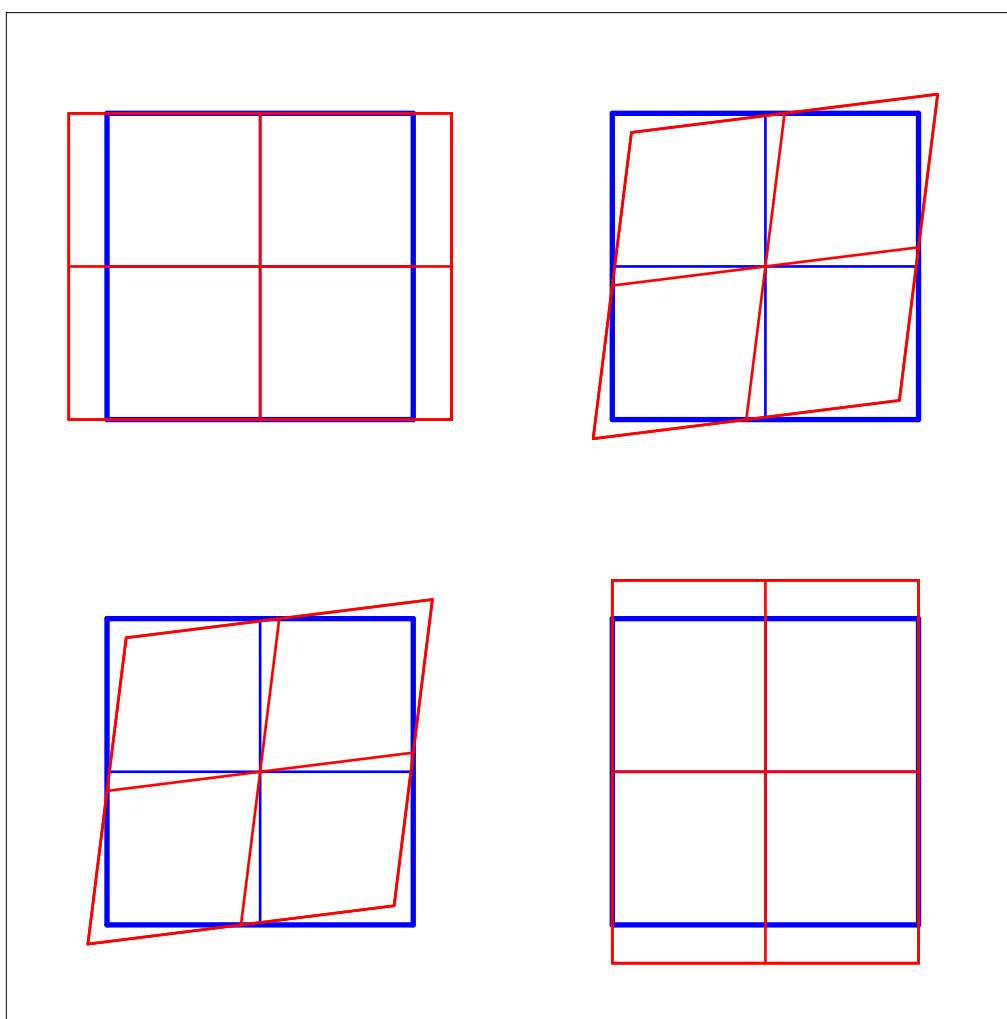


Figura 2: Gradiente del campo di velocità (parte simmetrica)

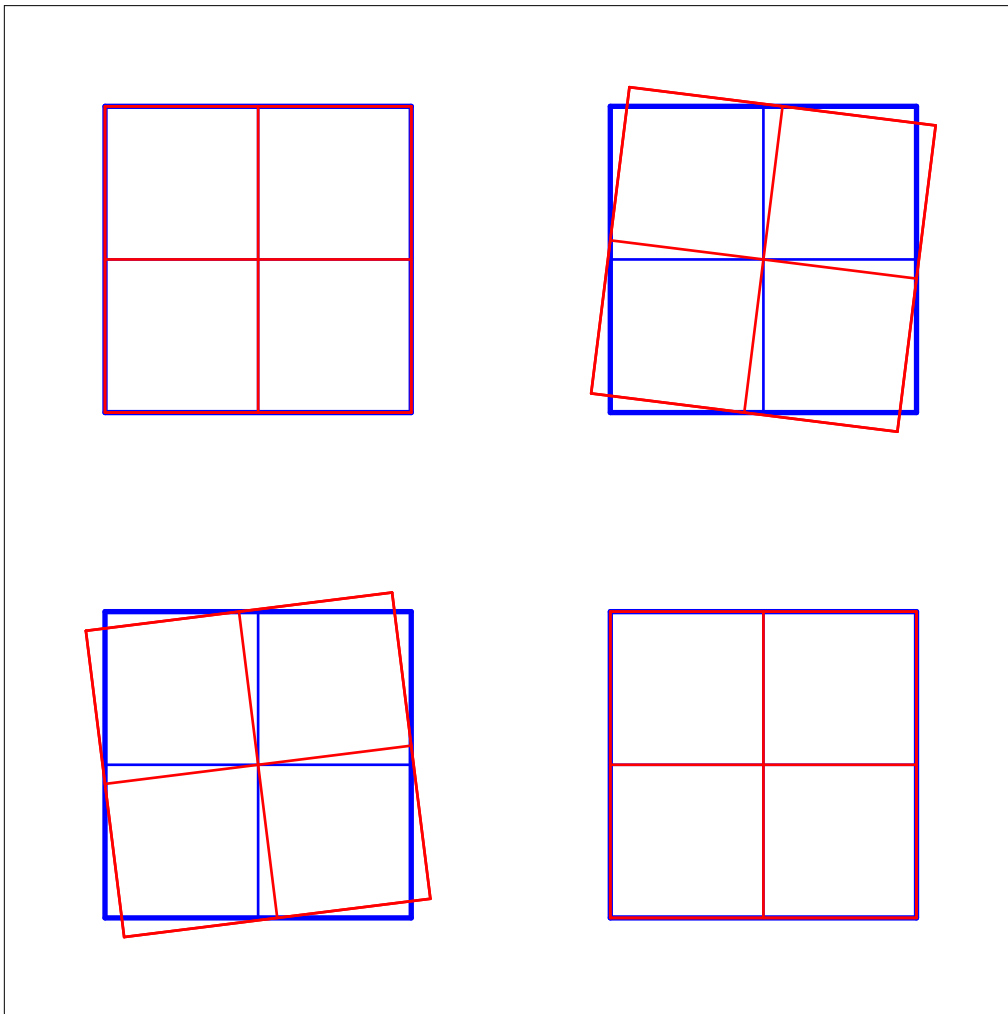


Figura 3: Gradiente del campo di velocità (parte antisimmetrica)