Calcolo dell'asse e dell'ampiezza di una rotazione

Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$. Si consideri la rotazione $\mathbf{R}$ che trasforma la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ nella terna ortonormale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ definita dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= -\frac{4}{\sqrt{42}}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{\sqrt{42}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{42}}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{v}_2 &:= \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_2 + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{v}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Calcolare l'asse e l'ampiezza della rotazione.

Essendo $\mathbf{R}$ tale che

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{R}\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{R}\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3,$$

la sua matrice nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ risulta

$$[\mathbf{R}] := \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

L'asse della rotazione è l'autospazio, di dimensione 1, corrispondente all'autovalore 1. Un autovettore $\mathbf{w}$ corrispondente all'autovalore 1 è tale che

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

Dalla risoluzione del sistema di equazioni omogeneo si trova un vettore del nucleo di $\mathbf{R} - \mathbf{I}$. La matrice di $\mathbf{R} - \mathbf{I}$ risulta, utilizzando una rappresentazione approssimata dei numeri reali,

$$\begin{pmatrix} -1.61721 & 0.534522 & 0.57735 \\ 0.771517 & -0.732739 & 0.57735 \\ 0.154303 & 0.801784 & -1.57735 \end{pmatrix}.$$

Una soluzione è

$$\begin{pmatrix} 0.947 \\ 1.78505 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando si ottiene il vettore $\mathbf{a}_3$ di componenti

$$[\mathbf{a}_3] = \begin{pmatrix} 0.42003 \\ 0.791738 \\ 0.443538 \end{pmatrix}.$$

Resta da calcolare l'ampiezza della rotazione. A tal fine occorre determinare una coppia ortonormale di vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ortogonali a $\mathbf{a}_3$. Si ricordi che, dato un qualsiasi vettore $\mathbf{v}$, la sua proiezione ortogonale sul sottospazio ortogonale al vettore unitario $\mathbf{a}_3$ è

$$\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3)\, \mathbf{a}_3.$$

Se ad esempio si sceglie un vettore $\mathbf{v}$ di componenti

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene, dopo aver normalizzato, un vettore $\mathbf{a}_1$ di componenti

$$[\mathbf{a}_1] = \begin{pmatrix} -0.833147 \\ 0.14266 \\ 0.534335 \end{pmatrix}.$$

Definendo

$$\mathbf{a}_2 := \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1$$

si ottiene

$$[\mathbf{a}_2] = \begin{pmatrix} 0.359778 \\ -0.593969 \\ 0.719556 \end{pmatrix}.$$

Essendo l'ampiezza θ della rotazione tale che

$$\mathbf{R}\mathbf{a}_1 = \cos\theta \mathbf{a}_1 + \sin\theta \mathbf{a}_2,$$

risulta

$$\begin{aligned} \cos\theta &= (\mathbf{R}\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = -0.963651, \\ \sin\theta &= (\mathbf{R}\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = 0.267164, \end{aligned}$$

da cui si ottiene infine

$$\theta = 2.87114 + 2n\pi = 0.913914\pi + 2n\pi.$$