Deformazioni

La introduzione degli assi coordinati nella geometria, fatta da Cartesio, è stato uno dei passi più importanti nel progresso della matematica, in quanto ha ricondotto i metodi della geometria al calcolo di grandezze numeriche. Ma, ai fini del ragionamento fisico, a differenza che nel calcolo, è bene evitare di introdurre esplicitamente le coordinate cartesiane e fissare l'attenzione prima su un punto dello spazio invece che sulle sue tre coordinate, e sulla intensità e sulla direzione di una forza invece che sulle sue tre componenti. Questo modo di vedere le grandezze fisiche e geometriche è più primitivo e naturale dell'altro.

[Maxwell J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, 1892, vol. I, p. 9]

Indice

1 Configurazioni e deformazioni

Indicando con $\mathcal{B}$ un insieme $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \dots\}$ i cui elementi identificano i punti di un corpo, diremo *configurazione* una funzione

$$\chi : \mathcal{B} \to \mathcal{E} \tag{1}$$

che fa corrispondere a ciascun punto del corpo una posizione, in modo tale che a punti distinti corrispondano posizioni distinte. Si dice *forma* del corpo $\mathcal{B}$ l'insieme

$$\mathcal{R} := \operatorname{im} \chi. \tag{2}$$

In corrispondenza di due configurazioni $\bar{\chi}$ e χ, a cui corrispondono due forme $\bar{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{R}$ la funzione biunivoca, detta *deformazione*,

$$\boldsymbol{\phi} : \bar{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}, \tag{3}$$

definita come $\boldsymbol{\phi} := \chi \circ \bar{\chi}^{-1}$, trasforma per ogni punto $\mathsf{A} \in \mathcal{B}$ la posizione $\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} = \bar{\chi}(\mathsf{A})$ nella posizione

$$\mathbf{x}_\mathsf{A} = \chi(\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\chi}(\mathsf{A})) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}). \tag{4}$$

Risulta a sua volta definito il *campo di spostamento*,

$$\mathbf{u} : \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} \mapsto (\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) \quad \forall \mathsf{A} \in \mathcal{B}. \tag{5}$$

Se la deformazione $\boldsymbol{\phi}$ è una isometria che conserva l'orientamento si dice *deformazione rigida*. In questo caso, scelto un punto A del corpo, la posizione di un qualsiasi punto B nella configurazione χ è data dalla seguente espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}), \tag{6}$$

essendo $\mathbf{R}$ una rotazione di $\mathcal{V}$.

Se $\boldsymbol{\phi}$ è una trasformazione affine che conserva l'orientamento si dice *deformazione affine* o *deformazione omogenea*. Scelto un punto A del corpo, la posizione di un generico punto B nella configurazione χ è data dalla espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{B} - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}), \tag{7}$$

dove $\mathbf{F}$ è un endomorfismo di $\mathcal{V}$, tale che $\det \mathbf{F} > 0$. Si noti che in una deformazione affine le rette sono trasformate in rette. Infatti la retta

$$\bar{\mathbf{c}}(h) = \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A} + h\bar{\mathbf{a}} \tag{8}$$

è trasformata, per via della (7), nella curva

$$\mathbf{c}(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{c}}(h)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{c}}(h) - \bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) + h\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}. \tag{9}$$

Ma tale curva non è altro che la retta

$$\mathbf{c}(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_\mathsf{A}) + h\mathbf{a} \tag{10}$$

con vettore tangente

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}. \tag{11}$$

2 Composizione di deformazioni

Si consideri la composizione di due deformazioni affini

$$\phi := \phi_{[2]}\phi_{[1]}. \tag{12}$$

Considerando una coppia di punti A e B del corpo, nella prima deformazione si ha

$$\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) = \phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{F}_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}). \tag{13}$$

Nella seconda deformazione è

$$\phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}})\big) = \phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big) + \mathbf{F}_{[2]}(\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) - \phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})). \tag{14}$$

Sostituendo la (13) nell'ultimo termine si ottiene

$$\phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}})\big) = \phi_{[2]}\big(\phi_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big) + \mathbf{F}_{[2]}\big(\mathbf{F}_{[1]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big). \tag{15}$$

Pertanto per la composizione (12) risulta

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) \tag{16}$$

con

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{[2]}\mathbf{F}_{[1]}. \tag{17}$$

Si noti che in generale nè la composizione (12) nè la composizione (17) sono commutative.

