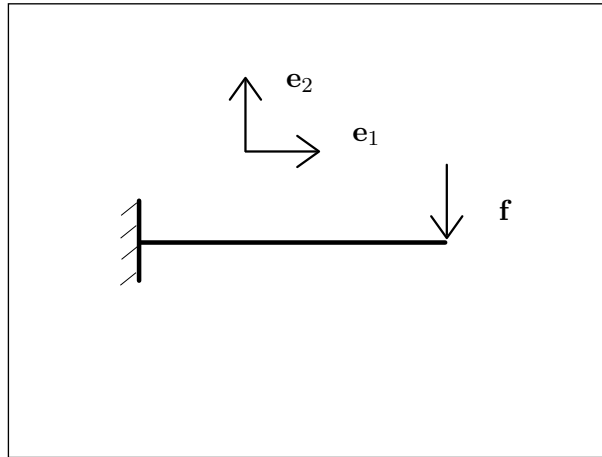


## Mensola



La forza applicata al bordo sia

$$\mathbf{f} = -f \mathbf{e}_2.$$

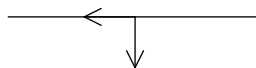
La trave sia lunga  $L$ .

- Si faccia un elenco sia delle condizioni di vincolo che delle condizioni al bordo per la sollecitazione, motivando queste ultime.
- Si calcolino le sollecitazioni (descrittori della tensione)  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  e le reazioni vincolari.
- Si calcolino le componenti  $u$  e  $v$  dello spostamento e la rotazione  $\theta$ .

Si utilizzi il modello di Eulero-Bernoulli.

*N.B. Nella esposizione della soluzione che segue alcune espressioni appaiono in una forma che può sembrare poco naturale, per la presenza di livelli di parentesi non necessari o per il modo in cui sono ordinati i termini, pur essendo del tutto corrette. Questo è dovuto al fatto che tutte le espressioni sono generate automaticamente e non è sempre possibile intervenire sulle regole di semplificazione e di rappresentazione. Si è preferito evitare ogni intervento di editing per non rischiare di introdurre degli errori.*

## Base adattata alla trave



La basa adattata alla trave corrisponde alla scelta della parametrizzazione.

### Integrazione delle equazioni di bilancio

Le equazioni di bilancio sono

$$\begin{aligned}N'(\zeta) &= 0, \\Q'(\zeta) &= 0, \\Q(\zeta) + M'(\zeta) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Integrando si ottiene

$\begin{aligned}N(\zeta) &= N_0, \\Q(\zeta) &= Q_0, \\M(\zeta) &= M_0 - Q_0 \zeta.\end{aligned}$	(2)
--	-----

### Vincoli

La deformazione deve essere tale che

$\begin{aligned}u(L) &= 0, \\v(L) &= 0, \\\theta(L) &= 0.\end{aligned}$	(3)
---	-----

### Equazioni di bilancio al bordo

In corrispondenza delle soluzioni (2) la espressione della potenza totale si riduce ai soli termini al bordo. Richiedendo che questa parte residua sia nulla per qualsiasi atto di moto compatibile con i vincoli si ottengono le seguenti condizioni

$\begin{aligned}M(0) &= 0, \\N(0) &= 0, \\f + Q(0) &= 0.\end{aligned}$	(4)
--	-----

Sostituendo le (2) nelle (4) si ha

$$\begin{aligned}M_0 &= 0, \\N_0 &= 0, \\f + Q_0 &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

La soluzione di questo sistema di equazioni algebriche è

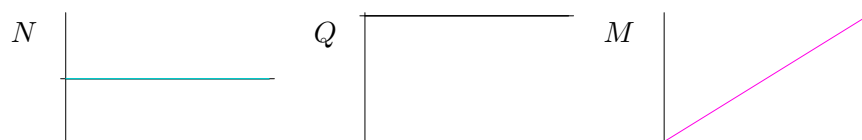
$$\boxed{\begin{array}{l} M_0 = 0, \\ N_0 = 0, \\ Q_0 = -f. \end{array}} \quad (6)$$

### Sollecitazioni

La sostituzione delle (6) nelle (2) fornisce

$$\begin{aligned} N(\zeta) &= 0, \\ Q(\zeta) &= -f, \\ M(\zeta) &= f \zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

I grafici corrispondenti sono i seguenti



### Funzioni di risposta del materiale

Sia

$$\begin{aligned} N(\zeta) &= YA u'(\zeta), \\ M(\zeta) &= YJ \theta'(\zeta). \end{aligned} \quad (8)$$

