Corpi affini elastici

Indice

1 Principi di bilancio

1.1 Corpo rigido

Un corpo rigido è un corpo i cui posizionamenti sono tali che le deformazioni corrispondenti a ciascuna coppia di essi sono rigide. Lo spazio dei campi di velocità test è costituito dall'insieme di tutti i campi di velocità rigidi.

Si assuma il seguente principio: *in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze sono tali che la potenza esterna in ogni campo di velocità test rigido è nulla*:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}. \tag{1}$$

Essendo in un campo di velocità test rigido

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} \cdot \mathbf{W}, \tag{2}$$

dove $\mathbf{f}$ è la forza risultante e $\mathbf{M}_{\mathsf{p_O}}$ è il momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo $\mathsf{p_O}$, il principio enunciato è equivalente alle *equazioni di bilancio delle forze*

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{3}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} = \mathbf{O}. \tag{4}$$

1.2 Corpo affine e tensione di Cauchy

Un corpo affine è un corpo i cui posizionamenti sono tali che le deformazioni corrispondenti a ciascuna coppia di essi sono affini. Lo spazio dei campi di velocità test è in questo caso costituito dall'insieme di tutti i campi di velocità affini.

Il corpo affine è il modello di corpo *deformabile* più semplice che si possa concepire.

Se si assumesse che in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze sono tali che la potenza esterna in ogni campo di velocità test affine è nulla, poiché in un campo di velocità test affine è

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} \cdot \mathbf{L}, \tag{5}$$

si giungerebbe alla conclusione

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{6}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} = \mathbf{O}, \tag{7}$$

$$\operatorname{sym} \mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} = \mathbf{O}. \tag{8}$$

Questa ultima condizione escluderebbe la presenza di sistemi di forze che spendano potenza in campi di velocità test di dilatazione, rendendo il modello di corpo poco interessante. Al fine di descrivere la proprietà dei corpi deformabili di poter essere soggetti a sistemi di forze di tal genere, occorre ammettere l'esistenza di una *potenza interna*

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{v}) = -(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L})\, V_{\mathcal{R}}, \tag{9}$$

con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{T}$ descrittori della *tensione* del corpo, e assumere che *in corrispondenza di una qualsiasi configurazione le forze e la tensione sono tali che la potenza* totale *in ogni campo di velocità test affine è nulla*:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}. \tag{10}$$

Il *principio di bilancio* così formulato risulta equivalente alle *equazioni di bilancio*

$$\mathbf{f} - \mathbf{z}\, V_{\mathcal{R}} = \mathbf{o}, \tag{11}$$

$$\mathbf{M}_{\mathsf{p_O}} - \mathbf{T}\, V_{\mathcal{R}} = \mathbf{O}. \tag{12}$$

$\mathbf{T}$ si dice *tensione di Cauchy*.

2 Caratterizzazione della tensione

Poiché la *potenza interna* $\mathcal{W}^{(int)}$ è stata introdotta per un corpo suscettibile di deformazioni non rigide, è ragionevole assumere che essa *sia nulla in ogni campo di velocità test rigido*:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0, \tag{13}$$

con $\mathbf{W}$ antisimmetrico. Tale principio risulta equivalente alle condizioni

$$\mathbf{z} = \mathbf{o}, \tag{14}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{T} = \mathbf{O}. \tag{15}$$

Le *equazioni di bilancio* per un corpo affine diventano pertanto

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{16}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{M} = \mathbf{O}, \tag{17}$$

$$\operatorname{sym} \mathbf{M} = \mathbf{T}\, V_{\mathcal{R}}, \tag{18}$$

dove si è eliminata la indicazione del polo p_{O}, essendo il momento indipendente da questo.