Poichè per $\mathbf{F}$ esiste la decomposizione polare

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \tag{18}$$

una deformazione affine ϕ può essere espressa, scegliendo ad arbitrio un punto A, come

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{R}\mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) \tag{19}$$

e decomposta in una traslazione

$$\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) = \phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + (\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}), \tag{20}$$

tale che $\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$, seguita da una dilatazione che lasci fissa la posizione $\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$

$$\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}})) = \phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})) + \mathbf{U}(\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) - \phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}), \tag{21}$$

seguita da una rotazione, con posizione $\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ ancora fissa,

$$\phi_{[2]}(\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}))) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{R}(\phi_{[1]}(\phi_{[0]}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}})) - \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})). \tag{22}$$

Nella deformazione $\phi_{[1]}$ le rette ortogonali per $\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ generate dagli autovettori di $\mathbf{U}$, dette *direzioni principali* della dilatazione, restano unite. Le distanze tra le posizioni lungo le direzioni principali risultano modificate per un fattore pari al corrispondente autovalore di $\mathbf{U}$. Nella deformazione $\phi_{[2]}$ la retta per $\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ generata dall'autovettore di $\mathbf{R}$, detta *asse della rotazione*, resta invariata.

3 Deformazioni affini in termini di coordinate

Fissato un sistema di coordinate cartesiane in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione due, le posizioni di due punti qualsiasi A e B nella configurazione $\bar{\chi}$ sono descritte dalle espressioni

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} &= \mathbf{o} + \bar{\xi}_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \bar{\xi}_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2,\\ \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}} &= \mathbf{o} + \bar{\xi}_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + \bar{\xi}_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{23}$$

Le posizioni degli stessi punti nella configurazione χ sono descritte dalle espressioni

$$\begin{aligned}\phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) &= \mathbf{o} + \xi_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2,\\ \phi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{B}}) &= \mathbf{o} + \xi_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{24}$$

Nel caso di una deformazione rigida dalla (6), utilizzando le espressioni (23) e (24), si ottiene

$$\mathbf{o} + \xi_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2 = \mathbf{o} + \xi_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2 + \mathbf{R}\big((\bar{\xi}_{1\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{1\mathsf{A}})\mathbf{e}_1 + (\bar{\xi}_{2\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{2\mathsf{A}})\mathbf{e}_2\big), \tag{25}$$

da cui deriva

$$\xi_{1\mathsf{B}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{B}}\mathbf{e}_2 = \xi_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \xi_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2 + (\bar{\xi}_{1\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{1\mathsf{A}})\mathbf{R}\mathbf{e}_1 + (\bar{\xi}_{2\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{2\mathsf{A}})\mathbf{R}\mathbf{e}_2. \tag{26}$$

Descrivendo la rotazione attraverso un angolo θ nel seguente modo

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \tag{27}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_2 = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2, \tag{28}$$

dalla (26), eguagliando le componenti su ciascuno dei vettori della base, si ottiene la relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}\\ \xi_{2\mathsf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{A}}\\ \xi_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\xi}_{1\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{1\mathsf{A}}\\ \bar{\xi}_{2\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Nel caso di una deformazione affine, dalla (7), utilizzando le coordinate e ponendo per l'endomorfismo $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2, \tag{30}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2, \tag{31}$$

si ottiene la seguente relazione tra le coordinate

$$\begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{B}}\\ \xi_{2\mathsf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_{1\mathsf{A}}\\ \xi_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\xi}_{1\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{1\mathsf{A}}\\ \bar{\xi}_{2\mathsf{B}} - \bar{\xi}_{2\mathsf{A}}\end{pmatrix}. \tag{32}$$