A queste va aggiunta la espressione del vincolo di scorrimento nullo del modello di trave di Eulero-Bernoulli

$$v'(\zeta) = \theta(\zeta). \quad (9)$$

### Spostamenti

Sostituendo le (7) nelle (8) si ottiene, integrando queste e anche la (9),

$$\boxed{\begin{array}{l} u(\zeta) = u_0, \\ v(\zeta) = v_0 + \theta_0 \zeta + \frac{f \zeta^3}{6 YJ}, \\ \theta(\zeta) = \theta_0 + \frac{f \zeta^2}{2 YJ}. \end{array}} \quad (10)$$

Richiedendo alle (10) di soddisfare le condizioni di vincolo (3), si ottiene

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ L\theta_0 + v_0 + \frac{fL^3}{6YJ} &= 0, \\ \theta_0 + \frac{fL^2}{2YJ} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

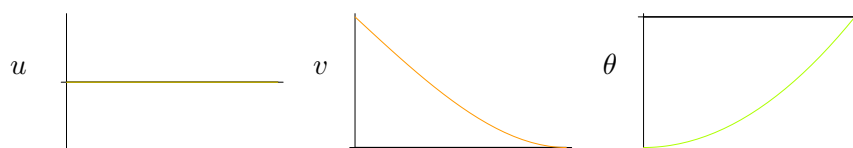
La soluzione di tale sistema di equazioni è

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ v_0 &= \frac{fL^3}{3YJ}, \\ \theta_0 &= -\frac{(fL^2)}{2YJ}. \end{aligned}} \quad (12)$$

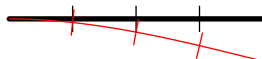
La sostituzione delle (12) nelle (10) fornisce infine

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= 0, \\ v(\zeta) &= \frac{f(L-\zeta)^2(2L+\zeta)}{6YJ}, \\ \theta(\zeta) &= \frac{f(-L^2+\zeta^2)}{2YJ}. \end{aligned} \quad (13)$$

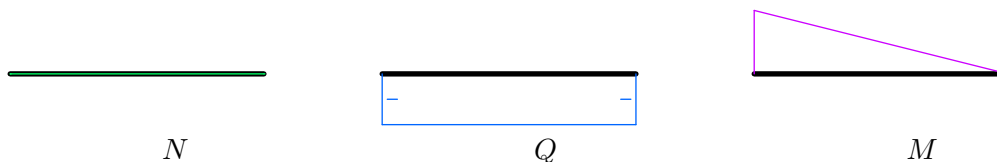
I grafici corrispondenti sono i seguenti



## Deformazione



## Diagramma tecnico delle sollecitazioni



### Forze e momenti alle estremità

Le componenti  $s_1^-$  e  $s_2^-$  nella base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  della forza  $\mathbf{s}^-$ , le componenti  $s_1^+$  e  $s_2^+$  della forza  $\mathbf{s}^+$  e le componenti  $m^-$  e  $m^+$  su  $\mathbf{e}_3$  dei momenti  $\mathbf{m}^-$  e  $\mathbf{m}^+$  risultano

$$\begin{aligned}
 s_1^- &= 0, \\
 s_2^- &= -f, \\
 m^- &= 0, \\
 s_1^+ &= 0, \\
 s_2^+ &= f, \\
 m^+ &= fL.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

### Note integrative

È qui aggiunta quella parte della formulazione del problema non riportata nella sintesi del calcolo per brevità. Si tratta della caratterizzazione delle reazioni vincolari e della costruzione delle condizioni di bilancio al bordo. Vengono anche dichiarate esplicitamente le regole seguite per la costruzione del diagramma tecnico delle sollecitazioni.

### Caratterizzazione delle reazioni vincolari

Gli atti di moto compatibili con i vincoli sono tali che

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \mathbf{w}^v(L) &= \mathbf{o}, \\
 \boldsymbol{\omega}^v(L) &= \mathbf{o}.
 \end{aligned}
 }
 \tag{15}$$

Essendo presenti dei vincoli, occorre assumere l'esistenza di *forze reattive* al bordo (dette anche *reazioni vincolari*), non note a priori, caratterizzate dalla proprietà di *spendere potenza nulla in qualsiasi atto di moto compatibile con i vincoli*.

