

# Travi

## Indice

<b>1</b>	<b>Deformazioni</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Atti di moto test</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modello di Timoshenko</b>	<b>3</b>
3.1	Componenti della tensione . . . . .	5
3.2	Linearizzazione . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Modello di filo</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Confronto con il continuo di Cauchy</b>	<b>7</b>
5.1	Gradiente della deformazione . . . . .	7
5.2	Distribuzioni di forza e classi di equipotenza . . . . .	8
5.3	Descrittori della tensione . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Piccole deformazioni nel modello tridimensionale</b>	<b>10</b>
6.1	Atti di moto test . . . . .	10
6.2	Distribuzioni di forza e classi di equipotenza . . . . .	10
6.3	Descrittori della tensione . . . . .	11
6.4	Matrice del gradiente dell'atto di moto . . . . .	12
6.5	Matrice del gradiente dello spostamento . . . . .	13
6.6	Risposta . . . . .	14
6.7	Distribuzioni di forza sulle sezioni corrispondenti alla tensione . . . . .	17
6.8	Trave di Eulero-Bernoulli . . . . .	18

## 1 Deformazioni

Una trave è un corpo le cui deformazioni  $\phi : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$  ammettono la seguente rappresentazione

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \mathbf{R}(\zeta_1)(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)), \quad (1)$$

essendo  $\mathbf{R}(\zeta_1)$  una rotazione e  $\bar{\mathbf{x}}$  una parametrizzazione di  $\bar{\mathcal{R}}$  tale che

$$\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1) + \zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1), \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{x}}'_o(\zeta_1) = \bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \quad (3)$$

con  $\{\bar{\mathbf{a}}_1(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1), \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)\}$  base ortonormale.

Per la (2) la (1) può anche scriversi

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \mathbf{R}(\zeta_1)(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1)). \quad (4)$$

Si dice *asse* in  $\bar{\mathcal{R}}$  la curva  $\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)$ , che viene trasformata da  $\phi$  nell'asse  $\phi(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1))$  in  $\mathcal{R}$ .

Si dice *sezione* in  $\bar{\mathcal{R}}$  la porzione di piano  $(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1))$ , che viene trasformata da  $\phi$  nella sezione  $\mathbf{R}(\zeta_1)(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2(\zeta_1) + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3(\zeta_1))$  in  $\mathcal{R}$ .

La (3) esprime la condizione di ortogonalità delle sezioni rispetto all'asse nella forma  $\bar{\mathcal{R}}$ . In generale questa proprietà non è conservata da  $\phi$ .

Alla (1) corrisponde la descrizione della deformazione in termini di spostamento

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + (\mathbf{R}(\zeta_1) - \mathbf{I})(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)). \quad (5)$$

Si noti che per un fissato valore di  $\zeta_1$  la (1) è una deformazione rigida. Per questo si dice che le sezioni si deformano rigidamente.

Per la (1) si può usare la notazione sintetica

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_o) + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \quad (6)$$

Definendo

$$\mathbf{x}_o := \phi \circ \bar{\mathbf{x}}_o, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_o := \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{x}}_o, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} := \phi \circ \bar{\mathbf{x}}, \quad (9)$$

le (1) e (5) si scrivono anche

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \quad (11)$$

Si assumerà nel seguito che  $\bar{\mathcal{R}}$  sia un cilindro con asse

$$\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1) = \bar{\mathbf{x}}_o(0) + \zeta_1 \bar{\mathbf{a}}_1, \quad \zeta_1 \in [0, L], \quad (12)$$

e che  $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$  siano costanti.

## 2 Atti di moto test

In un moto la velocità risulta, dalla (10),

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_o + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o). \quad (13)$$

Pertanto gli atti di moto sono descritti dai campi vettoriali

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_o + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad (14)$$

con  $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$ . Dalla (14) si ottiene per il gradiente della velocità, utilizzando la (4),

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \mathbf{w}'_o + \mathbf{W}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_o) + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad (15)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_2 = \mathbf{W}\mathbf{a}_2, \quad (16)$$

$$\mathbf{G}\mathbf{a}_3 = \mathbf{W}\mathbf{a}_3, \quad (17)$$

avendo definito la base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  come

$$\mathbf{a}_1 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{a}_2 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad \mathbf{a}_3 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (18)$$

## 3 Modello di Timoshenko

Si osservi dalla (14) che i descrittori degli atti di moto sono le funzioni  $(\mathbf{w}_o, \mathbf{W})$  e dalle (15), (16) e (17) che i descrittori del gradiente degli atti di moto sono le funzioni  $(\mathbf{w}'_o, \mathbf{W}, \mathbf{W}')$ . Utilizzando il vettore assiale di  $\mathbf{W}$  si possono sostituire tali descrittori rispettivamente con  $(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega})$  e  $(\mathbf{w}'_o, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$ .