4 Parametrizzazioni

Fissato un sistema di coordinate cartesiane in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione due, la posizione di un punto A nella configurazione $\bar{\chi}$ è data dalla espressione (23). Ponendo $\zeta_{1\mathsf{A}} := \bar{\xi}_{1\mathsf{A}}$, $\zeta_{2\mathsf{A}} := \bar{\xi}_{2\mathsf{A}}$, la (23) diventa

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} = \mathbf{o} + \zeta_{1\mathsf{A}}\mathbf{e}_1 + \zeta_{2\mathsf{A}}\mathbf{e}_2. \tag{33}$$

Ad ogni posizione corrisponde dunque una coppia di coordinate

$$\psi(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) = (\zeta_{1\mathsf{A}}, \zeta_{2\mathsf{A}}) \tag{34}$$

e, viceversa, ad ogni coppia di coordinate corrisponde una posizione

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} = \psi^{-1}(\zeta_{1\mathsf{A}}, \zeta_{2\mathsf{A}}). \tag{35}$$

Indicando con $\bar{\mathbf{x}}$ tale funzione, detta *parametrizzazione* della forma del corpo $\bar{\mathcal{R}} := \operatorname{im}\bar{\chi}$, si ha

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_{1\mathsf{A}}, \zeta_{2\mathsf{A}}). \tag{36}$$

In generale una parametrizzazione di una forma del corpo può essere indipendente dal sistema di coordinate di $\mathcal{E}$. Ad esempio se $\dim\mathcal{E} = 3$ e la forma del corpo è una superficie, una sua parametrizzazione sarà una funzione del tipo di quella indicata nella (36) in cui il numero di parametri è due pur essendo il numero delle coordinate tre.

La deformazione induce la parametrizzazione $\mathbf{x}$ della forma $\mathcal{R} := \operatorname{im}\chi$ tale che

$$\mathbf{x}(\zeta_1, \zeta_2) = \boldsymbol{\phi}\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)\big). \tag{37}$$

In tal modo alla coppia $(\zeta_{1\mathsf{A}}, \zeta_{2\mathsf{A}})$, a cui $\bar{\mathbf{x}}$ fa corrispondere la posizione di A nella configurazione $\bar{\chi}$, $\mathbf{x}$ fa corrispondere la posizione di A nella configurazione χ.

Si può dare una descrizione della deformazione $\boldsymbol{\phi}$ in termini di coordinate definendo sul dominio della parametrizzazione due funzioni scalari ϕ_1 e ϕ_2 tali che

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \mathbf{o} + \phi_1(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{38}$$

5 Gradiente della deformazione

Si consideri nella configurazione $\bar{\chi}$ la retta per $\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)$

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) := \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2) + h\mathbf{e}_1. \tag{39}$$

Utilizzando un sistema di coordinate come nella (33) e la parametrizzazione (36) si ha la seguente descrizione

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) := \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2) + h\mathbf{e}_1 = \mathbf{o} + (\zeta_1 + h)\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2). \tag{40}$$

Tale retta è trasformata da $\boldsymbol{\phi}$ nella curva

$$\mathbf{c}_1(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2)). \tag{41}$$