2.1 Obiettività

Un punto di vista più generale consiste nel considerare due "osservatori". Un moto affine $\boldsymbol{\phi}$

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}}, t) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}, t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \qquad \forall \mathsf{A} \in \mathcal{B} \tag{19}$$

visto dal primo osservatore sia, in termini di moto di ciascun punto, descritto da

$$\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t) = \mathsf{p}_{\mathsf{O}}(t) + \mathbf{F}(t)(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}). \tag{20}$$

Un *cambiamento di osservatore* fa corrispondere ad una posizione $\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t)$ una diversa posizione $\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}}(t)$ definita, ad ogni istante t, dalla espressione

$$\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}}(t) = \mathsf{q}^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t) - \mathsf{q}(t)), \tag{21}$$

essendo $\mathbf{Q}$, q, q^* tre funzioni del tempo, con $\mathbf{Q}(t)$ tensore ortogonale. Poiché

$$\mathsf{p}^*_{\mathsf{O}}(t) = \mathsf{q}^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathsf{p}_{\mathsf{O}}(t) - \mathsf{q}(t)), \tag{22}$$

dalla differenza tra la (21) e la (22) si ottiene, sostituendo la (20) e omettendo d'ora in poi l'argomento t,

$$\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}} - \mathsf{p}^*_{\mathsf{O}} = \mathbf{Q}(\mathsf{p}_{\mathsf{A}} - \mathsf{p}_{\mathsf{O}}) = \mathbf{Q}\mathbf{F}(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}). \tag{23}$$

Risulta pertanto

$$\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}} = \mathsf{p}^*_{\mathsf{O}} + \mathbf{F}^*(\bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \bar{\mathsf{p}}_{\mathsf{O}}) \tag{24}$$

con

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}. \tag{25}$$

Derivando rispetto al tempo la (21) si ottiene la relazione tra le velocità nel cambiamento di osservatore

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{p}}^*_{\mathsf{A}} &= \dot{\mathsf{q}}^* + \dot{\mathbf{Q}}(\mathsf{p}_{\mathsf{A}} - \mathsf{q}) + \mathbf{Q}(\dot{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{q}}) \\ &= \dot{\mathsf{q}}^* + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}} - \mathsf{q}^*) + \mathbf{Q}(\dot{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} - \dot{\mathsf{q}}) \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathsf{p}}_{\mathsf{A}} + (\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\mathsf{p}^*_{\mathsf{A}} - \mathsf{q}^*). \end{aligned} \tag{26}$$

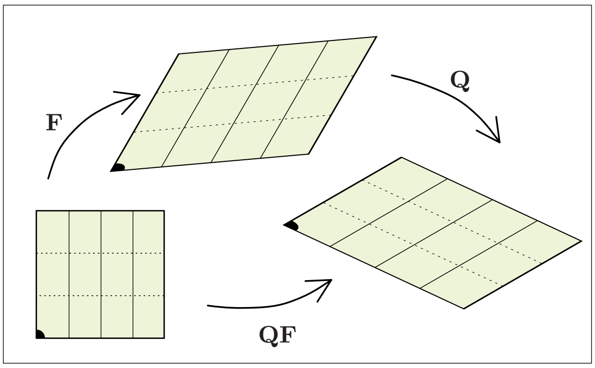

Figura 1: Cambiamento di osservatore

Considerato un campo di velocità test

$$\mathbf{v}_\mathsf{A} = \mathbf{v}_\mathsf{O} + \mathbf{L}(\mathsf{p}_\mathsf{A} - \mathsf{p}_\mathsf{O}), \tag{27}$$

si dirà *campo di velocità test corrispondente* nel cambiamento di osservatore il campo di velocità

$$\mathbf{v}^*_\mathsf{A} = \mathbf{v}^*_\mathsf{O} + \mathbf{L}^*(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}) \tag{28}$$

tale che

$$\mathbf{v}^*_\mathsf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{v}_\mathsf{A} + (\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{q}^*). \tag{29}$$