Tutte queste funzioni hanno come dominio l'intervallo  $[0, L]$ . La potenza esterna, descrivendo sia una distribuzione di "volume" che una distribuzione al "bordo", assume in questo caso la espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\zeta \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{m}^- \cdot \boldsymbol{\omega}(0) + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o(L) + \mathbf{m}^+ \cdot \boldsymbol{\omega}(L), \end{aligned} \quad (19)$$

mentre la potenza interna ha la espressione

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\zeta. \quad (20)$$

Sommando la (19) e la (20) la potenza totale in un atto di moto test risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) &= \int_0^L (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\zeta \\ &+ \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{m}^- \cdot \boldsymbol{\omega}(0) + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o(L) + \mathbf{m}^+ \cdot \boldsymbol{\omega}(L) \\ &- \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\zeta. \end{aligned} \quad (21)$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\zeta &= - \int_0^L (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{w}_o + \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega}) d\zeta \\ &+ \mathbf{s}(L) \cdot \mathbf{w}_o(L) + \mathbf{m}(L) \cdot \boldsymbol{\omega}(L) \\ &- \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{w}_o(0) - \mathbf{m}(0) \cdot \boldsymbol{\omega}(0), \end{aligned} \quad (22)$$

la (21) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o, \boldsymbol{\omega}) &= \int_0^L ((\mathbf{s}' + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w}_o + (\mathbf{m}' - \mathbf{z} + \mathbf{c}) \cdot \boldsymbol{\omega}) d\zeta \\ &+ (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}_o(0) + (\mathbf{m}^- + \mathbf{m}(0)) \cdot \boldsymbol{\omega}(0) \\ &+ (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L)) \cdot \mathbf{w}_o(L) + (\mathbf{m}^+ - \mathbf{m}(L)) \cdot \boldsymbol{\omega}(L). \end{aligned} \quad (23)$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce le equazioni differenziali di bilancio

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad (24)$$

$$\mathbf{m}' - \mathbf{z} + \mathbf{c} = \mathbf{o}, \quad (25)$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0) = \mathbf{o}, \quad (26)$$

$$\mathbf{m}^- + \mathbf{m}(0) = \mathbf{o}, \quad (27)$$

$$\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L) = \mathbf{o}, \quad (28)$$

$$\mathbf{m}^+ - \mathbf{m}(L) = \mathbf{o}. \quad (29)$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\zeta) = \bar{\mathbf{w}}_o + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}_o(\zeta) - \mathbf{x}_o(0)), \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\zeta) = \bar{\boldsymbol{\omega}}, \quad (31)$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_o(\zeta) = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_o(\zeta), \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\omega}'(\zeta) = \mathbf{o}. \quad (33)$$

Dalla condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* si ha

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o + \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' = 0 \quad (34)$$

$$\Rightarrow \mathbf{s} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_o + \mathbf{z} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow (\mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} + \mathbf{z}) \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{z} = -\mathbf{x}'_o \times \mathbf{s}. \quad (35)$$

Le equazioni di bilancio diventano dunque

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad (36)$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} + \mathbf{c} = \mathbf{o}, \quad (37)$$

mentre la potenza interna (20) assume la forma

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'_o) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\zeta. \quad (38)$$

### 3.1 Componenti della tensione

Utilizzando la base (18) sia

$$\mathbf{s} = N \mathbf{a}_1 + Q_2 \mathbf{a}_2 + Q_3 \mathbf{a}_3. \quad (39)$$

La componente  $N$  si dice *forza normale* mentre le componenti  $Q_2$  e  $Q_3$  si dicono *forze di taglio*. Per il vettore momento si pone

$$\mathbf{m} = M_1 \mathbf{a}_1 + M_2 \mathbf{a}_2 + M_3 \mathbf{a}_3. \quad (40)$$

La componente  $M_1$  si dice *momento torcente* mentre le componenti  $M_2$  e  $M_3$  si dicono *momenti flettenti*.

### 3.2 Linearizzazione

Nelle equazioni di bilancio (36) e (37) l'unico termine da linearizzare è  $\mathbf{x}'_o \times \mathbf{s}$ . Se si linearizza in corrispondenza di uno stato naturale, allora resta solo il termine di ordine zero di  $\mathbf{x}'_o$ . Essendo  $\bar{\mathbf{x}}'_o = \bar{\mathbf{a}}_1$ , si ottiene

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad (41)$$

$$\mathbf{m}' + \bar{\mathbf{a}}_1 \times \mathbf{s} + \mathbf{c} = \mathbf{o}. \quad (42)$$

La (38) diventa

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_0^L (\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\zeta. \quad (43)$$

Le espressioni di  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{m}$  (39) e (40), essendo nulla la parte di ordine zero di ciascuna componente, risultano rispettivamente

$$\mathbf{s} = N \bar{\mathbf{a}}_1 + Q_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + Q_3 \bar{\mathbf{a}}_3, \quad (44)$$

$$\mathbf{m} = M_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + M_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + M_3 \bar{\mathbf{a}}_3. \quad (45)$$

## 4 Modello di filo

Per un filo può essere adottato un modello derivato da quello della trave assumendo che sia nulla la potenza, sia esterna che interna, corrispondente a  $\omega$ . La potenza esterna assume dunque la espressione

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) = \int_0^L \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o \, d\zeta + \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o(L), \quad (46)$$

mentre la potenza interna è

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) = - \int_0^L \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o \, d\zeta. \quad (47)$$

Sommando la (46) e la (47) la potenza totale in un atto di moto test risulta

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) = \int_0^L \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_o \, d\zeta + \mathbf{s}^- \cdot \mathbf{w}_o(0) + \mathbf{s}^+ \cdot \mathbf{w}_o(L) - \int_0^L \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o \, d\zeta. \quad (48)$$

