

Potenza, forze e momenti

Mais il y a aussi, au moins depuis d'Alambert, une deuxième voie possible, celle des puissances (ou travaux) virtuelles. Contrairement à ce que l'on croit parfois, cette deuxième manière est tout aussi naturelle que la première et elle ne fait que traduire une expérience physique très commune. Si on veut savoir si une valise est lourde, on essaie de la soulever un peu; pour apprécier la tension d'une courroie de transmission, on l'écarte quelque peu de sa position stable; et c'est en essayant de pousser une voiture que l'on se rendra compte des frottements tant externes qu'internes s'opposant au mouvement.

[...] L'idée essentielle de cette deuxième voie est celle de "dualité". Aussi cette voie est-elle non seulement très proche de l'expérience la plus commune comme nous l'avons déjà noté, mais aussi très souple; selon que l'on choisira un espace vectoriel plus ou moins "vaste", on aura une description des efforts plus ou moins fine.

[Germain, P., La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Première partie: Théorie du second gradient, *Journal de Mécanique*, 12 (1973), pp. 235–274.]

Indice

1	Potenza	2
2	Potenza in un campo di velocità test rigido	2
2.1	Forze e momenti	2
2.2	Vettore momento e parte antisimmetrica del tensore momento	4
3	Potenza in un campo di velocità test affine	4
3.1	Forze e momenti	4
3.2	Momento rispetto ad un altro polo	5
4	Distribuzioni di forze equivalenti	6
4.1	Forze applicate al centro delle facce di un parallelepipedo rettangolo	6
4.2	Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo rettangolo	6
4.3	Decomposizione di una distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo rettangolo	8
4.4	Distribuzione di forza sulle facce di un prisma con sezione triangolare	10
4.5	Forze applicate al centro delle facce di un parallelepipedo	10
4.6	Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo	12
4.7	Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo deformato	13
4.8	Matrice del cofattore	15
5	Tensore momento e classi di equivalenza	16
6	Tensore momento antisimmetrico	17
7	Tensore momento simmetrico	18

1 Potenza

Si consideri un corpo, i cui punti siano identificati dagli elementi dell'insieme $\mathcal{B} := \{A, B\}$, e un suo posizionamento

$$\mathbf{p} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}. \quad (1)$$

Il modo più semplice per descrivere la *interazione meccanica* del corpo con l'ambiente esterno consiste nell'assegnare una funzione lineare $\mathcal{W}^{(ext)}$ detta *potenza esterna* che, in corrispondenza del posizionamento \mathbf{p} , trasforma un qualsiasi campo di velocità in uno scalare.

La scelta dello spazio dei campi di velocità da prendere in considerazione nella valutazione della potenza (*campi di velocità test*), svolge un ruolo cruciale nella definizione di un *modello* di corpo.

Se in un campo di velocità test le velocità in corrispondenza di \mathbf{p}_A e \mathbf{p}_B si indicano con

$$\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B \quad (2)$$

la potenza ammette un'unica rappresentazione nella forma

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) = \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{v}_B. \quad (3)$$

I vettori $\mathbf{f}_A, \mathbf{f}_B$ si dicono *forze esterne* applicate rispettivamente ai punti A, B .

Il caso che ha qui maggiore interesse è quello in cui \mathcal{B} e \mathbf{p} sono tali che l'insieme $\text{im } \mathbf{p}$ (la *forma* del corpo) è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ chiusura di un sottoinsieme aperto. In un campo di velocità test la velocità dei punti del corpo è descritta da una funzione

$$\mathbf{v} : \mathcal{p}_A \mapsto \mathbf{v}_A, \quad (4)$$

che ha come dominio \mathcal{R} . La *potenza esterna* ha in generale la seguente rappresentazione

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA. \quad (5)$$

I campi vettoriali \mathbf{b} e \mathbf{t} , rispettivamente su \mathcal{R} e $\partial\mathcal{R}$, si dicono *distribuzione di forza di volume e distribuzione di forza superficiale (o di contatto)*.

2 Potenza in un campo di velocità test rigido

2.1 Forze e momenti

In un campo di velocità test rigido le velocità dei punti del corpo \mathcal{B} sono tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \mathbf{W}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O), \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_O + \mathbf{W}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O). \end{aligned} \quad (6)$$

Pertanto la potenza esterna (3) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) &= \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{v}_B \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{W}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{W}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{W} + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{W} \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + ((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (7)$$

Usando il vettore assiale di \mathbf{W} le (6) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O), \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O), \end{aligned} \quad (8)$$

da cui deriva la seguente espressione della potenza

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) = (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + ((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{f}_B) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

Il termine che moltiplica \mathbf{v}_O

$$\mathbf{f} := \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B \quad (10)$$

si chiama *forza risultante*, il termine che moltiplica $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{p}_O} := (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{f}_B \quad (11)$$

si chiama *vettore momento risultante rispetto a \mathbf{p}_O* . Il termine che moltiplica \mathbf{W}

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} := (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B \quad (12)$$

si chiama *tensore momento risultante rispetto a \mathbf{p}_O* .

Si noti che la (7), essendo \mathbf{W} antisimmetrico, si può anche scrivere

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) = (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + \text{skw}((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W}. \quad (13)$$

Per un corpo \mathcal{B} di forma \mathcal{R} , in un campo di velocità test rigido le velocità possono essere descritte dalla funzione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (14)$$

La potenza esterna (5) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA \\ &= \left(\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{v}_O + \left(\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (15)$$

In questo caso la forza risultante e il tensore momento risultante sono

$$\mathbf{f} := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} dA, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{t} dA, \quad (17)$$

e la (15) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} \cdot \mathbf{W}. \quad (18)$$

In alternativa, utilizzando il vettore assiale di \mathbf{W} si ottiene il vettore momento risultante

$$\mathbf{m}_{\mathbf{p}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \times \mathbf{t} dA. \quad (19)$$

Corrispondentemente la (15) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{m}_{\mathbf{p}_O} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (20)$$

2.2 Vettore momento e parte antisimmetrica del tensore momento

Si osservi che il *vettore momento* è il vettore assiale di $2 \operatorname{skw} \mathbf{M}$. Infatti per la uguaglianza delle (18) e (20) deve essere

