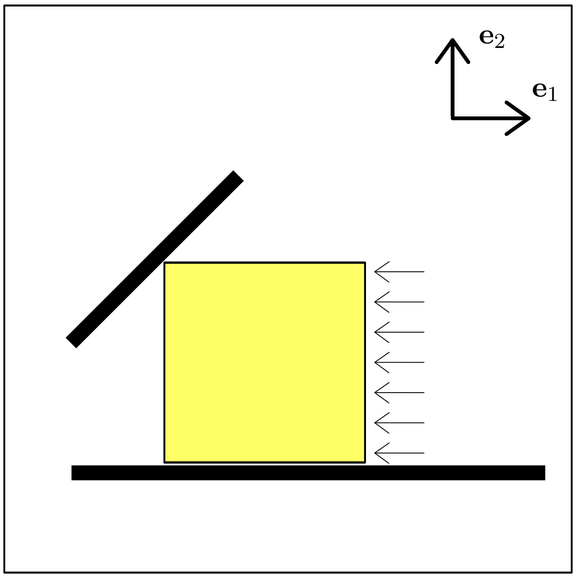
Corpo affine elastico vincolato



Un corpo a forma di parallelepipedo, con spigoli paralleli a $\mathbf{e}_1$ di lunghezza ℓ_1, spigoli paralleli a $\mathbf{e}_2$ di lunghezza ℓ_2 e spigoli paralleli a $\mathbf{e}_3$ di lunghezza ℓ_3, sia soggetto ad un sistema di forze costituito da una distribuzione uniforme $-p\mathbf{e}_1$ sulla faccia destra, come in figura.

Il corpo sia disposto su un supporto rigido in modo che la faccia inferiore possa scorrere ma non possa distaccarsene, mentre lo spigolo in alto a sinistra sia vincolato a scorrere sul piano di normale $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$, come in figura.

Utilizzando il modello di corpo affine e assumendo che il materiale sia elastico e isotropo:

1. descrivere i vincoli sul campo di spostamento e sugli atti di moto;
2. calcolare la tensione, la dilatazione infinitesima, il campo di spostamento;
3. caratterizzare le forze reattive.

Atti di moto compatibili con i vincoli

Gli atti di moto test sono descritti dalla espressione

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{1}$$

Il polo $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}$ sia al centro dello spigolo sinistro della faccia superiore. Le posizioni della faccia inferiore sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} - \ell_2\mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

la velocità corrispondente è

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(-\ell_2\mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3). \tag{3}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(-\ell_2\mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{e}_1 + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \tag{4}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia nullo il polinomio

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2 - \ell_2\mathbf{G}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{G}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \zeta_1\mathbf{G}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 \tag{5}$$

è che risulti

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2 - \ell_2\mathbf{G}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\ell_1}{2}\mathbf{G}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \tag{8}$$

Le posizioni dello spigolo sinistro della faccia superiore sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} + \zeta_3\mathbf{e}_3. \tag{9}$$

La velocità corrispondente è

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_3\mathbf{e}_3). \tag{10}$$

La condizione imposta dal vincolo è

$$\big(\mathbf{w}_{\mathsf{O}} + \mathbf{G}(\zeta_3\mathbf{e}_3)\big) \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 0. \tag{11}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia nullo il polinomio

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \zeta_3\mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \tag{12}$$

è che risulti

$$\mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_{\mathsf{O}} \cdot \mathbf{e}_2, \tag{13}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{G}\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2. \tag{14}$$

In un atto di moto *compatibile con i vincoli* la terna delle componenti di $\mathbf{w}_{\mathsf{O}}$ e la matrice del gradiente della velocità hanno dunque in generale la forma

$$[\mathbf{w}_{\mathsf{O}}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} \ell_2 g_{22} \\ \ell_2 g_{22} \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{G}^{\mathrm{v}}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Risultante e momento risultante delle forze attive

Le posizioni della faccia destra sono descritte dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}} - \frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \ell_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3 \tag{16}$$

$$\mathbf{f}^a = \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} (-p\mathbf{e}_1)\, d\zeta_2 d\zeta_3 = -p\ell_2\ell_3\,\mathbf{e}_1 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} &= \int_{-\frac{\ell_3}{2}}^{\frac{\ell_3}{2}} \int_{-\frac{\ell_2}{2}}^{\frac{\ell_2}{2}} (-\frac{\ell_2}{2}\mathbf{e}_2 + \ell_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + \zeta_3\mathbf{e}_3) \otimes (-p\mathbf{e}_1)\, d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &= p\ell_2\ell_3(\frac{\ell_2}{2}\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 - \ell_1\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)\end{aligned} \tag{18}$$

$$[\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}}] = \begin{pmatrix} -p & p\dfrac{\ell_2}{2\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1\ell_2\ell_3. \tag{19}$$