Attraverso la integrazione per parti

$$\int_0^L \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o \, d\zeta = - \int_0^L \mathbf{s}' \cdot \mathbf{w}_o \, d\zeta + \mathbf{s}(L) \cdot \mathbf{w}_o(L) - \mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{w}_o(0), \quad (49)$$

la (48) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}_o) + \mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}_o) &= \int_0^L (\mathbf{s}' + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w}_o \, d\zeta \\ &+ (\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0)) \cdot \mathbf{w}_o(0) + (\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L)) \cdot \mathbf{w}_o(L). \end{aligned} \quad (50)$$

La condizione che *la potenza virtuale sia nulla per ogni atto di moto* fornisce la equazione differenziale di bilancio

$$\mathbf{s}' + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad (51)$$

assieme alle equazioni di bilancio al bordo

$$\mathbf{s}^- + \mathbf{s}(0) = \mathbf{o}, \quad (52)$$

$$\mathbf{s}^+ - \mathbf{s}(L) = \mathbf{o}. \quad (53)$$

Un atto di moto rigido può in generale avere la seguente rappresentazione

$$\mathbf{w}_o(\zeta) = \bar{\mathbf{w}}_o + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}_o(\zeta) - \mathbf{x}_o(0)), \quad (54)$$

da cui, derivando, si ottiene

$$\mathbf{w}'_o(\zeta) = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_o(\zeta). \quad (55)$$

Dalla condizione che *per ogni atto di moto rigido la densità di potenza interna sia nulla* si ha

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{w}'_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}'_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'_o \times \mathbf{s} = \mathbf{o}. \quad (56)$$

Dunque la risposta del materiale deve essere tale che il vettore  $\mathbf{s}(\zeta)$  risulti in ogni punto tangente alla curva descritta da  $\mathbf{x}_o$ .

## 5 Confronto con il continuo di Cauchy

Si restringono le deformazioni e gli atti di moto test del continuo di Cauchy a quelli descritti nei paragrafi 1 e 2. Le espressioni della potenza forniscono una interpretazione sia dei descrittori delle distribuzioni di forze che dei descrittori della tensione del modello di trave di Timoshenko.

### 5.1 Gradiente della deformazione

Si considerino le curve corrispondenti per  $\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  e  $\phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3))$

$$\bar{\mathbf{c}}_1(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2, \zeta_3), \quad (57)$$

$$\mathbf{c}_1(h) = \phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1 + h, \zeta_2, \zeta_3)). \quad (58)$$

I rispettivi vettori tangenti sono

$$\bar{\mathbf{c}}'_1(0) = \bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}'_o = \bar{\mathbf{a}}_1, \quad (59)$$

$$\mathbf{c}'_1(0) = \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_o + \mathbf{R}'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3). \quad (60)$$

Le curve

$$\bar{\mathbf{c}}_2(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h, \zeta_3), \quad (61)$$

$$\mathbf{c}_2(h) = \phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2 + h, \zeta_3)), \quad (62)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_3(h) = \bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 + h), \quad (63)$$

$$\mathbf{c}_3(h) = \phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 + h)), \quad (64)$$

hanno vettori tangenti, rispettivamente,

$$\bar{\mathbf{c}}'_2(0) = \bar{\mathbf{a}}_2, \quad (65)$$

$$\mathbf{c}'_2(0) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad (66)$$

$$\bar{\mathbf{c}}'_3(0) = \bar{\mathbf{a}}_3, \quad (67)$$

$$\mathbf{c}'_3(0) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (68)$$

Per il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$  si ha pertanto

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_o + \mathbf{R}'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{R}^\top \mathbf{x}'_o + \mathbf{R}^\top \mathbf{R}'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3)), \quad (69)$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad (70)$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (71)$$

Ponendo

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3 \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3, \quad (72)$$

senza calcolare esplicitamente le espressioni di tali componenti in termini dei descrittori della deformazione  $\mathbf{x}_o$ ,  $\mathbf{R}$  e delle loro derivate, la (69) diventa

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{R}(\lambda \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{a}}_3). \quad (73)$$

Dalla definizione e dalle proprietà del determinante risulta, utilizzando le (73), (70) e (71),

$$\begin{aligned} \det \mathbf{F} &= \frac{\text{vol}(\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\text{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \frac{\text{vol}(\mathbf{R}(\lambda\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\bar{\mathbf{a}}_3), \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\text{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} \\ &= \frac{\text{vol}(\lambda \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\text{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \lambda \frac{\text{vol}(\mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_3)}{\text{vol}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)} = \lambda. \end{aligned} \quad (74)$$

La condizione  $\det \mathbf{F} > 0$  è pertanto equivalente alla condizione

$$\lambda > 0 \quad (75)$$

che, avendo posto nella (18)  $\mathbf{a}_1 := \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1$ , può essere anche espressa, per la (72), come

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{a}_1 > 0. \quad (76)$$

Si noti che tale condizione deve essere soddisfatta da  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3))$  ovunque.

