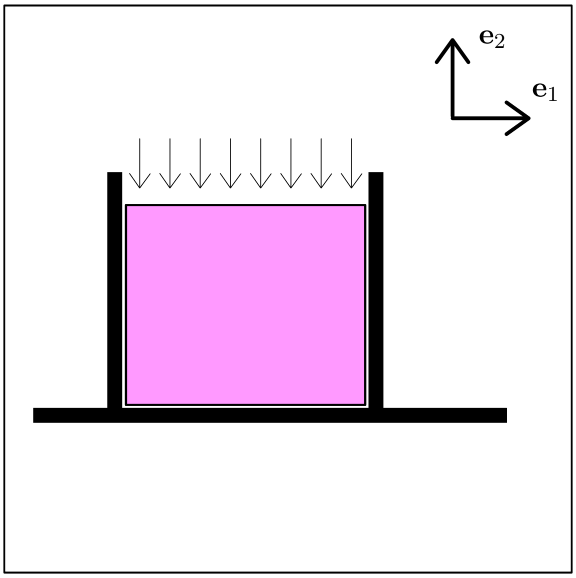
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di parallelepipedo, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $-p\mathbf{e}_2$ sulla faccia superiore, come in figura.

Il corpo sia disposto in un contenitore rigido in modo che la faccia superiore resti libera e le altre facce possano scorrere ma non distaccarsi dalla superficie del contenitore.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sugli atti di moto;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Atti di moto compatibili con i vincoli

Gli atti di moto test sono descritti dalla espressione

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}). \tag{1}$$

Il polo $\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{O}$ sia al centro della faccia inferiore.

Le condizioni imposte dal vincolo sono: sulla faccia inferiore

$$(\mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}\,(\zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{2}$$

sulla faccia destra

$$\left(\mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}\left(\frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3\right)\right) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{3}$$

sulla faccia sinistra

$$\left(\mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}\left(-\frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3\right)\right)\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{4}$$

sulla faccia anteriore

$$\left(\mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}\left(\frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2\right)\right)\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \tag{5}$$

sulla faccia posteriore

$$\left(\mathbf{w}_\mathsf{O} + \mathbf{G}\left(-\frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2\right)\right)\cdot\mathbf{e}_3 = 0. \tag{6}$$

Deve pertanto essere

$$\mathbf{w}_\mathsf{O}\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{7}$$
$$\mathbf{w}_\mathsf{O}\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{8}$$
$$\mathbf{w}_\mathsf{O}\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \tag{9}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{10}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 = 0, \tag{11}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{12}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{13}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 = 0, \tag{14}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \tag{15}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = 0, \tag{16}$$
$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 = 0. \tag{17}$$

In un atto di moto *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{w}_\mathsf{O}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{w}_\mathsf{O}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad [\mathbf{G}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & g_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{18}$$

Risultante e momento risultante delle forze attive

$$\mathbf{f}^a = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}}\int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}}(-p\,\mathbf{e}_2)\,d\zeta_1 d\zeta_3 = -p\,\ell_1\ell_3\,\mathbf{e}_2 \tag{19}$$

$$\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}}\int_{-\frac{\ell_1}{2}}^{\frac{\ell_1}{2}}(\ell_2\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)\otimes(-p\,\mathbf{e}_2)\,d\zeta_1 d\zeta_3 = -p\,\ell_1\ell_3\ell_2\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 \tag{20}$$

$$[\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}}] = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ell_1\ell_2\ell_3. \tag{21}$$

Principio di bilancio

Dal principio della potenza virtuale si ha in particolare che, essendo nulla la potenza delle forze reattive per atti di moto compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{w}_{\mathsf{O}}^{\mathrm{v}} + \left(\mathbf{M}_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}}^a - \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3\right) \cdot \mathbf{G}^{\mathrm{v}} = 0, \tag{22}$$

che in questo caso fornisce

$$-(\sigma_{22} + p)g_{11} = 0. \tag{23}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore di g_{11}. Deve dunque essere

$$\sigma_{22} = -p. \tag{24}$$

La tensione $\mathbf{T}$ risulta solo parzialmente determinata e la sua matrice può essere descritta nel modo seguente