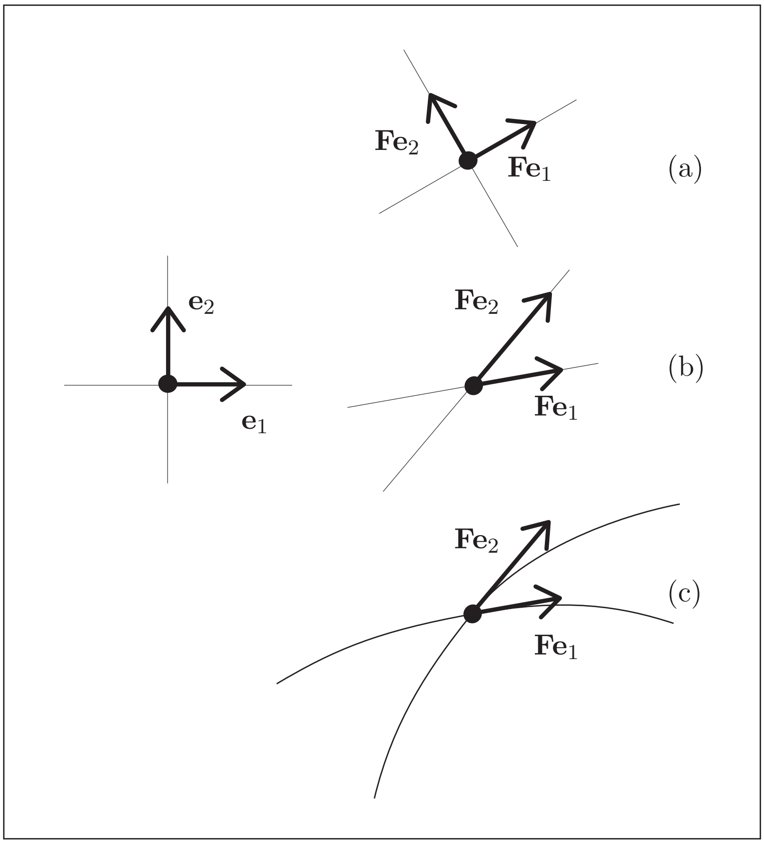

Figura 1: Gradiente di una deformazione (a) rigida, (b) affine, (c) generica.

Se $\boldsymbol{\phi}$ non è affine, in generale tale curva non è una retta. Usando per $\boldsymbol{\phi}$ la espressione in termini di coordinate (38), per la curva (41) si ha in generale

$$\mathbf{c}_1(h) = \mathbf{o} + \phi_1(\zeta_1 + h, \zeta_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\zeta_1 + h, \zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{42}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2))$ è pertanto

$$\mathbf{c}_1{}'(0) = \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{43}$$

La retta

$$\bar{\mathbf{c}}_2(h) := \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2) + h\mathbf{e}_2 = \mathbf{o} + \zeta_1\mathbf{e}_1 + (\zeta_2 + h)\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h) \tag{44}$$

è trasformata nella curva

$$\mathbf{c}_2(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h)) \tag{45}$$

che, utilizzando la (38), assume l'espressione

$$\mathbf{c}_2(h) = \mathbf{o} + \phi_1(\zeta_1, \zeta_2 + h)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\zeta_1, \zeta_2 + h)\mathbf{e}_2. \tag{46}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ è

$$\mathbf{c}_2{}'(0) = \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{47}$$

Infine una retta

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{c}}(h) &:= \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2) + h\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2) + h(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2)\\ &= \mathbf{o} + (\zeta_1 + h\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\zeta_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_2\\ &= \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h\alpha_1, \zeta_2 + h\alpha_2)\end{aligned} \tag{48}$$

è trasformata nella curva

$$\mathbf{c}(h) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h\alpha_1, \zeta_2 + h\alpha_2)) \tag{49}$$

che, utilizzando la (38), assume l'espressione

$$\mathbf{c}(h) = \mathbf{o} + \phi_1(\zeta_1 + h\alpha_1, \zeta_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_1 + \phi_2(\zeta_1 + h\alpha_1, \zeta_2 + h\alpha_2)\mathbf{e}_2. \tag{50}$$

Il vettore tangente in $\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ risulta

$$\begin{aligned}\mathbf{c}'(0) &= \left(\alpha_1\frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) + \alpha_2\frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha_1\frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) + \alpha_2\frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\right)\mathbf{e}_2\\ &= \alpha_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2\right).\end{aligned} \tag{51}$$