Indicando con  $(\mathbf{s}^-)^r$ ,  $(\mathbf{m}^-)^r$ ,  $(\mathbf{s}^+)^r$ ,  $(\mathbf{m}^+)^r$  i descrittori della parte reattiva delle forze al bordo  $(\mathbf{s}^-, \mathbf{m}^-)$  e  $(\mathbf{s}^+, \mathbf{m}^+)$ , deve dunque essere

$$(\mathbf{s}^-)^r \cdot \mathbf{w}^v(0) + (\mathbf{m}^-)^r \cdot \boldsymbol{\omega}^v(0) + (\mathbf{s}^+)^r \cdot \mathbf{w}^v(L) + (\mathbf{m}^+)^r \cdot \boldsymbol{\omega}^v(L) = 0,
 \tag{16}$$

per ogni atto di moto che soddisfi le (15). Semplificando la (16) si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^-)^r \cdot \mathbf{w}^v(0) + (\mathbf{m}^-)^r \cdot \boldsymbol{\omega}^v(0) &= 0, \\ \forall \mathbf{w}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \forall \boldsymbol{\omega}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_3\}, \end{aligned} \quad (17)$$

che implica

$$(\mathbf{s}^-)^r = \mathbf{o}, \quad (18)$$

$$(\mathbf{m}^-)^r = \mathbf{o}. \quad (19)$$

### Costruzione delle equazioni di bilancio al bordo

In corrispondenza delle soluzioni (2) la espressione della potenza totale si riduce ai soli termini al bordo. Pertanto resta da imporre che per qualsiasi atto di moto risulti

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}(0) + (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L)) \cdot \mathbf{w}(L) \\ + (\mathbf{m}^- + \mathbf{m}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) + (\mathbf{m}^+ - \mathbf{m}(L)) \cdot \boldsymbol{\omega}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Per atti di moto compatibili con i vincoli (15) la espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}^v(0) + (\mathbf{m}^- + \mathbf{m}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega}^v(0) &= 0, \\ \forall \mathbf{w}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \forall \boldsymbol{\omega}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_3\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Indicando con  $(\mathbf{m}^-)^a$ ,  $(\mathbf{m}^+)^a$ ,  $(\mathbf{s}^-)^a$ ,  $(\mathbf{s}^+)^a$  i descrittori delle forze al bordo note, cioè *assegnate* esplicitamente, e ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^- &= (\mathbf{s}^-)^a + (\mathbf{s}^-)^r, \\ \mathbf{m}^- &= (\mathbf{m}^-)^a + (\mathbf{m}^-)^r, \\ \mathbf{s}^+ &= (\mathbf{s}^+)^a + (\mathbf{s}^+)^r, \\ \mathbf{m}^+ &= (\mathbf{m}^+)^a + (\mathbf{m}^+)^r, \end{aligned} \quad (22)$$

la (21) diventa

$$\begin{aligned} ((\mathbf{s}^-)^a + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}^v(0) + ((\mathbf{m}^-)^a + \mathbf{m}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega}^v(0) &= 0, \\ \forall \mathbf{w}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \forall \boldsymbol{\omega}^v(0) \in \text{span}\{\mathbf{e}_3\}. \end{aligned} \quad (23)$$

In questa espressione le forze reattive sono filtrate via dalla (16). Deve dunque essere

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{s}^-)^a + \mathbf{s}(0) &= \mathbf{o}, \\ (\mathbf{m}^-)^a + \mathbf{m}(0) &= \mathbf{o}. \end{aligned}} \quad (24)$$

L'unica forza assegnata in questo caso è

$$(\mathbf{s}^-)^a := -f \mathbf{e}_2. \quad (25)$$

Le (24) diventano pertanto

$$\begin{aligned} -f \mathbf{e}_2 + \mathbf{s}(0) &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{m}(0) &= \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (26)$$

Utilizzando le espressioni

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\zeta) &= N(\zeta) \bar{\mathbf{a}}_1 + Q(\zeta) \bar{\mathbf{a}}_2, \\ \mathbf{m}(\zeta) &= M(\zeta) \bar{\mathbf{a}}_3, \end{aligned} \quad (27)$$

si ottengono dalle (26)

$$\begin{aligned} -f \mathbf{e}_2 + (N(0) \bar{\mathbf{a}}_1 + Q(0) \bar{\mathbf{a}}_2) &= \mathbf{o}, \\ M(0) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

e quindi le espressioni scalari

$$\begin{aligned} -f \mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 + (N(0) \bar{\mathbf{a}}_1 + Q(0) \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 &= 0, \\ -f \mathbf{e}_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 + (N(0) \bar{\mathbf{a}}_2 + Q(0) \bar{\mathbf{a}}_2) \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 &= 0, \\ M(0) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Sostituendo i valori di  $\bar{\mathbf{a}}_1$  e  $\bar{\mathbf{a}}_2$  si ottengono infine le equazioni di bilancio al bordo (4).