## 5.2 Distribuzioni di forza e classi di equipotenza

Si consideri la espressione della potenza esterna

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA, \quad (77)$$

con  $\mathbf{w}$  dato dalla espressione (14). In corrispondenza di una deformazione  $\phi : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$  in cui  $\bar{\mathcal{R}}$  sia un cilindro si ha, essendo dalla (74)  $\det \mathbf{F} = \lambda$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV &= \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \det \mathbf{F} dV \\ &= \int_0^L \int_S \mathbf{b} \lambda dA \cdot \mathbf{w}_o d\zeta + \int_0^L \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{b} \lambda dA \cdot \mathbf{W} d\zeta \end{aligned} \quad (78)$$

Assumendo che  $\mathbf{t}$  sia assegnato solo sulle facce d'estremità, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA &= \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA = \int_{S^-} \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{w}_o(0) + \int_{S^-} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{W}(0), \\ &+ \int_{S^+} \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{w}_o(L) + \int_{S^+} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{t} dA \cdot \mathbf{W}(L) \end{aligned} \quad (79)$$

Introducendo come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza di volume

$$\mathbf{b} := \int_S \mathbf{b} \lambda dA, \quad (80)$$

$$\mathbf{c} := \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{b} \lambda dA, \quad (81)$$



e come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza superficiali, in corrispondenza delle estremità destra e sinistra,

$$\mathbf{s}^\pm := \int_{S^\pm} \mathbf{t} \, dA, \quad (82)$$

$$\mathbf{m}^\pm := \int_{S^\pm} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{t} \, dA, \quad (83)$$

la (77) diventa identica alla (19). In questo modo si è data una interpretazione dei descrittori delle distribuzioni di forza introdotti nella (19).

### 5.3 Descrittori della tensione

Si consideri ora la espressione della potenza interna

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dV = - \int_{\bar{\mathcal{R}}} \lambda \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dV = - \int_0^L \int_S \lambda \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dA \, d\zeta \quad (84)$$

con  $\mathbf{G}$  dato dalle (15), (16),(17). Essendo, in corrispondenza di ciascuna sezione,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}\mathbf{a}_1 + \mathbf{T}\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{G}\mathbf{a}_2 + \mathbf{T}\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{G}\mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (85)$$

utilizzando le (16) e (17) si ottiene

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{G}\mathbf{a}_1 + \mathbf{T}\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}_2 + \mathbf{T}\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}_3. \quad (86)$$

Per il principio di obiettività materiale  $\mathbf{T}$  deve essere tale che

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (87)$$

per qualsiasi  $\mathbf{W}$  antisimmetrico. Espandendo come nella (85) si ha

$$0 = \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}_1 + \mathbf{T}\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}_2 + \mathbf{T}\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{W}\mathbf{a}_3. \quad (88)$$

Sottraendo tale espressione alla (86) risulta

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{a}_1. \quad (89)$$

Poichè dalla (72) è

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{G}\mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{G}\mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{G}\mathbf{a}_3, \quad (90)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{W}\mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{W}\mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{W}\mathbf{a}_3, \quad (91)$$

risulta, per le (16) e (17),

$$(\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{x}' = \lambda (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{a}_1. \quad (92)$$

Pertanto la (89) diventa, per la (15),

$$\lambda \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{Ta}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\mathbf{x}' \quad (93)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{Ta}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \mathbf{W}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_o) - \mathbf{W}\mathbf{x}') \\ &= \mathbf{Ta}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}\mathbf{x}'_o + \mathbf{W}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)) \\ &= \mathbf{Ta}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'_o + \boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)) \\ &= \mathbf{Ta}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'_o) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{Ta}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}'. \end{aligned} \quad (94)$$

Ponendo

$$\mathbf{s} := \int_S \mathbf{Ta}_1 dA, \quad (95)$$

$$\mathbf{m} := \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{Ta}_1 dA, \quad (96)$$

la espressione della potenza interna (84) diventa identica alla (38). Questo permette di interpretare  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{m}$  come descrittori della tensione  $\mathbf{T}$  in corrispondenza di ciascuna sezione.

## 6 Piccole deformazioni nel modello tridimensionale

### 6.1 Atti di moto test

In genere per piccole deformazioni nella espressione della potenza compaiono solo i termini di ordine zero del campo di velocità, poiché sia la tensione che le forze sono di ordine uno rispetto al gradiente dello spostamento.

Occorre dunque considerare atti di moto e loro gradienti in  $\bar{\mathcal{R}}$ . Questi, essendo  $\bar{\mathcal{R}}$  un cilindro, con  $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}'_o = \bar{\mathbf{a}}_1$  ovunque, sono descritti dalle espressioni

$$\mathbf{w}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{w}_o + \mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \quad (97)$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o), \quad (98)$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad (99)$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (100)$$

### 6.2 Distribuzioni di forza e classi di equipotenza

Si consideri la espressione della potenza esterna

$$\mathcal{W}^{(ext)}(\mathbf{w}) = \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV + \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA, \quad (101)$$

in cui, trattandosi di piccole deformazioni,  $\mathbf{w}$  è dato dalla (97). Avendo assunto che  $\bar{\mathcal{R}}$  sia un cilindro con asse  $\bar{\mathbf{x}}_o$  si ha

$$\int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dV = \int_0^L \int_S \mathbf{b} dA \cdot \mathbf{w}_o d\zeta + \int_0^L \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{b} dA \cdot \mathbf{W} d\zeta. \quad (102)$$