Si osservi che

$$\bar{\mathbf{c}}_1'(0) = \mathbf{e}_1, \tag{52}$$
$$\bar{\mathbf{c}}_2'(0) = \mathbf{e}_2, \tag{53}$$
$$\bar{\mathbf{c}}'(0) = \bar{\mathbf{a}} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2. \tag{54}$$

Tra i vettori tangenti esistono pertanto le seguenti relazioni

$$\bar{\mathbf{c}}'(0) = \alpha_1\bar{\mathbf{c}}_1'(0) + \alpha_2\bar{\mathbf{c}}_2'(0), \tag{55}$$
$$\mathbf{c}'(0) = \alpha_1\mathbf{c}_1'(0) + \alpha_2\mathbf{c}_2'(0), \tag{56}$$

Risulta allora definita una applicazione lineare $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ che trasforma i vettori tangenti alle rette per $\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)$ nei vettori tangenti alla curve corrispondenti per $\mathbf{x}(\zeta_1,\zeta_2)$ in modo tale che

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) : \bar{\mathbf{c}}_1'(0) \mapsto \mathbf{c}_1'(0), \tag{57}$$
$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) : \bar{\mathbf{c}}_2'(0) \mapsto \mathbf{c}_2'(0), \tag{58}$$
$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) : \alpha_1\bar{\mathbf{c}}_1'(0) + \alpha_2\bar{\mathbf{c}}_2'(0) \mapsto \alpha_1\mathbf{c}_1'(0) + \alpha_2\mathbf{c}_2'(0). \tag{59}$$

Dalle espressioni di $\mathbf{c}_1'(0)$ e $\mathbf{c}_2'(0)$ risulta

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))\mathbf{e}_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi_2}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2, \tag{60}$$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))\mathbf{e}_2 = \frac{\partial\phi_1}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi_2}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{61}$$

Pertanto la matrice di $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ è in generale

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2) \\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2) \end{pmatrix}. \tag{62}$$

La applicazione lineare $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ così definita è detta *gradiente* della deformazione $\boldsymbol{\phi}$ in $\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)$.

Si può dimostrare che se $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) \quad \forall(\zeta_1,\zeta_2)$, cioè se $\mathbf{F}$ è uniforme, allora $\boldsymbol{\phi}$ è affine e viceversa.

Si assume che in generale una deformazione sia tale che

$$\det\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) > 0 \quad \forall(\zeta_1,\zeta_2). \tag{63}$$

5.1 Gradiente dello spostamento

Definendo la funzione *spostamento*

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) := \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) - \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2), \tag{64}$$

si può usare per $\boldsymbol{\phi}$ la seguente espressione

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2) + \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)). \tag{65}$$

Si può dare una descrizione dello spostamento $\mathbf{u}$ in termini di componenti definendo sul dominio della parametrizzazione due funzioni scalari u_1 e u_2 tali che

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) = u_1(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + u_2(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2. \tag{66}$$

La (65) diventa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2)) &= \mathbf{o} + \zeta_1\mathbf{e}_1 + \zeta_2\mathbf{e}_2 + u_1(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_1 + u_2(\zeta_1,\zeta_2)\mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{o} + \big(\zeta_1 + u_1(\zeta_1,\zeta_2)\big)\mathbf{e}_1 + \big(\zeta_2 + u_2(\zeta_1,\zeta_2)\big)\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{67}$$

Da questa si ottiene per la matrice di $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1,\zeta_2))$ la espressione

$$\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) & \dfrac{\partial u_1}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial\zeta_1}(\zeta_1,\zeta_2) & 1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial\zeta_2}(\zeta_1,\zeta_2) \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Si può concludere che in generale

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}, \tag{69}$$

essendo $\nabla\mathbf{u}$ il gradiente del campo vettoriale $\mathbf{u}$.