### Calcolo delle forze e dei momenti alle estremità

Dalle (20), considerando atti di moto generici, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^- &= -\mathbf{s}(0), \\ \mathbf{m}^- &= -\mathbf{m}(0), \\ \mathbf{s}^+ &= \mathbf{s}(L), \\ \mathbf{m}^+ &= \mathbf{m}(L). \end{aligned} \quad (30)$$

Queste, attraverso le (27), diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^- &= -N(0) \bar{\mathbf{a}}_1 - Q(0) \bar{\mathbf{a}}_2, \\ \mathbf{m}^- &= -M(0) \bar{\mathbf{a}}_3, \\ \mathbf{s}^+ &= N(L) \bar{\mathbf{a}}_1 + Q(L) \bar{\mathbf{a}}_2, \\ \mathbf{m}^+ &= M(L) \bar{\mathbf{a}}_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Sostituendo le espressioni (7) di  $N, Q, M$ , si ottengono le forze e i momenti alle estremità. Le (14) si ottengono ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^- &= s_1^- \mathbf{e}_1 + s_2^- \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{m}^- &= m^- \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{s}^+ &= s_1^+ \mathbf{e}_1 + s_2^+ \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{m}^+ &= m^+ \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (32)$$

Si ricordi che  $\mathbf{s}^-$  e  $\mathbf{m}^-$  sono la forza e il momento applicati nella estremità corrispondente a  $\zeta = 0$ , che in questo caso è la estremità destra.

### Calcolo delle reazioni vincolari

Le forze e i momenti alle estremità appena calcolati comprendono sia la parte assegnata che una parte reattiva. La parte reattiva si ottiene dalle (22). In questo caso risulta

$$\begin{array}{l} (\mathbf{s}^-)^r = \mathbf{o}, \\ (\mathbf{m}^-)^r = \mathbf{o}, \\ (\mathbf{s}^+)^r = -f \mathbf{e}_2, \\ (\mathbf{m}^+)^r = fL \mathbf{e}_3. \end{array} \quad (33)$$

Si noti che le espressioni calcolate sono coerenti con la caratterizzazione data a priori delle reazioni vincolari.

### Diagramma tecnico delle sollecitazioni (rappresentazione indipendente dalla parametrizzazione)

Le espressioni di  $N$ ,  $Q$  ed  $M$ , come quelle di  $u$ ,  $v$  e  $\theta$ , dipendono dalla parametrizzazione dell'asse. La base ortonormale  $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$  è legata alla parametrizzazione essendo  $\bar{\mathbf{a}}_1$  il vettore tangente all'asse nel verso della parametrizzazione. Tale parametrizzazione può essere scelta in due modi decidendo a quale estremità corrisponde  $\zeta = 0$ . È possibile dare una rappresentazione grafica delle soluzioni che non richieda la esplicita dichiarazione della parametrizzazione scelta ?

Mentre ai grafici di  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  si può affiancare il disegno della deformazione, che risulta naturalmente indipendente dalla parametrizzazione, per  $N$ ,  $Q$  ed  $M$  si pone il problema di stabilire una regola di rappresentazione.

Nei grafici riportati dopo le espressioni (7) l'intervallo sulle ascisse è sempre  $[0, L]$ . Si noti che modificando la scelta di  $\bar{\mathbf{a}}_1$  sia il valore di  $N$  che il valore di  $Q$  in ciascuna sezione (per i corrispondenti valori del parametro  $\zeta$ ) resta identico, mentre il valore di  $M$  cambia di segno [v. Es-7-1]. Questo motiva le seguenti regole di rappresentazione.

Sia per  $N$  che per  $Q$  si costruisce un grafico sul disegno dell'asse della trave riportando i valori nella direzione di  $\bar{\mathbf{a}}_2$  o in quella opposta e indicandone esplicitamente il segno.

Per  $M$  si usa invece la regola seguente: si riportano i valori di  $-M$  nella direzione di  $\bar{\mathbf{a}}_2$ . Si noti che modificando la parametrizzazione il disegno resta invariato, poiché cambia sia il verso di  $\bar{\mathbf{a}}_2$  che il segno di  $M$ . Si osservi poi che, essendo nel modello di Eulero-Bernoulli  $M = YJ v''$  e risultando di solito  $u$  molto piccolo rispetto a  $v$ , il grafico di  $M$  è, a meno di un fattore, anche il grafico della curvatura dell'asse dopo la deformazione. Trattandosi di  $-M$  si dice che il diagramma del momento è dalla parte della convessità o, con evidente significato, dalla parte delle "fibre tese".