Essendo in particolare

$$\mathbf{v}^*_\mathsf{O} = \mathbf{Q}\mathbf{v}_\mathsf{O} + (\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{O} - \mathsf{q}^*), \tag{30}$$

dalla differenza si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^*_\mathsf{A} - \mathbf{v}^*_\mathsf{O} &= \mathbf{Q}(\mathbf{v}_\mathsf{A} - \mathbf{v}_\mathsf{O}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}) \\
&= \mathbf{Q}\mathbf{L}(\mathsf{p}_\mathsf{A} - \mathsf{p}_\mathsf{O}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}) \\
&= \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}) \\
&= (\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\mathsf{T} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T})(\mathsf{p}^*_\mathsf{A} - \mathsf{p}^*_\mathsf{O}).
\end{aligned} \tag{31}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\mathsf{T} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}. \tag{32}$$

Il *principio di obiettività materiale* si formula nel modo seguente: *la potenza interna, per qualunque campo di velocità test, sia invariante in un cambiamento di osservatore.* Questo implica che ad ogni istante t per qualunque cambiamento di osservatore, definito dalle tre funzioni del tempo $\mathbf{Q}$, q, q^*, deve essere

$$\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{v}^*_\mathsf{O} + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L}^* = \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{O} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \tag{33}$$

qualunque sia il campo di velocità test. Sostituendo la (30) e la (32) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}^* \cdot \Big(\mathbf{Q}\mathbf{v}_\mathsf{O} + (\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}(\mathsf{p}^*_\mathsf{O} - \mathsf{q}^*)\Big) - \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{O} \\
&\quad + \mathbf{T}^* \cdot \Big(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\mathsf{T} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\Big) - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Considerando cambiamenti di osservatore tali che $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{O}$, $\dot{\mathsf{q}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}$, deve essere, per qualunque campo di velocità test,

$$\big(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{z}^* - \mathbf{z}\big) \cdot \mathbf{v}_\mathsf{O} + \big(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{T}^*\mathbf{Q} - \mathbf{T}\big) \cdot \mathbf{L} = 0. \tag{35}$$

Ne deriva che

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \mathbf{z}^*, \tag{36}$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \mathbf{T}^* \mathbf{Q}. \tag{37}$$

Sostituendo queste espressioni la (34) diventa

$$\mathbf{z}^* \cdot \Big((\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\mathsf{p}_{\mathsf{O}}^* - \mathsf{q}^*) \Big) + \mathbf{T}^* \cdot \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = 0. \tag{38}$$

Considerando cambiamenti di osservatore tali che $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{O}$ deve essere

$$\mathbf{z}^* \cdot (\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}}) = 0 \tag{39}$$

qualunque sia il vettore $(\dot{\mathsf{q}}^* - \mathbf{Q}\dot{\mathsf{q}})$. Risulta pertanto

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{o}. \tag{40}$$

La (38) diventa dunque

$$\mathbf{T}^* \cdot \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = 0. \tag{41}$$

Affinché questa condizione valga per qualunque cambiamento di osservatore, essendo $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$ antisimmetrico, deve essere

$$\operatorname{skw} \mathbf{T}^* = \mathbf{O}. \tag{42}$$

Si noti che dalle condizioni trovate derivano di nuovo la (14) e la (15). Infatti dalla (36) e dalla (40) deriva

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \mathbf{z}^* = \mathbf{o}\,, \tag{43}$$

mentre dalla (37) e dalla (42) deriva

$$\begin{aligned} \operatorname{skw} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \mathbf{T}^* \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{T}} \mathbf{Q} \right) = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}^* - (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{T}} \right) \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \left(\operatorname{skw} \mathbf{T}^* \right) \mathbf{Q} = \mathbf{O}\,. \end{aligned} \tag{44}$$

2.2 Composizione con un moto rigido

Un altro punto di vista, equivalente al precedente, consiste nel considerare il moto affine (19) e la sua composizione con un moto rigido descritta all'istante t dall'espressione

$$\phi_r(\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t), t) = \phi_r(\mathsf{q}(t), t) + \mathbf{Q}(t)(\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t) - \mathsf{q}(t)). \tag{45}$$

Se si pone

$$\mathsf{p}_{\mathsf{A}}^*(t) = \phi_r(\mathsf{p}_{\mathsf{A}}(t), t), \tag{46}$$
$$\mathsf{q}^*(t) = \phi_r(\mathsf{q}(t), t), \tag{47}$$

la (45) diventa identica alla (21). Riformulando il *principio di obiettività materiale* nei seguenti termini: *la potenza interna, per qualunque campo di velocità test, sia invariante nella composizione con un moto rigido*, si giunge alle stesse conseguenze del principio formulato in termini di cambiamento di osservatore.