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & -p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Campo di spostamento e dilatazione infinitesima

Il campo di spostamento è

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{26}$$

Le condizioni di vincolo sono: sulla faccia inferiore

$$(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})(\zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{27}$$

sulla faccia destra

$$\left(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})\left(\frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3\right)\right) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{28}$$

sulla faccia sinistra

$$\left(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})\left(-\frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3\right)\right) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{29}$$

sulla faccia anteriore

$$\left(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})\left(\frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2\right)\right) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{30}$$

sulla faccia posteriore

$$\left(\mathbf{u}_{\mathsf{O}} + (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Theta})\left(-\frac{\ell_3}{2}\mathbf{e}_3 + \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2\right)\right) \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{31}$$

Deve pertanto essere

$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{32}$$
$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{33}$$
$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{34}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{35}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{36}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{37}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{38}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{39}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{40}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \tag{41}$$
$$(\mathbf{E} + \mathbf{\Theta})\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{42}$$

Indicando la matrice della rotazione infinitesima $\mathbf{\Theta}$ con

$$[\mathbf{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

dalle condizioni di vincolo precedenti si ottiene

$$\varepsilon_{11} = 0, \tag{44}$$
$$\varepsilon_{12} - \theta_3 = 0, \tag{45}$$
$$\varepsilon_{13} + \theta_2 = 0, \tag{46}$$
$$\varepsilon_{21} + \theta_3 = 0, \tag{47}$$
$$\varepsilon_{23} - \theta_1 = 0, \tag{48}$$
$$\varepsilon_{31} - \theta_2 = 0, \tag{49}$$
$$\varepsilon_{32} + \theta_1 = 0, \tag{50}$$
$$\varepsilon_{33} = 0, \tag{51}$$
$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \tag{52}$$
$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{53}$$
$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \tag{54}$$

Si ha dunque, per la simmetria di $\mathbf{E}$,

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0, \\ \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0 \end{gathered} \tag{55}$$

mentre lo spostamento $\mathbf{u}_O$ risulta nullo. La matrice di $\mathbf{E}$ può essere descritta nel modo seguente

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Risposta del materiale

La tensione e la deformazione sono legate dalla funzione di risposta del materiale

$$\mathbf{T} = \lambda\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \tag{57}$$

che fornisce

$$\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{22}, \tag{58}$$
$$\sigma_{12} = 0, \tag{59}$$
$$\sigma_{13} = 0, \tag{60}$$
$$-p = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}, \tag{61}$$
$$\sigma_{23} = 0, \tag{62}$$
$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{22}, \tag{63}$$

da cui si ottiene

$$\varepsilon_{22} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu}, \tag{64}$$
$$\sigma_{11} = -\frac{\lambda p}{\lambda + 2\mu}, \tag{65}$$
$$\sigma_{12} = 0, \tag{66}$$
$$\sigma_{13} = 0, \tag{67}$$
$$\sigma_{23} = 0, \tag{68}$$
$$\sigma_{33} = -\frac{\lambda p}{\lambda + 2\mu}. \tag{69}$$

La tensione e la dilatazione infinitesima risultano pertanto completamente determinate e le loro matrici sono

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda p}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Forze reattive

Le equazioni di bilancio, essendo $\mathbf{T}$ simmetrico, si possono scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{71}$$
$$\mathbf{M}_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3. \tag{72}$$

Pertanto

$$\mathbf{M}_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{M}^a_{\mathsf{x_O}} + \mathbf{M}^r_{\mathsf{x_O}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^r_{\mathsf{x_O}} = \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3 - \mathbf{M}^a_{\mathsf{x_O}}. \tag{73}$$

Risulta dunque

$$[\mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_O}] = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda p}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda p}{\lambda+2\mu} \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{74}$$

Infine

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^r = -\mathbf{f}^a = p\ell_1\ell_3\,\mathbf{e}_2. \tag{75}$$