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (21)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore assiale di \mathbf{W} . Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (m_{32} - m_{23})\omega_1 + (m_{13} - m_{31})\omega_2 + (m_{21} - m_{12})\omega_3, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{skw} \mathbf{M} \cdot \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & m_{12} - m_{21} & m_{13} - m_{31} \\ m_{21} - m_{12} & 0 & m_{23} - m_{32} \\ m_{31} - m_{13} & m_{32} - m_{23} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (m_{32} - m_{23})\omega_1 + (m_{13} - m_{31})\omega_2 + (m_{21} - m_{12})\omega_3, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} &= (m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3) \cdot (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \\ &= m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3, \end{aligned} \quad (24)$$

le componenti di \mathbf{m} risultano tali che

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{32} - m_{23}, \\ m_2 &= m_{13} - m_{31}, \\ m_3 &= m_{21} - m_{12}, \end{aligned} \quad (25)$$

e dunque uguali rispettivamente agli elementi (3, 2), (1, 3) e (2, 1) della matrice di $\mathbf{M} - \mathbf{M}^T = 2 \operatorname{skw} \mathbf{M}$.

3 Potenza in un campo di velocità test affine

3.1 Forze e momenti

In un campo di velocità test affine le velocità dei punti del corpo \mathcal{B} sono tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O), \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O). \end{aligned} \quad (26)$$

Pertanto la potenza esterna diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B) &= \mathbf{f}_A \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{v}_B \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + (\mathbf{f}_A \cdot \mathbf{L}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) + \mathbf{f}_B \cdot \mathbf{L}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O)) \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + ((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{L} \\ &= (\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{v}_O + \operatorname{skw}((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{W} \\ &\quad + \operatorname{sym}((\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B) \cdot \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (27)$$

In questo caso si dice *tensore momento risultante* il termine che moltiplica \mathbf{L}

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} := (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B. \quad (28)$$

Distinguendo il termine che moltiplica \mathbf{W} , la parte antisimmetrica di \mathbf{L} , dal termine che moltiplica \mathbf{D} , la parte simmetrica di \mathbf{L} , si dirà il primo *momento antisimmetrico* risultante e il secondo *momento simmetrico* risultante, rispetto a \mathbf{p}_O .

Per un corpo \mathcal{B} di forma \mathcal{R} , in un campo di velocità test affine le velocità possono essere descritte dalla funzione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (29)$$

La potenza esterna (5) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dA \\ &= \left(\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{v}_O + \left(\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{t} dA \right) \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (30)$$

La forza risultante e il tensore momento risultante sono

$$\mathbf{f} := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} dA, \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} := \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{t} dA \quad (32)$$

e la (30) si scrive

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} \cdot \mathbf{L}. \quad (33)$$

3.2 Momento rispetto ad un altro polo

Si consideri una diversa descrizione del campo di velocità test (29)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_C + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_C), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}. \quad (34)$$

Essendo

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_O) \quad (35)$$

risulta

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_O) + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_C) = \mathbf{v}_O + \mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_O). \quad (36)$$

Ne deriva, attraverso la (30), la seguente relazione tra il tensore momento rispetto a \mathbf{p}_C e il tensore momento rispetto a \mathbf{p}_O

$$\begin{aligned} &(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_O) \otimes \left(\int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} dA \right) + \left(\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_C) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_C) \otimes \mathbf{t} dA \right) \\ &= \left(\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{t} dA \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Indicando con \mathbf{f} la forza risultante, con $\mathbf{M}_{\mathbf{p}_O}$ il tensore momento risultante rispetto a \mathbf{p}_O e con $\mathbf{M}_{\mathbf{p}_C}$ il tensore momento risultante rispetto a \mathbf{p}_C , dalla espressione precedente si ha

$$(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f} + \mathbf{M}_{\mathbf{p}_C} = \mathbf{M}_{\mathbf{p}_O}. \quad (38)$$

Si noti che se la forza risultante è nulla il tensore momento non dipende dal polo.

4 Distribuzioni di forze equivalenti

Si dicono *equivalenti* quei sistemi di forze che spendono uguale potenza per qualunque atto di moto test. Sono dunque equivalenti rispetto a campi di velocità test rigidi quei sistemi di forze che hanno la stessa forza risultante e lo stesso tensore momento (antisimmetrico) risultante. Sono invece equivalenti rispetto a campi di velocità test affini quei sistemi di forze che hanno la stessa forza risultante e lo stesso tensore momento (sia antisimmetrico che simmetrico) risultante. Si noti che due sistemi di forze che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo hanno, per la (38), lo stesso momento risultante rispetto a qualsiasi polo.

4.1 Forze applicate al centro delle facce di un parallelepipedo rettangolo

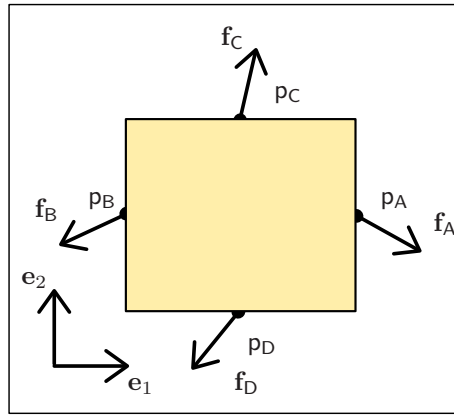


Figura 1: Corpo soggetto a forze applicate al centro delle facce.

Si consideri un corpo a forma di parallelepipedo rettangolo, con spigoli di lunghezza l_1 , l_2 , l_3 , con forze applicate al centro delle facce normali a \mathbf{e}_1 e a \mathbf{e}_2 , come in fig. 1. La forza risultante è

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_D. \quad (39)$$

Il tensore momento risultante, scegliendo \mathbf{p}_O al centro del parallelepipedo, è

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_O} &= (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_A + (\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_B + (\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_C + (\mathbf{p}_D - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{f}_D \\ &= l_1 \mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{f}_A - \mathbf{f}_B) + l_2 \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{f}_C - \mathbf{f}_D). \end{aligned} \quad (40)$$