Assumendo inoltre che  $\mathbf{t}$  sia assegnato solo sulle facce d'estremità, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, dA &= \int_{S^-} \mathbf{t} \, dA \cdot \mathbf{w}_o(0) + \int_{S^-} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t} \, dA \cdot \mathbf{W}(0) \\ &+ \int_{S^+} \mathbf{t} \, dA \cdot \mathbf{w}_o(L) + \int_{S^+} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes \mathbf{t} \, dA \cdot \mathbf{W}(L). \end{aligned} \quad (103)$$

Introducendo come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza di volume

$$\mathbf{b} := \int_S \mathbf{b} \, dA, \quad (104)$$

$$\mathbf{c} := \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \mathbf{b} \, dA, \quad (105)$$

e come descrittori di classi di equipotenza per le distribuzioni di forza superficiali, in corrispondenza delle estremità destra e sinistra,

$$\mathbf{s}^\pm := \int_{S^\pm} \mathbf{t} \, dA, \quad (106)$$

$$\mathbf{m}^\pm := \int_{S^\pm} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \mathbf{t} \, dA, \quad (107)$$

la (101) diventa identica alla (19).

### 6.3 Descrittori della tensione

Si consideri ora la espressione della potenza interna

$$\mathcal{W}^{(int)}(\mathbf{w}) = - \int_{\bar{\mathcal{R}}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dV = - \int_0^L \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dA \, d\zeta \quad (108)$$

in cui, trattandosi di piccole deformazioni, il gradiente della velocità  $\mathbf{G}$  è descritto dalle (98), (99) e (100). Essendo, in corrispondenza di ciascuna sezione,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}(\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes \bar{\mathbf{a}}_3) \cdot \mathbf{G} \\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3, \end{aligned} \quad (109)$$

utilizzando le (99) e (100) si ottiene

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (110)$$

Per il principio di obiettività materiale  $\mathbf{T}$  deve essere tale che

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0 \quad (111)$$

per qualsiasi  $\mathbf{W}$  antisimmetrico. Espandendo tale espressione come nella (109), risulta

$$0 = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (112)$$

Sottraendo questa dalla (110) si ha

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\bar{\mathbf{a}}_1. \quad (113)$$

Sostituendo la (98) si ottiene infine

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1) \\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \\ &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}' \times (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o). \end{aligned} \quad (114)$$

Introducendo, come descrittori della tensione,

$$\mathbf{s} := \int_S \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 dA, \quad (115)$$

$$\mathbf{m} := \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 dA, \quad (116)$$

la espressione della potenza interna (108) diventa identica alla (38).

#### 6.4 Matrice del gradiente dell'atto di moto

Dalla (98) si ha per il gradiente dell'atto di moto  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{w}'_o + \mathbf{W}'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3), \quad (117)$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_2, \quad (118)$$

$$\mathbf{G}\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_3. \quad (119)$$

Indicando la matrice della velocità angolare  $\mathbf{W}$  nella (97) con

$$[\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (120)$$

e ponendo

$$\mathbf{w}_o = w_{o1} \bar{\mathbf{a}}_1 + w_{o2} \bar{\mathbf{a}}_2 + w_{o3} \bar{\mathbf{a}}_3, \quad (121)$$

la matrice del gradiente dell'atto di moto nella base  $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$  risulta

$$[\mathbf{G}] = \begin{pmatrix} w'_{o1} & -\omega_3 & \omega_2 \\ w'_{o2} & 0 & -\omega_1 \\ w'_{o3} & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2 \omega'_3 + \zeta_3 \omega'_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 \omega'_1 & 0 & 0 \\ +\zeta_2 \omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

la cui parte simmetrica è

$$\begin{aligned}
 [\text{sym } \mathbf{G}] &= \begin{pmatrix} w'_{o1} & \frac{1}{2}(w'_{o2} - \omega_3) & \frac{1}{2}(w'_{o3} + \omega_2) \\ \frac{1}{2}(w'_{o2} - \omega_3) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(w'_{o3} + \omega_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -\zeta_2 \omega'_3 + \zeta_3 \omega'_2 & -\frac{1}{2}\zeta_3 \omega'_1 & \frac{1}{2}\zeta_2 \omega'_1 \\ -\frac{1}{2}\zeta_3 \omega'_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta_2 \omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{123}$$

La differenza  $\mathbf{G} - \mathbf{W}$  che compare nella (113) ha matrice

$$[\mathbf{G} - \mathbf{W}] = \begin{pmatrix} w'_{o1} & 0 & 0 \\ w'_{o2} - \omega_3 & 0 & 0 \\ w'_{o3} + \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2 \omega'_3 + \zeta_3 \omega'_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 \omega'_1 & 0 & 0 \\ +\zeta_2 \omega'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{124}$$

La prima colonna di ciascuna delle due matrici contiene le componenti rispettivamente dei vettori  $(\mathbf{w}'_o - \mathbf{W}\bar{\mathbf{a}}_1)$  e  $\mathbf{W}'(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o)$  della espressione (114). Si noti come anche da tali matrici risulta

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T} \cdot \text{sym } \mathbf{G} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{W})\bar{\mathbf{a}}_1. \tag{125}$$

## 6.5 Matrice del gradiente dello spostamento

La deformazione (1) diventa

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \phi(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}(\zeta_1))(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)), \tag{126}$$

mentre il campo di spostamento (5), assume l'espressione

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)) = \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)) + \boldsymbol{\Theta}(\zeta_1)(\bar{\mathbf{x}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) - \bar{\mathbf{x}}_o(\zeta_1)). \tag{127}$$