Principio di bilancio

Dal principio della potenza virtuale si ha in particolare che, essendo nulla la potenza delle forze reattive per atti di moto compatibili con i vincoli, deve essere

$$\mathbf{f}^a \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{v}}_{\mathsf{O}} + \left(\mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_{\mathsf{O}}} - \mathbf{T}\,\ell_1\ell_2\ell_3\right)\cdot \mathbf{G}^{\mathrm{v}} = 0. \tag{20}$$

Sostituendo i valori calcolati, dividendo per il volume e cambiando segno, la espressione precedente diventa

$$\begin{pmatrix} \dfrac{p}{\ell_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ell_2 g_{22} \\ \ell_2 g_{22} \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}+p & \sigma_{12} - p\dfrac{\ell_2}{2\ell_1} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

Espandendo il prodotto scalare si ottiene

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{11}+p) & (\sigma_{12} - p\dfrac{\ell_2}{2\ell_1}) & (\sigma_{22} + p\dfrac{\ell_2}{\ell_1}) & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{22} \\ g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

Questa condizione deve valere per qualsiasi valore dei parametri g_{ij}. Deve dunque essere

$$(\sigma_{11}+p)=0,\quad (\sigma_{12}-p\frac{\ell_2}{2\ell_1})=0,\quad (\sigma_{22}+p\frac{\ell_2}{\ell_1})=0,\quad \sigma_{31}=0,\quad \sigma_{32}=0,\quad \sigma_{33}=0. \tag{23}$$

La tensione $\mathbf{T}$, essendo un tensore simmetrico, ne risulta completamente determinata. La sua matrice è

$$[\mathbf{T}]=\begin{pmatrix} -p & p\frac{\ell_2}{2\ell_1} & 0 \\ p\frac{\ell_2}{2\ell_1} & -p\frac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Dilatazione infinitesima

La dilatazione infinitesima deve essere tale che la risposta sia la tensione calcolata. Pertanto essa è data dalla espressione

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2\mu}\Big(\mathbf{T}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{T})\mathbf{I}\Big) \tag{25}$$

da cui si ottiene

$$\varepsilon_{11}=-\frac{1}{2\mu}\left(1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(1+\frac{\ell_2}{\ell_1})\right)p \tag{26}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{\ell_2}{4\mu\ell_1}p \tag{27}$$

$$\varepsilon_{22}=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(1+\frac{\ell_2}{\ell_1})\right)p \tag{28}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}(1+\frac{\ell_2}{\ell_1})\right)p \tag{29}$$

$$\varepsilon_{13}=0 \tag{30}$$

$$\varepsilon_{23}=0 \tag{31}$$

Campo di spostamento

Il campo di spostamento è

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}})=\mathbf{u}_{\mathsf{O}}+(\mathbf{E}+\mathbf{\Theta})(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{O}}). \tag{32}$$

Ponendo con $\mathbf{u}_{\mathsf{O}}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$ e indicando la matrice della rotazione infinitesima $\mathbf{\Theta}$ con

$$[\mathbf{\Theta}]=\begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

dalle condizioni di vincolo risulta

$$u_1 = \ell_2 \varepsilon_{22} \tag{34}$$
$$u_2 = \ell_2 \varepsilon_{22} \tag{35}$$
$$\varepsilon_{21} + \theta_3 = 0 \tag{36}$$
$$\varepsilon_{23} - \theta_1 = 0 \tag{37}$$
$$\varepsilon_{13} + \theta_2 = 0 \tag{38}$$

Si ha dunque, con riferimento alle espressioni calcolate,

$$u_1 = -\frac{\ell_2}{2\mu}\left(\frac{\ell_2}{\ell_1} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\right) p \tag{39}$$
$$u_2 = -\frac{\ell_2}{2\mu}\left(\frac{\ell_2}{\ell_1} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\right)\right) p \tag{40}$$
$$\theta_3 = -\frac{\ell_2}{4\mu\ell_1} p \tag{41}$$
$$\theta_1 = 0 \tag{42}$$
$$\theta_2 = 0 \tag{43}$$

restando indeterminata la terza componente dello spostamento $\mathbf{u}_{\mathsf{O}}$.

Forze reattive

Le equazioni di bilancio, essendo $\mathbf{T}$ simmetrico, si possono scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{o}, \tag{44}$$
$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} = \mathbf{T}\, \ell_1 \ell_2 \ell_3. \tag{45}$$

Pertanto

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} = \mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} + \mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_\mathsf{O}} = \mathbf{T}\, \ell_1 \ell_2 \ell_3 - \mathbf{M}^a_{\mathbf{x}_\mathsf{O}}. \tag{46}$$

Risulta dunque

$$[\mathbf{M}^r_{\mathbf{x}_\mathsf{O}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p\dfrac{\ell_2}{2\ell_1} & -p\dfrac{\ell_2}{\ell_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ell_1 \ell_2 \ell_3. \tag{47}$$

Infine

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^r = -\mathbf{f}^a = p\ell_2\ell_3\, \mathbf{e}_1. \tag{48}$$