4.2 Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo rettangolo

Si consideri la distribuzione di forze in fig. 2, costituita da una distribuzione uniforme di forza sulle facce ortogonali a \mathbf{e}_1 e a \mathbf{e}_2 . Si osservi che il baricentro $\mathbf{c}_{\mathcal{F}}$ di una faccia \mathcal{F} è definito dalla proprietà

$$(\mathbf{c}_{\mathcal{F}} - \mathbf{p}_O) A_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) dA, \quad (41)$$

essendo $A_{\mathcal{F}}$ l'area della faccia \mathcal{F} e \mathbf{p}_O una posizione arbitraria, anche non appartenente a \mathcal{F} . Poiché i baricentri di facce rettangolari sono i loro centri, utilizzando come polo il centro del parallelepipedo,

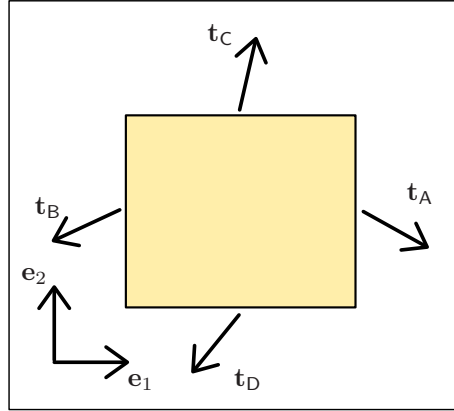


Figura 2: Corpo soggetto a una distribuzione di forza uniforme sulle facce.

si ottiene per la distribuzione di forze sulle facce \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_{-1}

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_A dA + \int_{\mathcal{F}_{-1}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_B dA \\ &= A_{\mathcal{F}_1} \left(\frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 \right) \otimes \mathbf{t}_A + A_{\mathcal{F}_{-1}} \left(-\frac{\ell_1}{2} \mathbf{e}_1 \right) \otimes \mathbf{t}_B = \frac{\ell_1}{2} A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B) \end{aligned} \quad (42)$$

e per la distribuzione di forze sulle facce \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_{-2}

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_2} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_C dA + \int_{\mathcal{F}_{-2}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_D dA \\ &= A_{\mathcal{F}_2} \left(\frac{\ell_2}{2} \mathbf{e}_2 \right) \otimes \mathbf{t}_C + A_{\mathcal{F}_{-2}} \left(-\frac{\ell_2}{2} \mathbf{e}_2 \right) \otimes \mathbf{t}_D = \frac{\ell_2}{2} A_{\mathcal{F}_2} \mathbf{e}_2 \otimes (\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D). \end{aligned} \quad (43)$$

Utilizzando la funzione area indotta dalla funzione volume (v. APPENDICE 2), si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}_1} dA &= A_{\mathcal{F}_1} = \text{vol}(\ell_2 \mathbf{e}_2, \ell_3 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{\ell_1} \text{vol}(\ell_2 \mathbf{e}_2, \ell_3 \mathbf{e}_3, \ell_1 \mathbf{e}_1) = \frac{1}{\ell_1} V_{\mathcal{R}}, \\ \int_{\mathcal{F}_2} dA &= A_{\mathcal{F}_2} = \text{vol}(\ell_3 \mathbf{e}_3, \ell_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\ell_2} \text{vol}(\ell_3 \mathbf{e}_3, \ell_1 \mathbf{e}_1, \ell_2 \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\ell_2} V_{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (44)$$

essendo \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 le normali alle facce \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Pertanto il tensore momento risulta

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} = V_{\mathcal{R}} \left(\mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_B) + \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2} (\mathbf{t}_C - \mathbf{t}_D) \right) \quad (45)$$

e la forza risultante

$$\mathbf{f} = A_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B) + A_{\mathcal{F}_2} (\mathbf{t}_C + \mathbf{t}_D). \quad (46)$$

Si noti che scegliendo

$$\mathbf{t}_A = \frac{\mathbf{f}_A}{A_{\mathcal{F}_1}}, \quad \mathbf{t}_B = \frac{\mathbf{f}_B}{A_{\mathcal{F}_1}}, \quad \mathbf{t}_C = \frac{\mathbf{f}_C}{A_{\mathcal{F}_2}}, \quad \mathbf{t}_D = \frac{\mathbf{f}_D}{A_{\mathcal{F}_2}}, \quad (47)$$

la distribuzione di forze esaminata risulta nella stessa classe di equivalenza della precedente.

4.3 Decomposizione di una distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo rettangolo

Si consideri di nuovo la distribuzione di forze in fig. 2 cambiando i nomi come in fig. 3 ed estendendola alle facce ortogonali a \mathbf{e}_3 . Si consideri poi la distribuzione di forze in fig. 4 costituita da una distribuzione di forza sul bordo, uniforme su ciascuna faccia e opposta su facce opposte, definita da

$$\mathbf{t}_1 := \frac{1}{2}(\mathbf{t}_1^+ + \mathbf{t}_1^-), \quad \mathbf{t}_2 := \frac{1}{2}(\mathbf{t}_2^+ + \mathbf{t}_2^-), \quad \mathbf{t}_3 := \frac{1}{2}(\mathbf{t}_3^+ + \mathbf{t}_3^-), \quad (48)$$

L'espressione del tensore momento risulta, dal caso descritto in fig. 2,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} &= V_{\mathcal{R}} \left(\mathbf{e}_1 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{t}_1^+ + \mathbf{t}_1^-) + \mathbf{e}_2 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{t}_2^+ + \mathbf{t}_2^-) + \mathbf{e}_3 \otimes \frac{1}{2}(\mathbf{t}_3^+ + \mathbf{t}_3^-) \right) \\ &= V_{\mathcal{R}} \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \right), \end{aligned} \quad (49)$$

avendo scelto anche in questo caso il centro del parallelepipedo come polo. Si noti che dalla (49) deriva la seguente proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_1 &= V_{\mathcal{R}} \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_2 &= V_{\mathcal{R}} \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_3 &= V_{\mathcal{R}} \mathbf{t}_3. \end{aligned} \quad (50)$$

Corrispondentemente per la matrice del tensore momento si ha

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}] = V_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

avendo posto

$$\mathbf{t}_1 = t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + t_{31}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{t}_2 = t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + t_{32}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{t}_3 = t_{13}\mathbf{e}_1 + t_{23}\mathbf{e}_2 + t_{33}\mathbf{e}_3. \quad (52)$$