5.2 Interpretazione di F

Si osservi che se la deformazione fosse affine sarebbe, per la (7),

$$\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2)) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}\big). \tag{70}$$

Alla retta per $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) = \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}} + h\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_{1\mathsf{A}} + h, \zeta_{2\mathsf{A}}) \tag{71}$$

corrisponderebbe la retta

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1(h) &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_{1\mathsf{A}} + h, \zeta_{2\mathsf{A}})) \\ &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_{1\mathsf{A}} + h, \zeta_{2\mathsf{A}}) - \bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}\big) \\ &= \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + h\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\mathbf{e}_1. \end{aligned} \tag{72}$$

Se la deformazione non è affine la (72) non è vera in generale. Si può allora definire la funzione

$$\mathfrak{o}(h) := \mathbf{c}_1(h) - \big(\boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + h\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\mathbf{e}_1\big) = \big(\mathbf{c}_1(h) - \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big) - h\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\mathbf{e}_1, \tag{73}$$

la quale, dovendo essere per la (57)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(\mathbf{c}_1(h) - \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\big) = {\mathbf{c}_1}'(0) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\mathbf{e}_1, \tag{74}$$

risulta tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\mathfrak{o}(h)\|}{|h|} = 0. \tag{75}$$

Nel caso di deformazione non affine si ottiene dunque dalla definizione (73), invece della (72), la espressione

$$\mathbf{c}_1(h) = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}) + h\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})\mathbf{e}_1 + \mathfrak{o}(h). \tag{76}$$

Poiché, per la (75), $\|\mathfrak{o}(h)\|$ tende a zero più rapidamente di h, si può dire che in generale "vicino" a $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$ la deformazione $\boldsymbol{\phi}$ è affine.

6 Dilatazioni e scorrimenti

Nel caso di deformazione affine la dilatazione $\mathbf{U}$ descrive come si modificano le rette per $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$, o per qualsiasi altra posizione, dilatandosi o contraendosi e variando l'angolo tra di esse. I vettori differenza tra le posizioni lungo le direzioni principali si "allungano" o si "accorciano", restando paralleli a se stessi, per un fattore pari al corrispondente autovalore di $\mathbf{U}$.

Se la deformazione non è affine le rette non si trasformano più in rette, in generale. La dilatazione $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$, ottenuta dalla decomposizione polare di $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$, descrive in questo caso come i vettori tangenti alle rette per $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$ si modificano, "allungandosi" o "accorciandosi" e variando l'angolo tra di essi, in vettori tangenti alle curve corrispondenti a quelle rette. Gli autovettori di $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ si "allungano" o si "accorciano", restando paralleli a se stessi, per un fattore pari al corrispondente autovalore. Poiché $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ varia con la posizione $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$, anche $\mathbf{U}(\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}})$ dipende in generale dalla posizione e così pure le direzioni principali e gli autovalori.

In corrispondenza di una posizione $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$ e di un vettore $\mathbf{a}$, si dicono, rispettivamente, *dilatazione* e *allungamento* nella direzione di $\mathbf{a}$ gli scalari

$$\lambda := \frac{\|\mathbf{Ua}\|}{\|\mathbf{a}\|}, \qquad \epsilon := \frac{\|\mathbf{Ua}\| - \|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \lambda - 1. \tag{77}$$

In corrispondenza delle direzioni principali, essendo $\mathbf{Ua}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$, risulta $\lambda = \lambda_i$. La dilatazione in una direzione principale si dice *dilatazione principale*.

In corrispondenza di una posizione $\bar{\mathbf{x}}_{\mathsf{A}}$ una coppia di vettori ortogonali $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ è trasformata da $\mathbf{U}$ in una coppia di vettori non più ortogonali, in generale. Si dice *scorrimento* tra $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ l'angolo $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ tale che

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{\mathbf{Ua}_1 \cdot \mathbf{Ua}_2}{\|\mathbf{Ua}_1\| \|\mathbf{Ua}_2\|}. \tag{78}$$

Se $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ sono autovettori di $\mathbf{U}$, corrispondono cioè alle direzioni principali, risulta $\gamma = 0$.