3 Risposta del materiale

Al fine di caratterizzare la relazione tra la tensione e il moto, propria di una classe di materiali, si assumono in generale i seguenti principi:

- Principio di determinismo: *la tensione è determinata dalla storia trascorsa della deformazione.*
- Principio di azione locale: *la tensione in un punto non dipende dalla deformazione in altri punti ad una distanza finita.*

Si consideri il moto affine descritto dalla espressione (19). Ad ogni istante la deformazione è definita dal valore in p_O e dal gradiente $\mathbf{F}$. Poiché per il principio di azione locale la tensione non può dipendere dal valore della deformazione in un particolare punto, essa dipenderà solo dal gradiente. La *funzione di risposta* all'istante t ha pertanto la forma

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^t), \tag{48}$$

dove con $\mathbf{F}^t$ si indica la storia del moto attraverso il gradiente della deformazione. Una classe di materiali particolarmente importante è quella dei *materiali elastici*, caratterizzata dalla seguente proprietà: *la tensione dipende solo dal valore attuale del gradiente della deformazione*. La funzione di risposta in questo caso diventa

$$\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}). \tag{49}$$

Si noti che la funzione di risposta include la descrizione di un posizionamento $\bar{\mathsf{p}}$, a cui si riferisce la deformazione $\boldsymbol{\phi}$, caratterizzato da una tensione nulla.

Si consideri per un materiale elastico il moto affine (20) e il corrispondente moto (24) in un cambiamento di osservatore descritto dalla (21). La risposta, vista dal secondo osservatore, sarà, per la (25)

$$\mathbf{T}^* = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^*) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}). \tag{50}$$

Poiché il *principio di obiettività materiale* implica la (37), sostituendo in questa la (49) e la (50) si ottiene

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF})\mathbf{Q} \tag{51}$$

Tale proprietà deve essere garantita dalla funzione di risposta per una qualsiasi scelta di $\mathbf{Q}$. Considerando tra i casi possibili quello in cui $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{\mathsf{T}}$, essendo $\mathbf{R}$ la rotazione in

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU}, \tag{52}$$

deve essere necessariamente vera la condizione

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{\mathsf{T}}, \tag{53}$$

o la condizione equivalente

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{R} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U}). \tag{54}$$

Viceversa se una funzione di risposta ha la proprietà (53), allora risulta soddisfatta la (37) per qualsiasi $\mathbf{Q}$. Infatti utilizzando la (53) nella (50) si ha

$$\mathbf{T}^* = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{QF}) = (\mathbf{QR})\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})(\mathbf{QR})^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}(\mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{\mathsf{T}})\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{QTQ}^{\mathsf{T}} \tag{55}$$

equivalente alla (37). La proprietà (53) caratterizza dunque tutti i materiali elastici ed è detta *forma ridotta della funzione di risposta per materiali elastici*.

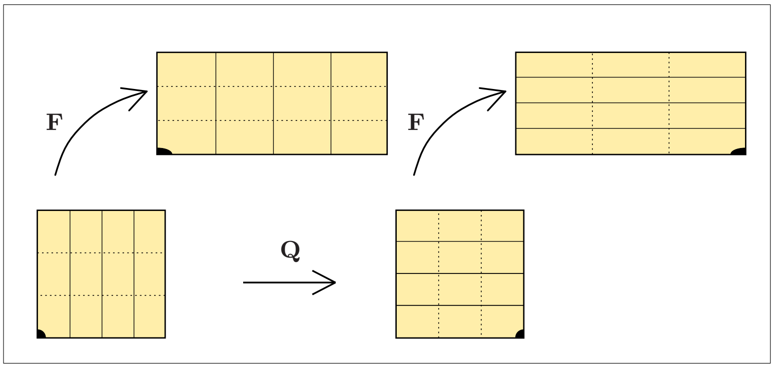

Figura 2: Una rotazione $\mathbf{Q}$ appartiene al gruppo di simmetria del materiale se $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$.