Ponendo inoltre

$$\mathbf{t}'_1 := \frac{1}{\ell_1}(\mathbf{t}_1^+ - \mathbf{t}_1^-), \quad \mathbf{t}'_2 := \frac{1}{\ell_2}(\mathbf{t}_2^+ - \mathbf{t}_2^-), \quad \mathbf{t}'_3 := \frac{1}{\ell_3}(\mathbf{t}_3^+ - \mathbf{t}_3^-), \quad (53)$$

si ottiene la decomposizione

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1^+ &= \mathbf{t}_1 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{t}'_1, & \mathbf{t}_1^- &= \mathbf{t}_1 - \frac{\ell_1}{2}\mathbf{t}'_1, \\ \mathbf{t}_2^+ &= \mathbf{t}_2 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{t}'_2, & \mathbf{t}_2^- &= \mathbf{t}_2 - \frac{\ell_2}{2}\mathbf{t}'_2, \\ \mathbf{t}_3^+ &= \mathbf{t}_3 + \frac{\ell_3}{2}\mathbf{t}'_3, & \mathbf{t}_3^- &= \mathbf{t}_3 - \frac{\ell_3}{2}\mathbf{t}'_3. \end{aligned} \quad (54)$$

Poichè la forza risultante è

$$\mathbf{f} = V_{\mathcal{R}}(\mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}'_2 + \mathbf{t}'_3), \quad (55)$$

si può definire la distribuzione uniforme di forza di volume

$$\mathbf{t}' := \mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}'_2 + \mathbf{t}'_3 \quad (56)$$

che ha risultante \mathbf{f} e momento nullo rispetto a \mathbf{p}_0 , centro del parallelepipedo. Infatti risulta

$$\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}' dV = V_{\mathcal{R}}(\mathbf{c}_{\mathcal{R}} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}' = \mathbf{O}, \quad (57)$$

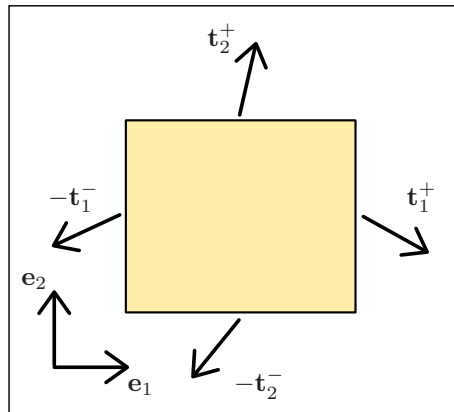


Figura 3: Corpo soggetto a una distribuzione di forza uniforme sulle facce.

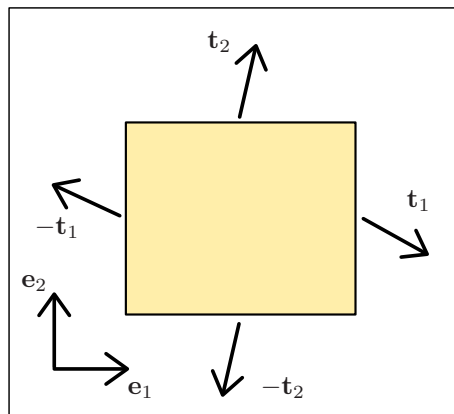


Figura 4: Corpo soggetto a una distribuzione di forza uniforme sulle facce, con valori opposti su facce opposte.

poichè il baricentro $\mathbf{c}_{\mathcal{R}}$ definito dalla proprietà

$$(\mathbf{c}_{\mathcal{R}} - \mathbf{p}_0)V_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) dV. \quad (58)$$

coincide con il centro del parallelepipedo \mathbf{p}_0 . Pertanto una distribuzione di forze costituita da una distribuzione uniforme di forze di volume \mathbf{t}' data dalla (56) e da una distribuzione di forze superficiali descritta da

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{t}_3 &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (59)$$

con $\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}$ dato dalla (49), appartiene alla stessa classe di equivalenza della distribuzione di forze in fig. 3.

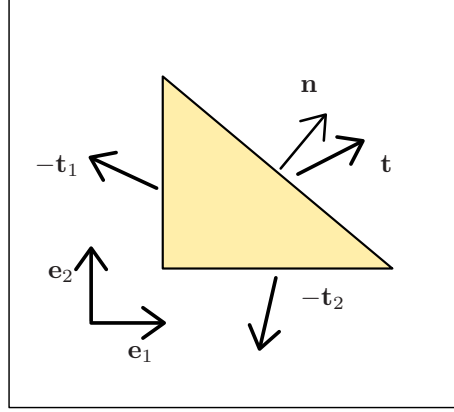


Figura 5: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo.

4.4 Distribuzione di forza sulle facce di un prisma con sezione triangolare

Si consideri il corpo in fig. 5 a forma di prisma con sezione triangolare, con spigoli di lunghezza ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , soggetto ad una distribuzione di forza uniforme sulle facce \mathcal{F}_{-1} , \mathcal{F}_{-2} e sulla faccia inclinata \mathcal{F} tale che

$$A_{\mathcal{F}} \mathbf{t} - A_{\mathcal{F}_{-1}} \mathbf{t}_1 - A_{\mathcal{F}_{-2}} \mathbf{t}_2 = \mathbf{o}. \quad (60)$$

Ne deriva

$$\ell_3 L \mathbf{t} - \ell_3 \ell_2 \mathbf{t}_1 - \ell_3 \ell_1 \mathbf{t}_2 = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t} = \frac{1}{L} (\ell_2 \mathbf{t}_1 + \ell_1 \mathbf{t}_2), \quad (61)$$

con $L := \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}$. Scegliendo come polo \mathbf{p}_0 il centro della faccia inclinata, il tensore momento ha l'espressione

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} = -\frac{\ell_1}{2} \ell_2 \ell_3 \mathbf{e}_1 \otimes (-\mathbf{t}_1) - \frac{\ell_2}{2} \ell_1 \ell_3 \mathbf{e}_2 \otimes (-\mathbf{t}_2) = V_{\mathcal{R}} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{t}_2) \quad (62)$$

Si osservi che risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{t} &= \frac{1}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{M}_{\mathbf{p}_0} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (63)$$

essendo

$$\mathbf{n} := \frac{1}{L} (\ell_2 \mathbf{e}_1 + \ell_1 \mathbf{e}_2) \quad (64)$$

la normale esterna unitaria alla faccia inclinata.