La rotazione infinitesima della sezione  $\boldsymbol{\Theta}$  è descritta dalla matrice

$$[\boldsymbol{\Theta}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{128}$$

Dalla (126) si ha per il gradiente della deformazione  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{x}'_o + \boldsymbol{\Theta}'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3), \tag{129}$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_2 = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta})\bar{\mathbf{a}}_2, \tag{130}$$

$$\mathbf{F}\bar{\mathbf{a}}_3 = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta})\bar{\mathbf{a}}_3. \tag{131}$$

Dalla (127) per il gradiente dello spostamento si ha

$$\nabla \mathbf{u} \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{u}'_o + \Theta'(\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3), \quad (132)$$

$$\nabla \mathbf{u} \bar{\mathbf{a}}_2 = \Theta \bar{\mathbf{a}}_2, \quad (133)$$

$$\nabla \mathbf{u} \bar{\mathbf{a}}_3 = \Theta \bar{\mathbf{a}}_3. \quad (134)$$

La matrice del gradiente dello spostamento risulta pertanto

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u'_{o1} & -\theta_3 & \theta_2 \\ u'_{o2} & 0 & -\theta_1 \\ u'_{o3} & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2 \theta'_3 + \zeta_3 \theta'_2 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 \theta'_1 & 0 & 0 \\ +\zeta_2 \theta'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (135)$$

Ne deriva che la matrice della dilatazione infinitesima è

$$[\mathbf{E}] = [\text{sym } \nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} u'_{o1} & \frac{1}{2}(u'_{o2} - \theta_3) & \frac{1}{2}(u'_{o3} + \theta_2) \\ \frac{1}{2}(u'_{o2} - \theta_3) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u'_{o3} + \theta_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (136)$$

$$+ \begin{pmatrix} -\zeta_2 \theta'_3 + \zeta_3 \theta'_2 & -\frac{1}{2}\zeta_3 \theta'_1 & \frac{1}{2}\zeta_2 \theta'_1 \\ -\frac{1}{2}\zeta_3 \theta'_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta_2 \theta'_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponendo

$$\varepsilon := u'_{o1}, \quad (137)$$

$$\gamma_2 := u'_{o2} - \theta_3, \quad (138)$$

$$\gamma_3 := u'_{o3} + \theta_2, \quad (139)$$

$$\chi_1 := \theta'_1, \quad (140)$$

$$\chi_2 := \theta'_2, \quad (141)$$

$$\chi_3 := \theta'_3, \quad (142)$$

la (136) si scrive

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_2 & \frac{1}{2}\gamma_3 \\ \frac{1}{2}\gamma_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\zeta_2 \chi_3 + \zeta_3 \chi_2 & -\frac{1}{2}\zeta_3 \chi_1 & \frac{1}{2}\zeta_2 \chi_1 \\ -\frac{1}{2}\zeta_3 \chi_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\zeta_2 \chi_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (143)$$

## 6.6 Risposta

Utilizzando la funzione di risposta per un materiale elastico isotropo

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}) = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad (144)$$

si costruisce la espressione di

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} \, dA. \quad (145)$$

Dalla (122) e dalla (143), risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} &= \mathbb{C}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{G} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} \cdot \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \operatorname{tr}(\mathbf{G}) + 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{G} \\ &= (\lambda + 2\mu)(\varepsilon - \zeta_2 \chi_3 + \zeta_3 \chi_2) w'_{o1} \\ &\quad + \mu(\gamma_2 - \zeta_3 \chi_1)(w'_{o2} - \omega_3) \\ &\quad + \mu(\gamma_3 + \zeta_2 \chi_1)(w'_{o3} + \omega_2) \\ &\quad - (\lambda + 2\mu)(\varepsilon - \zeta_2 \chi_3 + \zeta_3 \chi_2) \zeta_2 \omega'_3 \\ &\quad + (\lambda + 2\mu)(\varepsilon - \zeta_2 \chi_3 + \zeta_3 \chi_2) \zeta_3 \omega'_2 \\ &\quad + \mu(-(\gamma_2 - \zeta_3 \chi_1) \zeta_3 + (\gamma_3 + \zeta_2 \chi_1) \zeta_2) \omega'_1. \end{aligned} \quad (146)$$

Nella espressione dell'integrale (145) svolgono un ruolo importante le definizioni seguenti. Il *centro*  $\bar{\mathbf{x}}_C$  di una sezione è definito dalla espressione

$$\bar{\mathbf{x}}_C := \bar{\mathbf{x}}_o + \frac{1}{A} \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \, dA, \quad (147)$$

essendo  $A$  l'area della sezione. Il *tensore di Eulero* della sezione è

$$\mathbf{J} := \int_S (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \otimes (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \, dA. \quad (148)$$

Utilizzando la parametrizzazione della sezione indotta dai vettori base  $\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$  si ha

$$\bar{\mathbf{x}}_C = \bar{\mathbf{x}}_o + \frac{1}{A} \int_S (\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3) \, dA, \quad (149)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int_S (\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3) \otimes (\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3) \, dA \\ &= \int_S (\zeta_2^2 \bar{\mathbf{a}}_2 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_2 \zeta_3 (\bar{\mathbf{a}}_2 \otimes \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2) + \zeta_3^2 \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes \bar{\mathbf{a}}_3) \, dA. \end{aligned} \quad (150)$$