4 Gruppo di simmetria del materiale

Si osservi che se la deformazione affine $\boldsymbol{\phi}$ è *preceduta* da una deformazione rigida $\boldsymbol{\phi}_r$ tale che

$$\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} = \boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) + \mathbf{Q}(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \check{\mathsf{p}}_\mathsf{O}) \tag{56}$$

risulta definita la deformazione affine $\boldsymbol{\phi}^\star = \boldsymbol{\phi} \circ \boldsymbol{\phi}_r$, tale che

$$\boldsymbol{\phi}^\star(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{A})) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\phi}_r(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{O})) + \mathbf{FQ}(\check{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \check{\mathsf{p}}_\mathsf{O}), \tag{57}$$

con gradiente $\mathbf{F}^\star = \mathbf{FQ}$. La tensione corrispondente è

$$\mathbf{T}^\star = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}^\star) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}). \tag{58}$$

Il gruppo costituito dalle rotazioni $\mathbf{Q}$ che, seguite dalla stessa deformazione, lasciano invariata la risposta, cioè tali che

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F}\,, \tag{59}$$

si dice *gruppo di simmetria del materiale.*

Ad esempio, se la rotazione $\mathbf{Q}$ in Fig 2 o in Fig. 3 è nel gruppo di simmetria, la successiva applicazione di $\mathbf{F}$ genera delle configurazioni a cui corrisponde la stessa tensione come risposta del materiale.

4.1 Isotropia

Si dicono *isotropi* quei materiali il cui gruppo di simmetria è costituito da tutto il gruppo delle rotazioni di $\mathcal{V}$. Poiché in questo caso la (59) vale per qualsiasi rotazione $\mathbf{Q}$ essa deve valere in particolare per $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^\mathsf{T}$ diventando

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{RUR}^\mathsf{T}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}), \tag{60}$$

che a sua volta, per la (53), si trasforma nella

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{RUR}^\mathsf{T}) = \mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^\mathsf{T}. \tag{61}$$

Viceversa un materiale la cui funzione di risposta soddisfa la (61) risulta isotropo. Infatti, notando che la decomposizione polare di $\mathbf{FQ}$ è

$$\mathbf{FQ} = \mathbf{RUQ} = (\mathbf{RQ})(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{UQ}), \tag{62}$$

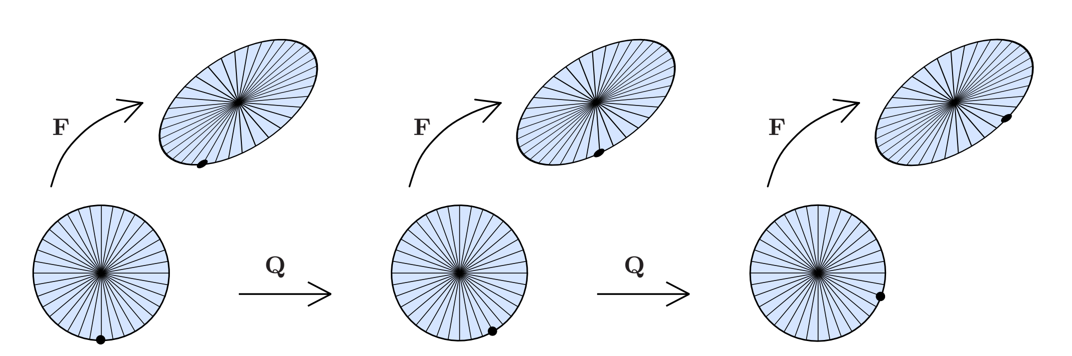

Figura 3: Un materiale è isotropo se per qualunque rotazione $\mathbf{Q}$ si ha $\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F})$.