4.5 Forze applicate al centro delle facce di un parallelepipedo

Si consideri un parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con forze $\mathbf{f}_1, -\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, -\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, -\mathbf{f}_3$ applicate al centro delle facce e opposte su facce opposte, come in fig. 6. La forza risultante è nulla e il tensore

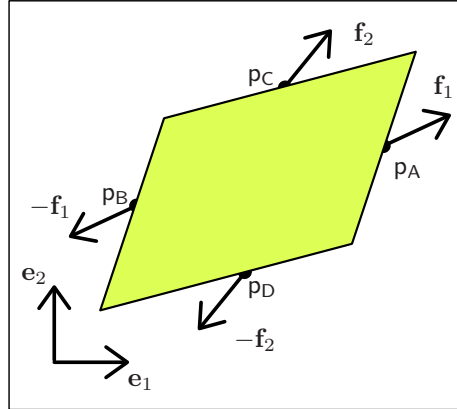


Figura 6: Corpo a forma di parallelepipedo soggetto a forze applicate al centro delle facce.

momento risultante è

$$\mathbf{M} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{f}_3. \quad (65)$$

Indicando con $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ i vettori normali unitari alle facce del parallelepipedo, si esprima ad esempio \mathbf{n}_1 come combinazione lineare dei vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$

$$\mathbf{n}_1 = \nu_{11}\mathbf{u}_1 + \nu_{21}\mathbf{u}_2 + \nu_{31}\mathbf{u}_3. \quad (66)$$

Questa combinazione lineare si può trasformare, dividendo per ν_{11} , nella seguente

$$\mathbf{u}_1 = h_1\mathbf{n}_1 + \alpha_{21}\mathbf{u}_2 + \alpha_{31}\mathbf{u}_3. \quad (67)$$

Si osservi che, essendo il vettore \mathbf{n}_1 unitario e ortogonale a \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 , si ha

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = (h_1\mathbf{n}_1 + \alpha_{21}\mathbf{u}_2 + \alpha_{31}\mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{n}_1 = h_1. \quad (68)$$

Inoltre, per le proprietà del volume e dell'area,

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}} &= \text{vol}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1) = \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, h_1\mathbf{n}_1 + \alpha_{21}\mathbf{u}_2 + \alpha_{31}\mathbf{u}_3) \\ &= \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, h_1\mathbf{n}_1) = h_1 \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{n}_1) = h_1 A_{\mathcal{F}_1} \\ \Rightarrow h_1 &= \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}. \end{aligned} \quad (69)$$

Notare che h_1 non è altro che l'altezza del parallelepipedo rispetto alla faccia \mathcal{F}_1 . Riassumendo:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}, \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = 0. \quad (70)$$

Dall'espressione del tensore momento si ha pertanto

$$\mathbf{M}\mathbf{n}_1 = (\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{f}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{f}_2 + \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{f}_3)\mathbf{n}_1 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1)\mathbf{f}_1 = \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}\mathbf{f}_1 \quad (71)$$

e infine

$$\frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}}\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{A_{\mathcal{F}_1}}. \quad (72)$$

Analoghe espressioni si ottengono applicando \mathbf{M} a \mathbf{n}_2 e \mathbf{n}_3 .

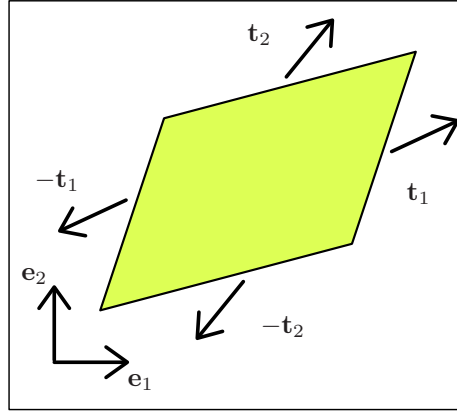


Figura 7: Corpo a forma di parallelepipedo soggetto a una distribuzione di forza uniforme sulle facce, con valori opposti su facce opposte.

4.6 Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo

Si consideri un parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con distribuzioni uniformi di forze opposte $\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, -\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, -\mathbf{t}_3$ applicate rispettivamente alle facce opposte, come in fig. 7. La forza risultante è nulla e il tensore momento risultante è

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_1 dA + \int_{\mathcal{F}_{-1}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_1) dA \\
 &+ \int_{\mathcal{F}_2} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_2 dA + \int_{\mathcal{F}_{-2}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_2) dA \\
 &+ \int_{\mathcal{F}_3} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_3 dA + \int_{\mathcal{F}_{-3}} (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_3) dA \\
 &= (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_1} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_1 A_{\mathcal{F}_1} + (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_{-1}} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_1) A_{\mathcal{F}_{-1}} \\
 &+ (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_2} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_2 A_{\mathcal{F}_2} + (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_{-2}} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_2) A_{\mathcal{F}_{-2}} \\
 &+ (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_3} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{t}_3 A_{\mathcal{F}_3} + (\mathbf{c}_{\mathcal{F}_{-3}} - \mathbf{p}_0) \otimes (-\mathbf{t}_3) A_{\mathcal{F}_{-3}} \\
 &= A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + A_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + A_{\mathcal{F}_3} \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{t}_3
 \end{aligned} \tag{73}$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}_1} dA &= A_{\mathcal{F}_1} = \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{n}_1), \\
 \int_{\mathcal{F}_2} dA &= A_{\mathcal{F}_2} = \text{vol}(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{n}_2), \\
 \int_{\mathcal{F}_3} dA &= A_{\mathcal{F}_3} = \text{vol}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{n}_3),
 \end{aligned} \tag{74}$$

con $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ le normali esterne unitarie alle facce $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ e \mathcal{F}_3 . Utilizzando le (70) si ha

$$\mathbf{M} \mathbf{n}_1 = (A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + A_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + A_{\mathcal{F}_3} \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \mathbf{n}_1 = (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{t}_1 = V_{\mathcal{R}} \mathbf{t}_1 \tag{75}$$

e infine

$$\frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{n}_1 = \mathbf{t}_1. \tag{76}$$