La matrice del tensore di Eulero nella base  $\{\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3\}$  risulta

$$[J] = \int_S \begin{pmatrix} \zeta_2^2 & \zeta_3 \zeta_2 \\ \zeta_2 \zeta_3 & \zeta_3^2 \end{pmatrix} \, dA. \quad (151)$$

Scegliendo  $\bar{\mathbf{x}}_o = \bar{\mathbf{x}}_C$ , per la (149),

$$\int_S (\zeta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \zeta_3 \bar{\mathbf{a}}_3) \, dA = \mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \int_S \zeta_2 \, dA = 0, \quad \int_S \zeta_3 \, dA = 0. \quad (152)$$

Scegliendo  $\bar{\mathbf{a}}_2$  e  $\bar{\mathbf{a}}_3$  autovettori di  $\mathbf{J}$ ,

$$\mathbf{J} \bar{\mathbf{a}}_2 = \int_S \zeta_2^2 \, dA \bar{\mathbf{a}}_2, \quad \mathbf{J} \bar{\mathbf{a}}_3 = \int_S \zeta_3^2 \, dA \bar{\mathbf{a}}_3, \quad \Rightarrow \quad \int_S \zeta_2 \zeta_3 \, dA = 0. \quad (153)$$

Tenendo conto di queste proprietà e ponendo

$$J_2 := \int_S \zeta_3^2 dA, \quad (154)$$

$$J_3 := \int_S \zeta_2^2 dA, \quad (155)$$

$$J_o := \int_S (\zeta_2^2 + \zeta_3^2) dA, \quad (156)$$

dalla (146) si ha

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} dA &= (\lambda + 2\mu)(A\varepsilon w'_{o1} + J_2\chi_2\omega'_2 + J_3\chi_3\omega'_3) \\ &+ \mu(A\gamma_2(w'_{o2} - \omega_3) + A\gamma_3(w'_{o3} + \omega_2) + J_o\chi_1\omega'_1). \end{aligned} \quad (157)$$

I termini sulla diagonale della matrice del tensore di Eulero si dicono *momenti d'inerzia*. Gli autovalori si dicono momenti d'inerzia *principali*. In particolare  $J_2$  si dice il momento d'inerzia (principale) rispetto alla direzione  $\bar{\mathbf{a}}_2$ ,  $J_3$  si dice il momento d'inerzia (principale) rispetto alla direzione  $\bar{\mathbf{a}}_3$ , mentre  $J_o$  si dice *momento d'inerzia polare*.

Si noti che, affinché la (43) sia uguale alla (108) per qualsiasi atto di moto, deve essere

$$\mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' = \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} dA \quad (158)$$

Utilizzando le componenti dei descrittori della tensione definite nelle (44) e (45) si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{w}'_o - \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' &= Nw'_{o1} + Q_2(w'_{o2} - \omega_3) + Q_3(w'_{o3} + \omega_2) \\ &+ M_1\omega'_1 + M_2\omega'_2 + M_3\omega'_3. \end{aligned} \quad (159)$$

Sostituendo le (157) e (159) nella (158) si ottiene una equazione che deve valere per qualsiasi atto di moto. Risulta pertanto

$$N = (\lambda + 2\mu)A\varepsilon, \quad (160)$$

$$Q_2 = \mu A \gamma_2, \quad (161)$$

$$Q_3 = \mu A \gamma_3, \quad (162)$$

$$M_1 = \mu J_o \chi_1, \quad (163)$$

$$M_2 = (\lambda + 2\mu)J_2 \chi_2, \quad (164)$$

$$M_3 = (\lambda + 2\mu)J_3 \chi_3. \quad (165)$$

Si osservi che  $(\lambda + 2\mu)\varepsilon$  è la tensione normale corrispondente ad un allungamento  $\varepsilon$  nella direzione  $\bar{\mathbf{a}}_1$  di un cubo con contrazione trasversale impedita. Nel caso di una trave, libera di contrarsi trasversalmente, è più realistico sostituire a  $(\lambda + 2\mu)$  il modulo di Young. Per questa



ragione la funzione di risposta per una trave si assume descritta dalle seguenti espressioni

$$N = YA \varepsilon, \quad (166)$$

$$Q_2 = \mu A \gamma_2, \quad (167)$$

$$Q_3 = \mu A \gamma_3, \quad (168)$$

$$M_1 = \mu J_o \chi_1, \quad (169)$$

$$M_2 = YJ_2 \chi_2, \quad (170)$$

$$M_3 = YJ_3 \chi_3. \quad (171)$$

È possibile motivare altre correzioni alle espressioni precedenti, attraverso altri metodi di identificazione della risposta del modello di trave di Timoshenko. Inoltre, almeno in linea di principio, è possibile determinare direttamente i coefficienti delle espressioni precedenti attraverso prove sperimentali, senza derivarli dai moduli di Lamè  $\lambda$  e  $\mu$ .

