Deformazione non affine

Si consideri un corpo che abbia all'istante t_0 la forma di un disco di raggio $r = \frac{1}{2}$. Fissata l'origine del sistema di coordinate cartesiano nel centro del disco e una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, si consideri la deformazione definita dalla espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \mathbf{o} + \phi_1(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_2$$

con

$$\phi_1(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{4} + \frac{119}{100}\zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2 + \frac{3}{10}\zeta_1\zeta_2$$

$$\phi_2(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{100} - \frac{3H}{20}\zeta_1 + \frac{49}{50}\zeta_2 - \frac{3}{10}\zeta_1\zeta_2$$

Si disegni il contorno della forma del corpo originaria (cerchio) e di quella deformata. Per un generico punto del corpo si costruisca il gradiente della deformazione. Si calcolino poi in corrispondenza di alcuni punti del corpo le direzioni principali della dilatazione, le dilatazioni principali, la ampiezza della rotazione. Si calcoli infine il rapporto tra le aree delle due forme del corpo.

Descrizione della deformazione

Il contorno della forma originaria è descritto dalla curva

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) = \mathbf{o} + r\cos(2h\pi)\mathbf{e}_1 + r\sin(2h\pi)\mathbf{e}_2$$

con $h \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il contorno del corpo dopo la deformazione è descritto dalla curva corrispondente

$$\mathbf{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{c}}_1(h)) = \mathbf{o} + \phi_1(r\cos(2h\pi), r\cos(2h\pi))\mathbf{e}_1 + +\phi_2(r\cos(2h\pi), r\cos(2h\pi))\mathbf{e}_2$$

La descrizione può essere arricchita aggiungendo i due segmenti ortogonali

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{c}}_2(h) &= \mathbf{o} + rh\mathbf{e}_1 \\
\bar{\mathbf{c}}_3(h) &= \mathbf{o} + rh\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{c}_2(h) &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{c}}_2(h)) = \mathbf{o} + \phi_1(rh, 0)\mathbf{e}_1 + \phi_2(rh, 0)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{c}_3(h) &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{c}}_3(h)) = \mathbf{o} + \phi_1(0, rh)\mathbf{e}_1 + \phi_2(0, rh)\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

oppure i segmenti paralleli alle direzioni principali nel centro del disco.

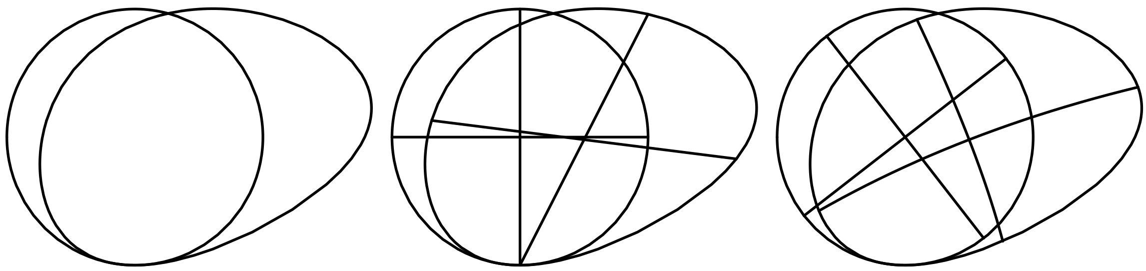

Figura 1: Tre diverse descrizioni della deformazione assegnata.

Direzioni principali e rotazione

La matrice di $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))$ è in generale

$$[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))] := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2) & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2) & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le espressioni di ϕ_1 e ϕ_2 si ottiene

$$[\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))] = \begin{pmatrix} \frac{119+30\zeta_2}{100} & \frac{5+3\zeta_1}{10} \\ -\frac{3(1+2\zeta_2)}{20} & \frac{49-15\zeta_1}{50} \end{pmatrix}$$

La matrice del tensore di Cauchy-Green è

$$[\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))] = [\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))]^T [\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))] = \begin{pmatrix} \frac{7193+4020\zeta_2+900\zeta_2^2}{5000} & \frac{224-72\zeta_2+3\zeta_1(67+30\zeta_2)}{500} \\ \frac{7193+4020\zeta_2+900\zeta_2^2}{5000} & \frac{1513-360\zeta_1+225\zeta_1^2}{1250} \end{pmatrix}$$

Centro: $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$

Sostituiti i valori di ζ_1 e ζ_2 dalla matrice di $\mathbf{C}$ si ottengono, calcolando le radici degli autovalori, le dilatazioni principali

$$\lambda_1 = 0.928546, \quad \lambda_2 = 1.33671$$

e le matrici delle proiezioni sugli autospazi

$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.376596 & -0.484532 \\ -0.484532 & 0.623404 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.623404 & 0.484532 \\ 0.484532 & 0.376596 \end{pmatrix}$$

Dalla matrice della rotazione, calcolata utilizzando l'espressione $\mathbf{R} = \mathbf{F}(\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{P}_2)$, si ottiene infine l'ampiezza della rotazione

$$\theta = -0.092639\pi.$$

Punto in basso: $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = -\frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = 0.788687, \quad \lambda_2 = 1.29227$$
$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.561454 & -0.496209 \\ \\ -0.496209 & 0.438546 \end{pmatrix}$$
$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.438546 & 0.496209 \\ \\ 0.496209 & 0.561454 \end{pmatrix}$$
$$\theta = -0.0772372\pi.$$

Punto a destra: $\zeta_1 = \frac{1}{2}$, $\zeta_2 = 0$

$$\lambda_1 = 0.778266, \quad \lambda_2 = 1.39438$$
$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.377783 & -0.484833 \\ \\ -0.484833 & 0.622217 \end{pmatrix}$$
$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.622217 & 0.484833 \\ \\ 0.484833 & 0.377783 \end{pmatrix}$$
$$\theta = -0.120031\pi.$$

Punto in alto: $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = 1.02112, \quad \lambda_2 = 1.43294$$
$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.165955 & -0.37204 \\ \\ -0.37204 & 0.834045 \end{pmatrix}$$
$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.834045 & 0.37204 \\ \\ 0.37204 & 0.165955 \end{pmatrix}$$
$$\theta = -0.105698\pi.$$

Punto a sinistra: $\zeta_1 = -\frac{1}{2}$, $\zeta_2 = 0$

$$\lambda_1 = 1.08223, \quad \lambda_2 = 1.29104$$
$$[\mathbf{P}_1] = \begin{pmatrix} 0.460448 & -0.498433 \\ -0.498433 & 0.539552 \end{pmatrix}$$
$$[\mathbf{P}_2] = \begin{pmatrix} 0.539552 & 0.498433 \\ 0.498433 & 0.460448 \end{pmatrix}$$
$$\theta = -0.0675678\pi.$$

Rapporto tra le aree

Occorre integrare la espressione del determinante del gradiente della deformazione sul dominio della parametrizzazione. Risulta

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-\zeta_1^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-\zeta_1^2}} \det \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))d\zeta_2 d\zeta_1 = 1.2412$$