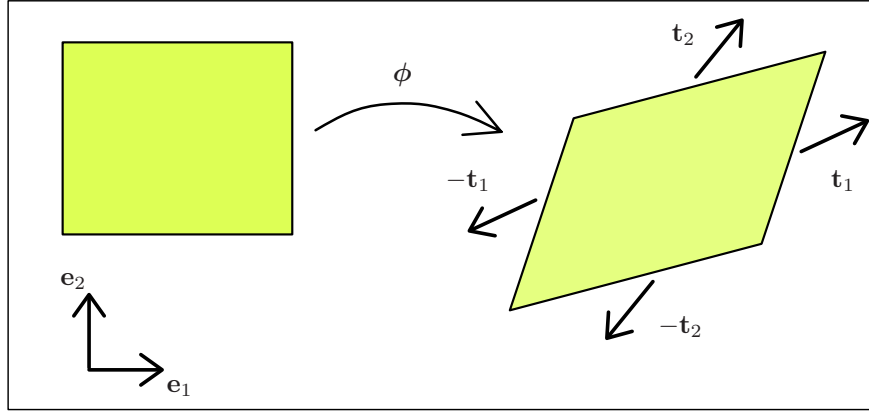


Figura 8: Corpo deformato soggetto a una distribuzione di forza uniforme sulle facce, con valori opposti su facce opposte.

Analoghe espressioni si ottengono applicando \mathbf{M} a \mathbf{n}_2 e a \mathbf{n}_3 . Si noti che i vettori $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ non sono in generale ortogonali tra loro, come non lo sono i vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

4.7 Distribuzione di forza sulle facce di un parallelepipedo deformato

Si consideri il parallelepipedo di spigoli $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ del paragrafo precedente, con distribuzioni uniformi di forze opposte $\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, -\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, -\mathbf{t}_3$ applicate rispettivamente alle facce opposte, ottenuto attraverso una deformazione affine con gradiente \mathbf{F} di un parallelepipedo di spigoli $\{\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$, come in fig. 8. Come già visto la forza risultante è nulla. L'espressione del tensore momento (73) si può trasformare nel modo seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + A_{\mathcal{F}_2} \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + A_{\mathcal{F}_3} \mathbf{u}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \\ &= A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + A_{\mathcal{F}_2} \mathbf{F} \bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{t}_2 + A_{\mathcal{F}_3} \mathbf{F} \bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \mathbf{t}_3 \\ &= A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{t}_1) \mathbf{F}^\top + A_{\mathcal{F}_2} (\bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{t}_2) \mathbf{F}^\top + A_{\mathcal{F}_3} (\bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \mathbf{F}^\top \end{aligned} \quad (77)$$

Indicando con $\{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3\}$ le normali esterne unitarie alle facce $\bar{\mathcal{F}}_1, \bar{\mathcal{F}}_2$ e $\bar{\mathcal{F}}_3$ del parallelepipedo $\{\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$, si consideri la combinazione lineare

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{h}_1 \bar{\mathbf{n}}_1 + \bar{\alpha}_{21} \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\alpha}_{31} \bar{\mathbf{u}}_3. \quad (78)$$

Essendo il vettore $\bar{\mathbf{n}}_1$ unitario e ortogonale a $\bar{\mathbf{u}}_2$ e $\bar{\mathbf{u}}_3$, si ha

$$\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = (\bar{h}_1 \bar{\mathbf{n}}_1 + \bar{\alpha}_{21} \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\alpha}_{31} \bar{\mathbf{u}}_3) \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{h}_1. \quad (79)$$

Inoltre, per le proprietà del volume e dell'area,

$$\begin{aligned} V_{\bar{\mathcal{R}}} &= \text{vol}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3) = \text{vol}(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3, \bar{\mathbf{u}}_1) = \text{vol}(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3, \bar{h}_1 \bar{\mathbf{n}}_1 + \bar{\alpha}_{21} \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\alpha}_{31} \bar{\mathbf{u}}_3) \\ &= \text{vol}(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3, \bar{h}_1 \bar{\mathbf{n}}_1) = \bar{h}_1 \text{vol}(\bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3, \bar{\mathbf{n}}_1) = \bar{h}_1 A_{\bar{\mathcal{F}}_1} \\ \Rightarrow \quad \bar{h}_1 &= \frac{V_{\bar{\mathcal{R}}}}{A_{\bar{\mathcal{F}}_1}}. \end{aligned} \quad (80)$$

Riassumendo

$$\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \frac{V_{\bar{\mathcal{R}}}}{A_{\bar{\mathcal{F}}_1}}, \quad \bar{\mathbf{u}}_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}_3 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = 0. \quad (81)$$

Trasformando le espressioni precedenti nelle

$$\bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}_1 = \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}, \quad \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u}_3 = 0, \quad (82)$$

$$(\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}, \quad (\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad (\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0, \quad (83)$$

si può osservare che il vettore $(\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1$ è ortogonale sia a \mathbf{u}_2 che a \mathbf{u}_3 come lo è \mathbf{n}_1 . Si può pertanto porre

$$(\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 = \tilde{k}_1 \mathbf{n}_1. \quad (84)$$

Ne deriva che

$$(\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \tilde{k}_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \quad (85)$$

e, per le (83) e (70),

$$\frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}} = \tilde{k}_1 \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}}. \quad (86)$$

Risulta dunque

$$\tilde{k}_1 = \frac{V_{\mathcal{R}}}{V_{\mathcal{R}}} \frac{A_{\mathcal{F}_1}}{A_{\mathcal{F}_1}} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{A_{\mathcal{F}_1}}{A_{\mathcal{F}_1}}. \quad (87)$$

Ponendo

$$k_1 := \frac{A_{\mathcal{F}_1}}{A_{\mathcal{F}_1}} \quad (88)$$

la (84) si scrive

$$(\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^{-1})^T \bar{\mathbf{n}}_1 = k_1 \mathbf{n}_1. \quad (89)$$

Si dice *cofattore* di \mathbf{F} il tensore

$$\text{cof } \mathbf{F} := (\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (90)$$

Essendo \mathbf{n}_1 unitario, il rapporto tra le aree k_1 si può calcolare come

$$k_1 = \|(\text{cof } \mathbf{F}) \bar{\mathbf{n}}_1\|, \quad (91)$$

mentre il vettore \mathbf{n}_1 si ottiene come

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\text{cof } \mathbf{F}}{\|(\text{cof } \mathbf{F}) \bar{\mathbf{n}}_1\|} \bar{\mathbf{n}}_1. \quad (92)$$