## 6.7 Distribuzioni di forza sulle sezioni corrispondenti alla tensione

Si noti che, immaginando di tagliare la trave in due in corrispondenza di una sezione, sulla faccia di normale esterna  $\bar{\mathbf{a}}_1$  alla tensione  $\mathbf{T}$  corrisponde una distribuzione di forza superficiale che per la (143) vale

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbb{C}(\mathbf{E})\bar{\mathbf{a}}_1 = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\bar{\mathbf{a}}_1 + 2\mu\mathbf{E}\bar{\mathbf{a}}_1 \\ &= (\lambda + 2\mu)(\varepsilon - \zeta_2\chi_3 + \zeta_3\chi_2)\bar{\mathbf{a}}_1 + \mu(\gamma_2 - \zeta_3\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_2 + \mu(\gamma_3 + \zeta_2\chi_1)\bar{\mathbf{a}}_3. \end{aligned} \quad (172)$$

Apparentemente sembra così possibile ricostruire, almeno parzialmente, la tensione  $\mathbf{T}$  nel continuo di Cauchy a partire dai descrittori della tensione  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{m}$  della trave di Timoshenko, dopo aver calcolato  $\varepsilon$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$ , attraverso le (166)-(171). È bene ricordare però che la tensione  $\mathbf{T}$  in generale potrà soddisfare le equazioni di bilancio solo limitando gli atti di moto test a quelli descritti nel par. 6.1. Non è dunque in generale una soluzione delle equazioni di bilancio del continuo di Cauchy. Inoltre occorre osservare che le funzioni di risposta per la trave di Timoshenko derivano dalla funzione di risposta adottata per il continuo di Cauchy, assumendo per questo le deformazioni (126). Queste deformazioni sono solo un sottoinsieme delle deformazioni del continuo di Cauchy e dunque non comprendono in generale la soluzione per il continuo di Cauchy del particolare problema considerato.

Il modo corretto di vedere la relazione tra il modello di trave di Timoshenko e il continuo di Cauchy, nel caso di corpi tipo *trave*,<sup>1</sup> consiste nel considerare i due modelli come *modelli a scale diverse*, il primo più *sommario*, il secondo più *fine*.

Naturalmente ha interesse che i due modelli siano strettamente legati tra loro. Un modo per conciliare meglio la descrizione sommaria e quella fine, rispetto a quanto esposto nel paragrafo precedente, consiste in questo: per lo stesso insieme degli atti di moto test, che selezionano le classi di equipotenza, si considerano insieme di deformazioni più ampi di quelli descritti dalla (126), ma soggetti ad esempio alle condizioni di bilancio al bordo nel modello

<sup>1</sup>Quei corpi la cui forma può essere generata facendo scorrere una figura piana lungo una curva, risultando lo spessore piccolo rispetto alla lunghezza.

fine, di cui fa parte il bordo delle sezioni. Si giunge così a determinare valori diversi dei coefficienti delle funzioni di risposta. Inoltre, cosa di solito più importante, essendo diverse le deformazioni, risulta diversa la espressione della dilatazione infinitesima  $\mathbf{E}$  e quindi la (172). L'obiettivo è ottenere una valutazione accurata di  $\mathbf{T}\bar{\mathbf{a}}_1$  poiché su questa si basano le *verifiche di resistenza* del materiale.

Della espressione (172) è in genere considerata accurata la distribuzione normale uniforme corrispondente a  $\varepsilon$ , così come la distribuzione normale lineare corrispondente a  $\chi_2$  e a  $\chi_3$ . La distribuzione tangenziale uniforme corrispondente a  $\gamma_2$  nel continuo di Cauchy contrasta invece con la simmetria della tensione  $\mathbf{T}$ , essendo nulla la distribuzione superficiale sul bordo della sezione. Per questo viene sostituita, nel caso di sezioni rettangolari, da una distribuzione tangenziale quadratica, nulla sul bordo della sezione, di risultante  $Q_2$ . Lo stesso accade per il termine corrispondente a  $\gamma_3$ . Il termine corrispondente a  $\chi_1$  è accurato solo nel caso di sezione circolare.

## 6.8 Trave di Eulero-Bernoulli

Quando il rapporto tra spessore della sezione e lunghezza dell'asse è molto piccolo accade che  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  risultano molto piccoli, pur restando  $Q_2$  e  $Q_3$  determinate dalle equazioni di bilancio. Questo motiva una semplificazione del modello di trave di Timoshenko attraverso la introduzione dei *vincoli interni*

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0. \quad (173)$$

Corrispondentemente si modificano le espressioni (167) e (168) della funzione di risposta nelle seguenti

$$Q_2 = \mu A \gamma_2 + Q_2^r, \quad (174)$$

$$Q_3 = \mu A \gamma_3 + Q_3^r, \quad (175)$$

assumendo in generale che la tensione è determinata dalla deformazione a meno di una parte *reattiva* che ha potenza interna nulla in atti di moto compatibili con i vincoli. Dalla (159) la potenza corrispondente a  $Q_2^r$  e  $Q_3^r$  è

$$Q_2^r(w'_{o2} - \omega_3) + Q_3^r(w'_{o3} + \omega_2) \quad (176)$$

che risulta nulla per atti di moto compatibili con i vincoli interni (173)

$$u'_{o2} - \theta_3 = 0, \quad u'_{o3} + \theta_2 = 0, \quad (177)$$

qualunque siano  $Q_2^r$  e  $Q_3^r$ . Pertanto  $Q_2$  e  $Q_3$  hanno una parte reattiva che può avere qualunque valore, mentre è nulla la parte dipendente da  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ , essendo questi nulli. Più in generale si può assumere che esista una parte reattiva anche per  $N$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .