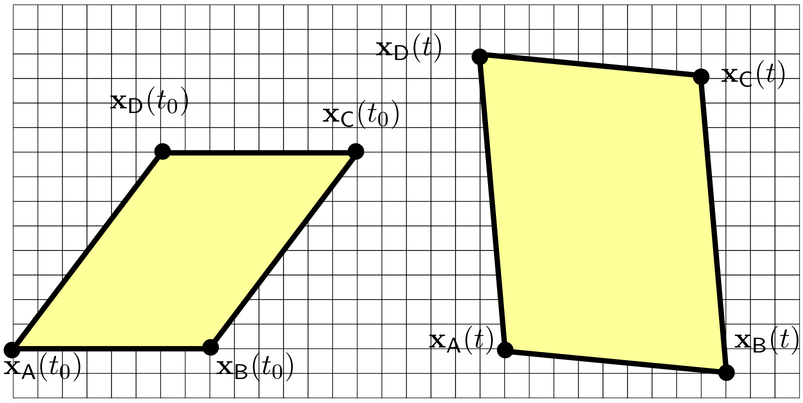
Deformazione affine



Un corpo assume all'istante t_0 e all'istante t le due forme rappresentate nel disegno. Assumendo che la deformazione sia affine:

- costruire la matrice del gradiente della deformazione;
- costruire la dilatazione e la rotazione corrispondenti;
- descrivere le direzioni principali della dilatazione e indicare le dilatazioni principali;
- calcolare l'ampiezza della rotazione;
- calcolare il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Ai fini del calcolo si scelga un sistema di coordinate cartesiano, fissando un'origine e una base ortonormale.

Scelta una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ adattata al reticolo e un'origine del sistema di coordinate, le posizioni siano descritte dalle espressioni seguenti

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0) &= \mathbf{o} + 20\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t_0) &= \mathbf{o} + 80\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t_0) &= \mathbf{o} + 60\mathbf{e}_1 + 100\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) &= \mathbf{o} + 200\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) &= \mathbf{o} + 290\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t) &= \mathbf{o} + 190\mathbf{e}_1 + 140\mathbf{e}_2
\end{aligned}
$$

Dunque $\mathbf{F}$ è tale che

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)) &= \mathbf{x}_{\mathsf{B}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t) \\
\mathbf{F}(\mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t_0) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)) &= \mathbf{x}_{\mathsf{D}}(t) - \mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)
\end{aligned}
$$

Sostituendo le coordinate si ottiene

$$\mathbf{F}(80\mathbf{e}_1) = 90\mathbf{e}_1 - 10\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{F}(60\mathbf{e}_1 + 80\mathbf{e}_2) = -10\mathbf{e}_1 + 120\mathbf{e}_2$$

Dalla prima si ha

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = \frac{9}{8}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{8}\mathbf{e}_2$$

Dalla seconda

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = -\frac{31}{32}\mathbf{e}_1 + \frac{51}{32}\mathbf{e}_2$$

Pertanto la matrice di $\mathbf{F}$ risulta

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & -\frac{31}{32} \\ -\frac{1}{8} & \frac{51}{32} \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è, nella rappresentazione approssimata dei reali,

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1.28125 & -1.28906 \\ -1.28906 & 3.47852 \end{pmatrix}$$

I suoi autovalori sono

$$\eta_1 = 0.686166, \quad \eta_2 = 4.0736$$

Pertanto le dilatazioni principali sono

$$\lambda_1 = \sqrt{0.686166} = 0.828351, \quad \lambda_2 = \sqrt{4.0736} = 2.01832$$

Le matrici delle proiezioni sugli autospazi di $\mathbf{C}$ sono rispettivamente

$$[\mathbf{P}_1] = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2}[\mathbf{C} - \eta_2\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.824326 & 0.380543 \\ 0.380543 & 0.175674 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1}[\mathbf{C} - \eta_1\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} 0.175674 & -0.380543 \\ -0.380543 & 0.824326 \end{pmatrix}$$

La matrice della dilatazione risulta dunque

$$[\mathbf{U}] = [\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 1.0374 & -0.452832 \\ -0.452832 & 1.80927 \end{pmatrix}$$

Infine per la matrice della rotazione $\mathbf{R}$ tale che $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ si ha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}] = [\mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{P}_2)] = \begin{pmatrix} 0.955064 & -0.296399 \\ 0.296399 & 0.955064 \end{pmatrix}$$

La ampiezza della rotazione risulta $\theta = 0.0957859\pi$.

Il rapporto tra le aree delle due forme del corpo è

$$\det \mathbf{F} = 1.67188$$

Una procedura equivalente per il calcolo della dilatazione e della rotazione (si veda Esercizio[2-1]) consiste nel calcolare esplicitamente gli autovettori di $[\mathbf{C}]$, invece che le matrici delle proiezioni $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, normalizzarli e disporli come colonne della matrice che definisce un cambiamento di base. In questo caso tale matrice risulta

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0.907924 & -0.419135 \\ 0.419135 & 0.907924 \end{pmatrix}$$

Una descrizione della deformazione vista come successione della dilatazione $\mathbf{U}$ e poi della rotazione $\mathbf{R}$, senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)$ in $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)$, è data nella fig.1: la figura in rosso è trasformata da $\mathbf{U}$ nella figura in verde e poi da $\mathbf{R}$ nella figura in viola.

Una descrizione alternativa della stessa deformazione applicata ad un disco di centro $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)$, senza la traslazione che porta $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t_0)$ in $\mathbf{x}_{\mathsf{A}}(t)$, è data nella fig.2: i semiassi dell'ellisse in verde corrispondono alle direzioni principali di $\mathbf{U}$. Questi sono poi ruotati da $\mathbf{R}$.

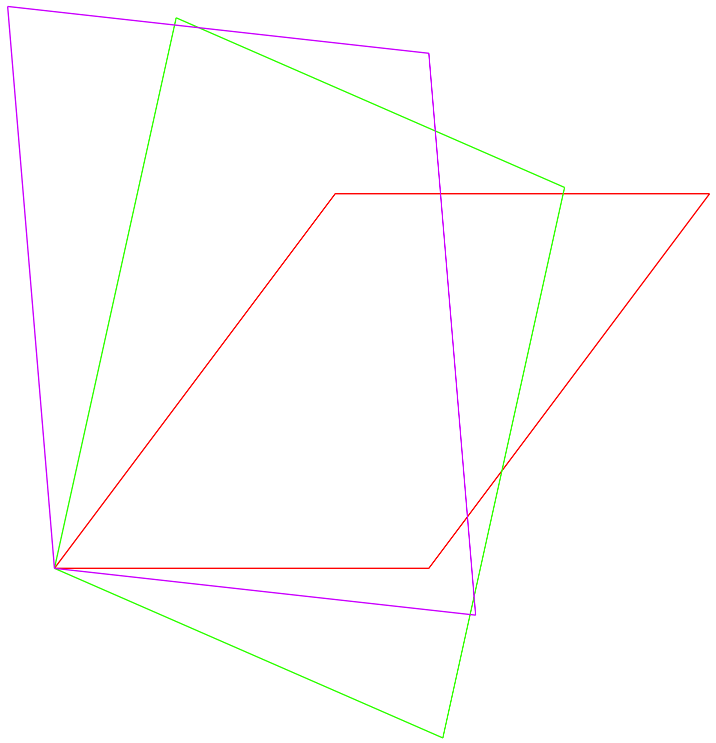


Figura 1: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)

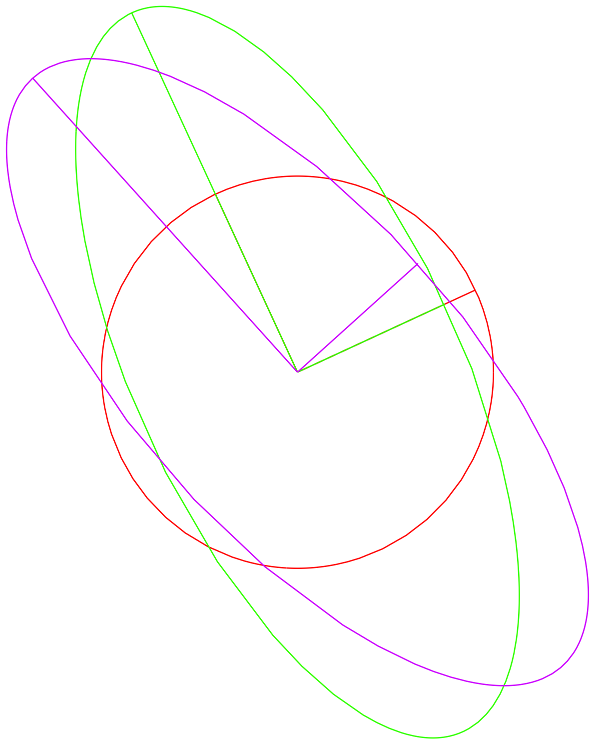


Figura 2: La dilatazione seguita dalla rotazione (rosso,verde,viola)