L'espressione (77) del tensore momento si può trasformare nella seguente

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}^T)^{-1} = A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{t}_1) + A_{\mathcal{F}_2} (\bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{t}_2) + A_{\mathcal{F}_3} (\bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \mathbf{t}_3). \quad (93)$$

Applicando questo tensore alla normale $\bar{\mathbf{n}}_1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{F}^T)^{-1} \bar{\mathbf{n}}_1 &= (A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{t}_1) + A_{\mathcal{F}_2} (\bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{t}_2) + A_{\mathcal{F}_3} (\bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \mathbf{t}_3)) \bar{\mathbf{n}}_1 \\ &= A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1) \mathbf{t}_1 = A_{\mathcal{F}_1} \frac{V_{\mathcal{R}}}{A_{\mathcal{F}_1}} \mathbf{t}_1 \end{aligned} \quad (94)$$

da cui

$$\frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} (\mathbf{F}^T)^{-1} \bar{\mathbf{n}}_1 = k_1 \mathbf{t}_1 \quad (95)$$

e anche

$$\frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} (\det \mathbf{F})(\mathbf{F}^T)^{-1} \bar{\mathbf{n}}_1 = \frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} (\text{cof } \mathbf{F}) \bar{\mathbf{n}}_1 = k_1 \mathbf{t}_1. \quad (96)$$

Si noti che la forza superficiale

$$\bar{\mathbf{t}}_1 := k_1 \mathbf{t}_1 \quad (97)$$

è tale che, per la (88),

$$\bar{\mathbf{t}}_1 A_{\mathcal{F}_1} = \mathbf{t}_1 A_{\mathcal{F}_1}. \quad (98)$$

Analoghe espressioni si ottengono per le altre facce. Riguardando $\bar{\mathbf{t}}_1$, $\bar{\mathbf{t}}_2$, $\bar{\mathbf{t}}_3$ come distribuzioni di forze sulle facce del parallelepipedo di spigoli $\{\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$, il loro momento risulta

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \bar{\mathbf{t}}_1) + A_{\mathcal{F}_2} (\bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \bar{\mathbf{t}}_2) + A_{\mathcal{F}_3} (\bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \bar{\mathbf{t}}_3) \\ &= A_{\mathcal{F}_1} (\bar{\mathbf{u}}_1 \otimes \mathbf{t}_1) + A_{\mathcal{F}_2} (\bar{\mathbf{u}}_2 \otimes \mathbf{t}_2) + A_{\mathcal{F}_3} (\bar{\mathbf{u}}_3 \otimes \mathbf{t}_3) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{F}^\top)^{-1} \end{aligned} \quad (99)$$

La (95) può pertanto essere trasformata nella

$$\frac{\bar{\mathbf{M}}}{V_{\mathcal{R}}} \bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1. \quad (100)$$

4.8 Matrice del cofattore

Al fine di costruire la matrice del cofattore di \mathbf{F} definito nella (90), si consideri il caso in cui i vettori $\{\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$ coincidano con i vettori della base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Con riferimento alla deformazione descritta in fig. 8, siano $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ i vettori normali unitari alle facce del parallelepipedo generato dai vettori $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ottenuti applicando \mathbf{F} ai vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Considerando la faccia \mathcal{F}_1 si noti che la sua area, già definita nelle (70), si può esprimere come

$$A_{\mathcal{F}_1} = \text{vol}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{n}_1) = \text{vol}(\mathbf{n}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{vol}(\mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3). \quad (101)$$

I vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ si possono esprimere come combinazioni lineari dei vettori indipendenti $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \gamma_{11} \mathbf{n}_1 + \gamma_{21} \mathbf{F}\mathbf{e}_2 + \gamma_{31} \mathbf{F}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \gamma_{12} \mathbf{n}_1 + \gamma_{22} \mathbf{F}\mathbf{e}_2 + \gamma_{32} \mathbf{F}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= \gamma_{13} \mathbf{n}_1 + \gamma_{23} \mathbf{F}\mathbf{e}_2 + \gamma_{33} \mathbf{F}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (102)$$

in cui, essendo \mathbf{n}_1 ortogonale sia a $\mathbf{F}\mathbf{e}_2$ che a $\mathbf{F}\mathbf{e}_3$, risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \gamma_{11}, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \gamma_{12}, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= \gamma_{13}. \end{aligned} \quad (103)$$

Ne deriva che

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) &= \text{vol}(\gamma_{11} \mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \text{vol}(\mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1) A_{\mathcal{F}_1}, \\ \text{vol}(\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) &= \text{vol}(\gamma_{12} \mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \text{vol}(\mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2) A_{\mathcal{F}_1}, \\ \text{vol}(\mathbf{e}_3, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) &= \text{vol}(\gamma_{13} \mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \text{vol}(\mathbf{n}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3) A_{\mathcal{F}_1}. \end{aligned} \quad (104)$$

Dalle (89) e (88), essendo $A_{\mathcal{F}_1} = 1$, si ha

$$\text{cof } \mathbf{F} \mathbf{e}_1 = k_1 \mathbf{n}_1 = A_{\mathcal{F}_1} \mathbf{n}_1. \quad (105)$$

Le componenti di tale vettore, che costituiscono la prima colonna della matrice di $\text{cof } \mathbf{F}$, si ottengono attraverso il prodotto scalare con i vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ che, utilizzando le (104), fornisce

$$\begin{aligned} \text{cof } \mathbf{F} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= A_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = \text{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{22} f_{33} - f_{23} f_{32}, \\ \text{cof } \mathbf{F} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= A_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = \text{vol}(\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{32} f_{13} - f_{33} f_{12}, \\ \text{cof } \mathbf{F} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 &= A_{\mathcal{F}_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = \text{vol}(\mathbf{e}_3, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{12} f_{23} - f_{13} f_{22}. \end{aligned} \quad (106)$$

Ripetendo il calcolo a partire dalla faccia \mathcal{F}_2 e poi dalla faccia \mathcal{F}_3 si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{23}f_{31} - f_{21}f_{33}, \\ \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{33}f_{11} - f_{31}f_{13}, \\ \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31}, \\ \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = f_{31}f_{12} - f_{32}f_{11}, \\ \operatorname{cof} \mathbf{F} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 &= \operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}. \end{aligned} \quad (108)$$