risulta, applicando prima la (53), poi la (61) e infine ancora la (53),

$$\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{FQ}) = (\mathbf{RQ})\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{UQ})(\mathbf{RQ})^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}\widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{\mathsf{T}} = \widehat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \tag{63}$$

5 Tensione di Piola-Kirchhoff

L'espressione della potenza interna in campi di velocità test affini può essere scritta utilizzando il volume prima della deformazione

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}\, V_{\mathcal{R}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \det \mathbf{F}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}. \tag{64}$$

Questo permette di definire una tensione $\mathbf{S}$, alternativa alla tensione $\mathbf{T}$, nel seguente modo. In un campo di velocità test la differenza di velocità tra le posizioni p_A e p_O è data da

$$\mathbf{L}(\mathsf{p}_\mathsf{A} - \mathsf{p}_\mathsf{O}). \tag{65}$$

Poiché

$$\mathbf{L}(\mathsf{p}_\mathsf{A} - \mathsf{p}_\mathsf{O}) = \mathbf{LF}(\bar{\mathsf{p}}_\mathsf{A} - \bar{\mathsf{p}}_\mathsf{O}), \tag{66}$$

la stessa differenza di velocità si ottiene applicando $\mathbf{LF}$ alla differenza delle posizioni corrispondenti in $\bar{\mathcal{R}}$. Si definisce la nuova tensione come l'applicazione lineare $\mathbf{S}$ tale che

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L}\, V_{\mathcal{R}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{LF}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}, \qquad \forall \mathbf{L}. \tag{67}$$

Per la (64) si ha

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \det \mathbf{F}\, V_{\bar{\mathcal{R}}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{LF}\, V_{\bar{\mathcal{R}}}, \tag{68}$$

da cui deriva

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \det \mathbf{F} = \mathbf{SF}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L}, \qquad \forall \mathbf{L}. \tag{69}$$

Deve dunque essere

$$\mathbf{T} \det \mathbf{F} = \mathbf{SF}^{\mathsf{T}}, \tag{70}$$

che fornisce l'espressione

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}(\mathbf{F}^{\mathsf{T}})^{-1} \det \mathbf{F}. \tag{71}$$

6 Vincoli e forze reattive

Si consideri un corpo affine soggetto a delle limitazioni del moto consistenti nel fatto che alcuni suoi punti possano solo scorrere su una superficie o lungo una curva o restare fermi. Tali limitazioni si chiamano *vincoli*. È facile constatare dall'esperienza (osservando ad esempio un corpo poggiato su un piano orizzontale) che è possibile applicare ad un corpo vincolato anche distribuzioni di forze che da sole violerebbero le equazioni di bilancio (16) e (17). Occorre per questo ammettere l'esistenza di altre forze, dette *forze reattive*, diverse da quelle che si possa pensare di assegnare come costanti o come funzioni del tempo o da quelle che siano dipendenti dal moto attraverso una legge *costitutiva* fissata. Sempre traendo spunto dall'esperienza, è ragionevole assumere che tali forze reattive siano distribuzioni di forze sul bordo ortogonali a qualsiasi traiettoria permessa dai vincoli.

Si assume pertanto che la potenza *esterna* sia la somma della potenza delle forze (costitutivamente) *assegnate* e della potenza delle forze *reattive*

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r) \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{M}^a_{\mathsf{p_O}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{p_O}}) \cdot \mathbf{L}. \tag{72}$$

Indicando con $\mathbf{v}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}}$ e $\mathbf{L}^{\mathrm{v}}$ i descrittori dei campi di velocità affini *compatibili con i vincoli*, si stabilisce il seguente principio

$$\mathbf{f}^r \cdot \mathbf{v}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{p_O}} \cdot \mathbf{L}^{\mathrm{v}} = 0, \quad \forall \mathbf{v}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}},\ \forall \mathbf{L}^{\mathrm{v}} \tag{73}$$

che si enuncia così: *la potenza delle forze reattive è nulla nei campi di velocità compatibili con i vincoli.*