Continuo di Cauchy

Indice

1 Principio di bilancio

Il continuo di Cauchy è un modello di corpo i cui posizionamenti sono tali che le deformazioni corrispondenti a ciascuna coppia di essi sono delle trasformazioni regolari di $\mathcal{E}$, senza più le caratterizzazioni utilizzate nel caso dei corpi rigidi e dei corpi affini.

Si consideri un corpo $\mathcal{B}$ e un suo posizionamento

$$\mathsf{p} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}. \tag{1}$$

Il modo più semplice per descrivere la *interazione meccanica* del corpo con l'ambiente esterno consiste nell'assegnare una funzione lineare $\mathcal{W}^{(ext)}$ detta *potenza esterna* che, in corrispondenza del posizionamento p, trasforma un qualsiasi campo di velocità in uno scalare.

Lo spazio dei *campi di velocità test* (o *atti di moto test*) è in questo caso costituito dall'insieme di tutti i campi vettoriali regolari sulla forma del corpo $\mathcal{R}$.

Se in un campo di velocit test le velocità in corrispondenza di p_A e p_B si indicano con

$$\mathbf{v}_\mathsf{A}, \mathbf{v}_\mathsf{B} \tag{2}$$

la potenza ammette un'unica rappresentazione nella forma

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}_\mathsf{A}, \mathbf{v}_\mathsf{B}) = \mathbf{f}_\mathsf{A} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{A} + \mathbf{f}_\mathsf{B} \cdot \mathbf{v}_\mathsf{B}. \tag{3}$$

I vettori $\mathbf{f}_\mathsf{A}, \mathbf{f}_\mathsf{B}$ si dicono *forze esterne* applicate rispettivamente ai punti A, B.

Il caso che ha qui maggiore interesse è quello in cui $\mathcal{B}$ e p sono tali che l'insieme $\operatorname{im} \mathsf{p}$ (la *forma* del corpo) è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ chiusura di un sottoinsieme aperto, con bordo $\partial\mathcal{R}$ regolare a tratti. In un atto di moto test la velocità dei punti del corpo è descritta da una funzione regolare

$$\mathbf{v} : \mathsf{p}_\mathsf{A} \mapsto \mathbf{v}_\mathsf{A}, \tag{4}$$

che ha come dominio $\mathcal{R}$. La *potenza esterna* ha in generale la seguente rappresentazione

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dA. \tag{5}$$

I campi vettoriali $\mathbf{b}$ e $\mathbf{t}$, rispettivamente su $\mathcal{R}$ e $\partial\mathcal{R}$, si dicono *distribuzione di forza di volume* e *distribuzione di forza superficiale (o di contatto)*. La *potenza interna* si assume che abbia la seguente rappresentazione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{v}) = -\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v}) \, dV, \tag{6}$$

con $\mathbf{z}$ e $\mathbf{T}$ descrittori della *tensione* del corpo ($\mathbf{T}$ si dice *tensione di Cauchy*) e $\nabla\mathbf{v}$ gradiente del campo di velocità test.

Si assume, come *principio di bilancio*, che *in corrispondenza di una qualsiasi configurazione la potenza* totale *in ogni atto di moto test è nulla*:

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{v}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}. \tag{7}$$

2 Equazioni di bilancio

Sostituendo l'espressione della divergenza di un campo tensoriale (v. Appendice 2)

$$\mathbf{T} \cdot \nabla\mathbf{v} = \operatorname{div}\left(\mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{v}\right) - \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \tag{8}$$

nell'espressione della potenza interna (6) si ottiene

$$-\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v})\, dV = -\int_{\mathcal{R}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\, dV - \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}} \mathbf{v}\right) dV \tag{9}$$

che, applicando il teorema della divergenza, diventa

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{R}} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v})\, dV &= -\int_{\mathcal{R}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\, dV - \int_{\partial\mathcal{R}} \left(\mathbf{T}^{\mathsf{T}} \mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{n}\, dA \\ &= -\int_{\mathcal{R}} \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}\, dV - \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{n})\, dA \end{aligned} \tag{10}$$

Il principio di bilancio (7) si può pertanto esprimere nella seguente forma

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\mathbf{b} - \mathbf{z} + \operatorname{div} \mathbf{T}\right) \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \left(\mathbf{t} - \mathbf{T}\mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{v}\, dA = 0 \quad \forall \mathbf{v}. \tag{11}$$

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché valga questa condizione è che sia

$$\mathbf{b} - \mathbf{z} + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad \text{in } \mathcal{R}, \tag{12}$$

$$\mathbf{t} - \mathbf{T}\mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{R}. \tag{13}$$

Queste sono le *equazioni di bilancio.*

3 Caratterizzazione della tensione

Differentemente che nel modello di corpo affine, la tensione non è in genere uniforme. Ciò che viene caratterizzato pertanto è il suo valore in ciascuna posizione $\mathsf{p_A} \in \mathcal{R}$, attraverso la condizione di obiettività della densità di potenza interna

$$\mathbf{z}(\mathsf{p_A}) \cdot \mathbf{v}(\mathsf{p_A}) + \mathbf{T}(\mathsf{p_A}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathsf{p_A})\,. \tag{14}$$

Poiché questa dipende solo dal valore in $\mathsf{p_A}$ del campo di velocità e del suo gradiente è sufficiente considerare atti di moto test affini. Il *principio di obiettività materiale* si formula pertanto nel modo seguente: *la densità di potenza interna, per qualunque atto di moto test affine, sia invariante in un cambiamento di osservatore*:

$$\mathbf{z}^* \cdot \mathbf{v}^*_{\mathsf{O}} + \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{L}^* = \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_{\mathsf{O}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \tag{15}$$

dove si è omesso di indicare la posizione, peraltro generica, in cui è valutata la tensione.

Il principio così enunciato è identico al principio di obiettività nel caso del corpo affine. Identiche sono le conclusioni:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}_c^{\mathsf{T}} \mathbf{z}^* = \mathbf{o}, \tag{16}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_c^{\mathsf{T}} \mathbf{T}^* \mathbf{Q}_c, \tag{17}$$

$$\operatorname{skw} \mathbf{T} = \mathbf{O}\,. \tag{18}$$

Le *equazioni di bilancio* diventano pertanto

$$\mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad \text{in } \mathcal{R}, \tag{19}$$

$$\mathbf{t} - \mathbf{T}\mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{R}. \tag{20}$$

4 Risposta del materiale

Anche per la risposta del materiale vale quanto già visto per il corpo affine. L'unica differenza sta nel fatto che la funzione di risposta potrebbe non essere la stessa ovunque. Se la funzione di risposta è unica si dice che *il materiale è omogeneo*.