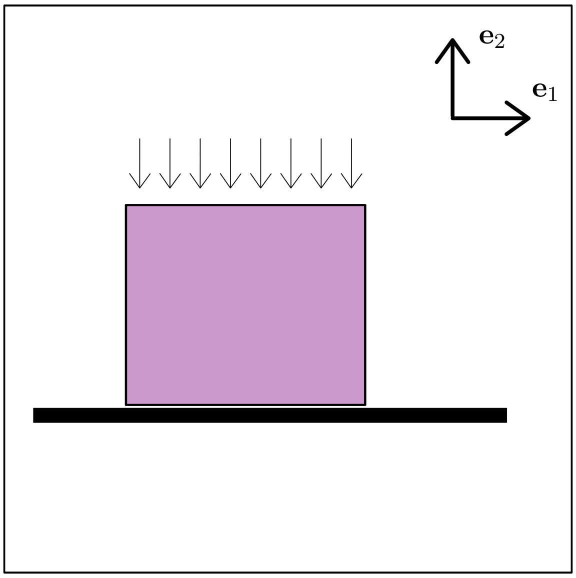
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di parallelepipedo, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $-p\mathbf{e}_2$ sulla faccia superiore, come in figura.

Il corpo sia disposto su un supporto rigido in modo che la faccia inferiore possa scorrere ma non possa distaccarsene.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sugli atti di moto;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Se i moduli di Lamé del materiale sono

$$\lambda = 5.6 \times 10^{10} N/m^2; \quad \mu = 2.6 \times 10^{10} N/m^2,$$

e $\ell_1 = 0.32\ m, \ell_2 = 0.26\ m, \ell_3 = 0.10\ m$, quale è il valore di p a cui corrisponde un allungamento relativo $\varepsilon_{11} = 10^{-7}$?

Atti di moto compatibili con i vincoli

Gli atti di moto test sono descritti dalla espressione

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_O + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_O). \tag{1}$$

Fissato il polo $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}$ al centro della faccia inferiore, le posizioni della faccia inferiore sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} + \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_3 \mathbf{e}_3. \tag{2}$$

La velocità corrispondente è

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_3 \mathbf{e}_3). \tag{3}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_3 \mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \tag{4}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia nullo il polinomio

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2 + \zeta_1 (\mathbf{G}\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 + \zeta_3 (\mathbf{G}\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 \tag{5}$$

è che risulti

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{6}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{7}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \tag{8}$$

In un atto di moto *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{w}_{\mathsf{O}}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{w}_{\mathsf{O}}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{G}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Risultante e momento risultante delle forze attive

$$\mathbf{f}^a = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} (-p\mathbf{e}_2)\, d\zeta_1 d\zeta_3 = -p\ell_1\ell_3\, \mathbf{e}_2 \tag{10}$$

$$\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}} (\ell_2 \mathbf{e}_2 + \zeta_1 \mathbf{e}_1 + \zeta_3 \mathbf{e}_3) \otimes (-p\mathbf{e}_2)\, d\zeta_1 d\zeta_3 = -p\ell_1\ell_2\ell_3\, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \tag{11}$$

$$[\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{12}$$

Principio di bilancio

Dal principio della potenza virtuale si ha in particolare che, essendo nulla la potenza delle forze reattive per atti di moto compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}} + \left(\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} - \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3\right) \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{v}} = 0. \tag{13}$$

Risultando in questo caso

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}} = 0, \tag{14}$$

occorre richiedere che sia

$$\left(\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} - \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3\right) \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{v}} = 0, \tag{15}$$

che in forma di matrici si scrive

$$-\ell_1\ell_2\ell_3 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}+p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

Espandendo il prodotto scalare si ottiene

$$-\ell_1\ell_2\ell_3\big(\sigma_{11}g_{11} + \sigma_{12}g_{12} + \sigma_{13}g_{13} + (\sigma_{22} - p)g_{22} + \sigma_{31}g_{31} + \sigma_{32}g_{32} + \sigma_{33}g_{33}\big) = 0, \tag{17}$$

che può scriversi anche come prodotto di una matrice riga con una matrice colonna

$$-\ell_1\ell_2\ell_3 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & (\sigma_{22}+p) & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{22} \\ g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{18}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore dei parametri g_{ij}. Deve dunque essere

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad (\sigma_{22} + p) = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \tag{19}$$

La tensione $\mathbf{T}$, essendo un tensore simmetrico, risulta completamente determinata. La sua matrice è

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Dilatazione infinitesima

La dilatazione infinitesima deve essere tale che la risposta sia la tensione calcolata. Pertanto essa è data dalla espressione

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{T})\mathbf{I}\right) \tag{21}$$

da cui si ottiene

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda p}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{(\lambda+\mu)p}{\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda p}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Campo di spostamento

Il campo di spostamento è

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{23}$$

Lo spostamento sulla faccia inferiore è

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(\zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3). \tag{24}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})(\zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)\big)\cdot\mathbf{e}_2 = 0. \tag{25}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia nullo il polinomio

$$\mathbf{u}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 + \zeta_1(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \zeta_3(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 \tag{26}$$

è che risulti

$$\mathbf{u}_{\mathsf{O}}\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{27}$$
$$(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{28}$$
$$(\mathbf{E}+\boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 = 0. \tag{29}$$

Dalla prima si ha che lo spostamento $\mathbf{u}_{\mathsf{O}}$ può essere un qualsiasi vettore ortogonale a $\mathbf{e}_2$. Dalle altre due, indicando la matrice della rotazione infinitesima $\boldsymbol{\Theta}$ con

$$[\boldsymbol{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

si ottiene

$$\varepsilon_{21} + \theta_3 = 0, \quad \varepsilon_{23} - \theta_1 = 0. \tag{31}$$

Si ha dunque, sostituendo i valori di $\mathbf{E}$,

$$\theta_3 = 0, \quad \theta_1 = 0, \tag{32}$$

restando indeterminato il valore di θ_2.

Forze reattive

Le equazioni di bilancio, essendo $\mathbf{T}$ simmetrico, si possono scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{33}$$

$$\mathbf{M}_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3. \tag{34}$$

Pertanto

$$\mathbf{M}_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{M}^a_{\mathsf{x_O}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{x_O}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^r_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3 - \mathbf{M}^a_{\mathsf{x_O}}. \tag{35}$$

Risulta dunque

$$[\mathbf{M}^r_{\mathsf{x_O}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{36}$$

Infine

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^r = -\mathbf{f}^a = p\ell_1\ell_3\,\mathbf{e}_2. \tag{37}$$