La matrice del cofattore di \mathbf{F} risulta pertanto

$$[\operatorname{cof} \mathbf{F}] = \begin{pmatrix} f_{22}f_{33} - f_{23}f_{32} & f_{23}f_{31} - f_{21}f_{33} & f_{21}f_{32} - f_{22}f_{31} \\ f_{32}f_{13} - f_{33}f_{12} & f_{33}f_{11} - f_{31}f_{13} & f_{31}f_{12} - f_{32}f_{11} \\ f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22} & f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23} & f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Si noti che nel caso di *deformazione piana*, in cui la matrice di \mathbf{F} ha la forma

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (110)$$

la matrice del cofattore diventa

$$[\operatorname{cof} \mathbf{F}] = \begin{pmatrix} f_{22} & -f_{21} & 0 \\ -f_{12} & f_{11} & 0 \\ 0 & 0 & f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \end{pmatrix}. \quad (111)$$

5 Tensore momento e classi di equivalenza

I risultati precedenti si possono generalizzare nel seguente:

assegnata, per un corpo di forma \mathcal{R} , una classe di equivalenza, con forza risultante \mathbf{f} e momento risultante \mathbf{M} rispetto ad un polo \mathbf{p}_O , esiste un rappresentante di tale classe costituito dalla forza \mathbf{f} applicata nel punto che occupa la posizione \mathbf{p}_O e da una distribuzione di forza sul bordo $\partial\mathcal{R}$, avente risultante nulla, data da

$$\mathbf{t} := \frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{n}, \quad (112)$$

essendo \mathbf{n} la normale esterna al bordo $\partial\mathcal{R}$.

Questo è vero nel caso del corpo a forma di parallelepipedo, come già visto. Ma è vero anche per qualsiasi forma il cui bordo sia una superficie regolare a tratti. Si ha infatti per la risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{M}\mathbf{n} \, dA = \mathbf{M} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} \, dA = \mathbf{o}, \quad (113)$$

e per il momento risultante

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} \mathbf{n}) \, dA = \frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_O) \otimes \mathbf{n}) \, dA = \frac{\mathbf{M}}{V_{\mathcal{R}}} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} \, dV = \mathbf{M}, \quad (114)$$

essendo, per il teorema della divergenza di campi scalari e per la definizione del gradiente di un campo vettoriale,

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{1}\mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla \mathbf{1} \, dV = \mathbf{o}, \quad (115)$$

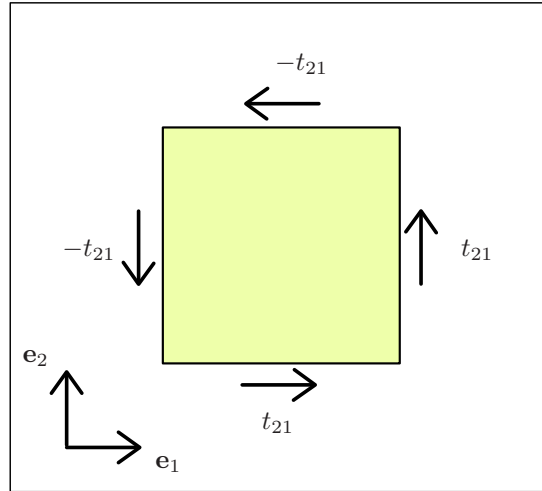


Figura 9: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo con risultante nulla e tensore momento antisimmetrico (sezione ortogonale a \mathbf{e}_3).

$$\int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{n}) \mathbf{e}_i dA = \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{R}} \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{e}_i) dV, \quad (116)$$

$$\nabla((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(((\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{p}_0) - (\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \right) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad (117)$$

$$\Rightarrow \nabla((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \quad (118)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{R}} ((\mathbf{x} - \mathbf{p}_0) \otimes \mathbf{n}) dA = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} dV, \quad (119)$$

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{I} dV = \mathbf{I} V_{\mathcal{R}}. \quad (120)$$

6 Tensore momento antisimmetrico

Si consideri una classe di equivalenza con risultante nulla e tensore momento antisimmetrico. Un rappresentante di tale classe è la distribuzione di forze superficiali sul bordo di un corpo a forma di cubo. Indicando la matrice del tensore momento con

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{p}_0}] = \ell^3 \begin{pmatrix} 0 & -t_{21} & t_{13} \\ t_{21} & 0 & -t_{32} \\ -t_{13} & t_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (121)$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= t_{21}\mathbf{e}_2 - t_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{t}_2 &= t_{32}\mathbf{e}_3 - t_{21}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{t}_3 &= t_{13}\mathbf{e}_1 - t_{32}\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (122)$$

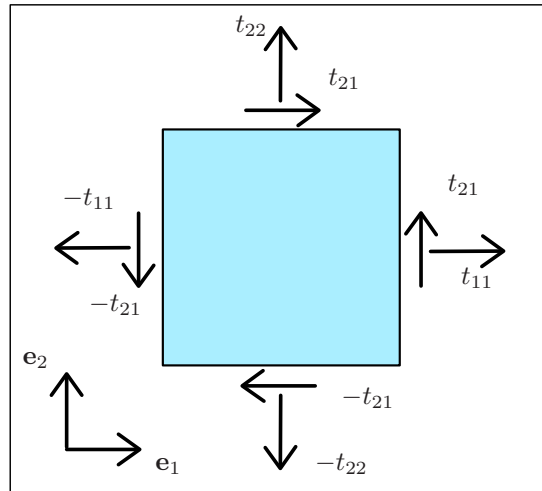


Figura 10: Corpo soggetto a una distribuzione di forza applicata sul bordo con risultante nulla e tensore momento simmetrico (sezione ortogonale a \mathbf{e}_3).

7 Tensore momento simmetrico

Si consideri una classe di equivalenza con risultante nulla e tensore momento simmetrico. Un rappresentante di tale classe è la distribuzione sul bordo di un corpo a forma di cubo. Indicando la matrice del tensore momento con

$$[\mathbf{M}_{p_0}] = \ell^3 \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad (123)$$

risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + t_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{t}_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + t_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{t}_3 &= t_{31}\mathbf{e}_1 + t_{32}\mathbf{e}_2 + t_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (124)$$