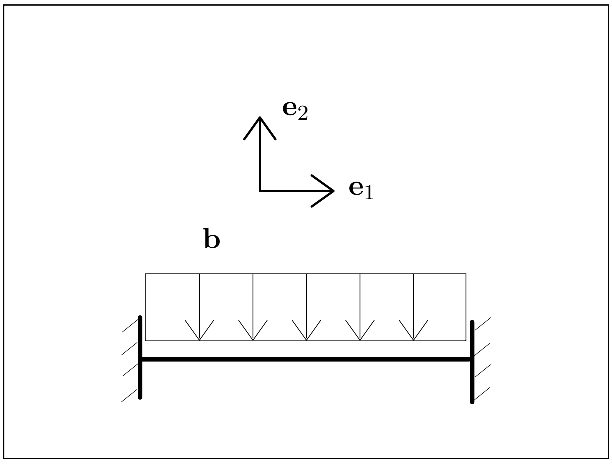
Trave con due incastri



La distribuzione di forze applicata sia

$$\mathbf{b} = -b\,\mathbf{e}_2.$$

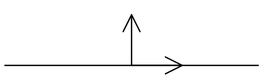
La trave sia lunga L.

- Si faccia un elenco sia delle condizioni di vincolo che delle condizioni al bordo per la sollecitazione, motivando queste ultime.
- Si calcolino le sollecitazioni (descrittori della tensione) N, Q, M e le reazioni vincolari.
- Si calcolino le componenti u e v dello spostamento e la rotazione θ.

Si utilizzi il modello di Eulero-Bernoulli.

N.B. Nella esposizione della soluzione che segue alcune espressioni appaiono in una forma che può sembrare poco naturale, per la presenza di livelli di parentesi non necessari o per il modo in cui sono ordinati i termini, pur essendo del tutto corrette. Questo è dovuto al fatto che tutte le espressioni sono generate automaticamente e non è sempre possibile intervenire sulle regole di semplificazione e di rappresentazione. Si è preferito evitare ogni intervento di editing per non rischiare di introdurre degli errori.

Base adattata alla trave



La basa adattata alla trave corrisponde alla scelta della parametrizzazione.

Integrazione delle equazioni di bilancio

Le equazioni di bilancio sono

$$
\begin{aligned}
N'(\zeta) &= 0\,,\\
-b + Q'(\zeta) &= 0\,,\\
Q(\zeta) + M'(\zeta) &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Integrando si ottiene

$$
\boxed{
\begin{aligned}
N(\zeta) &= N_0\,,\\
Q(\zeta) &= Q_0 + b\,\zeta\,,\\
M(\zeta) &= M_0 - Q_0\,\zeta - \frac{b\,\zeta^2}{2}\,.
\end{aligned}
}
\tag{2}
$$

Vincoli

La deformazione deve essere tale che

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u(0) &= 0\,,\\
v(0) &= 0\,,\\
\theta(0) &= 0\,,\\
u(L) &= 0\,,\\
v(L) &= 0\,,\\
\theta(L) &= 0\,.
\end{aligned}
}
\tag{3}
$$

Equazioni di bilancio al bordo

In corrispondenza delle soluzioni (2) la espressione della potenza totale si riduce ai soli termini al bordo. Per atti di moto compatibili con i vincoli tale parte residua risulta in questo caso identicamente nulla.

Funzioni di risposta del materiale

Sia

$$
\begin{aligned}
N(\zeta) &= YA\,u'(\zeta),\\
M(\zeta) &= YJ\,\theta'(\zeta).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A queste va aggiunta la espressione del vincolo di scorrimento nullo del modello di trave di Eulero-Bernoulli

$$
v'(\zeta) = \theta(\zeta). \tag{5}
$$

Spostamenti

Sostituendo le (2) nelle (4) si ottiene, integrando queste e anche la (5),

$$\boxed{\begin{aligned} u(\zeta) &= u_0 + \frac{L^2\, N_0\, \zeta\, \kappa}{YJ}\,, \\ v(\zeta) &= v_0 + \theta_0\, \zeta - \frac{\zeta^2\, \left(-12\, M_0 + 4\, Q_0\, \zeta + b\, \zeta^2\right)}{24\, YJ}\,, \\ \theta(\zeta) &= \frac{-\left(-6\, \theta_0\, YJ - 6\, M_0\, \zeta + 3\, Q_0\, \zeta^2 + b\, \zeta^3\right)}{6\, YJ}\,. \end{aligned}} \tag{6}$$

Richiedendo alle (6) di soddisfare le condizioni di vincolo (3), si ottiene

$$\begin{aligned} & u_0 = 0\,, \\ & v_0 = 0\,, \\ & \theta_0 = 0\,, \\ & u_0 + \frac{L^3\, N_0\, \kappa}{YJ} = 0\,, \\ & L\, \theta_0 + v_0 = \frac{L^2\, \left(b\, L^2 - 12\, M_0 + 4\, L\, Q_0\right)}{24\, YJ}\,, \\ & \frac{b\, L^3 - 6\, L\, M_0 + 3\, L^2\, Q_0 - 6\, \theta_0\, YJ}{6\, YJ} = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

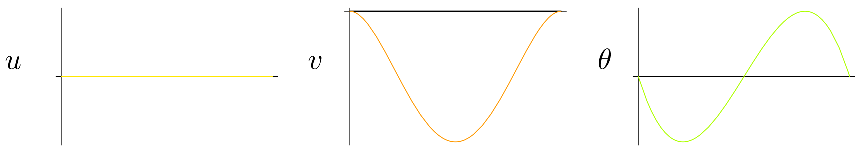
La soluzione di tale sistema di equazioni è

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= \frac{-\left(b\, L^2\right)}{12}\,, \\ N_0 &= 0\,, \\ Q_0 &= \frac{-\left(b\, L\right)}{2}\,, \\ u_0 &= 0\,, \\ v_0 &= 0\,, \\ \theta_0 &= 0\,. \end{aligned}} \tag{8}$$

La sostituzione delle (8) nelle (6) fornisce

$$
\begin{aligned}
u(\zeta) &= 0\,,\\
v(\zeta) &= \frac{-\left(b\,(L-\zeta)^2\,\zeta^2\right)}{24\,YJ}\,,\\
\theta(\zeta) &= \frac{-\left(b\,\zeta\,\left(L^2-3\,L\,\zeta+2\,\zeta^2\right)\right)}{12\,YJ}\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

I grafici corrispondenti sono i seguenti

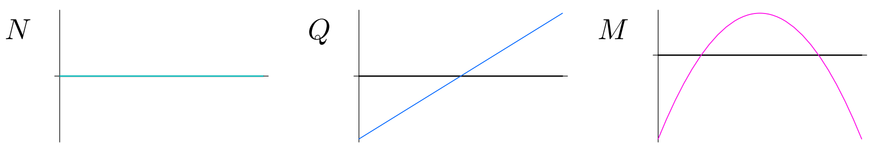


Sollecitazioni

La sostituzione delle (8) nelle (2) fornisce infine

$$
\begin{aligned}
N(\zeta) &= 0\,,\\
Q(\zeta) &= b\left(\frac{-L}{2}+\zeta\right)\,,\\
M(\zeta) &= \frac{-\left(b\,\left(L^2-6\,L\,\zeta+6\,\zeta^2\right)\right)}{12}\,.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

I grafici corrispondenti sono i seguenti



Deformazione

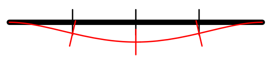
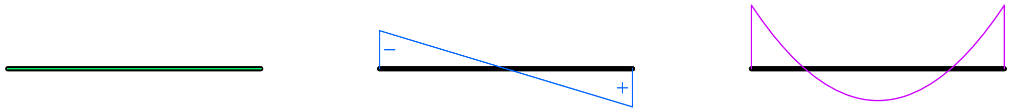


Diagramma tecnico delle sollecitazioni



N Q M

Forze e momenti alle estremità

Le componenti s_1^- e s_2^- nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ della forza s^-, le componenti s_1^+ e s_2^+ della forza s^+ e le componenti m^- e m^+ su $\mathbf{e}_3$ dei momenti m^- e m^+ risultano

$$
\begin{aligned}
{s_1}^- &= 0\,,\\
{s_2}^- &= \frac{b\,L}{2}\,,\\
m^- &= \frac{b\,L^2}{12}\,,\\
{s_1}^+ &= 0\,,\\
{s_2}^+ &= \frac{b\,L}{2}\,,\\
m^+ &= \frac{-\left(b\,L^2\right)}{12}\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$