Appendice 1.
Spazi vettoriali

Indice

1 Spazi vettoriali

Si dice *spazio vettoriale sui reali* la struttura algebrica

$$(\mathcal{U}\,,+\,,\mathbb{R}\,,*\,),$$

dove $\mathcal{U}$ è un insieme, i cui elementi si dicono *vettori*, $\mathbb{R}$ è il campo dei numeri reali e le *operazioni*

$$+:\mathcal{U}\times\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{U},$$
$$*:\mathbb{R}\times\mathcal{U}\rightarrow\mathcal{U},$$

sono tali che

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{U},$
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{U},$
3. $\exists\,\mathbf{o}\in\mathcal{U} \quad | \quad \forall\mathbf{u}\in\mathcal{U} \quad \mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{u},$
4. $\forall\mathbf{u}\in\mathcal{U} \quad \exists\,-\mathbf{u} \quad | \quad \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{o},$
5. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{U}\,,\,\forall\alpha\in\mathbb{R},$
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u} \qquad \forall\mathbf{u}\in\mathcal{U}\,,\,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},$
7. $\alpha(\beta\mathbf{u})=(\alpha\beta)\mathbf{u} \quad \forall\mathbf{u}\in\mathcal{U}\,,\,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},$
8. $1\,\mathbf{u}=\mathbf{u} \quad \forall\mathbf{u}\in\mathcal{U}$

Il simbolo $*$ è sempre omesso, come nelle espressioni qui sopra. Dai precedenti assiomi derivano le seguenti proprietà

$$0\mathbf{u}=\mathbf{o},$$
$$\alpha\mathbf{o}=\mathbf{o},$$
$$-1\mathbf{u}=-\mathbf{u},$$
$$\alpha\mathbf{u}=\mathbf{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}=\mathbf{o}.$$

2 Dipendenza lineare

Si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ il vettore

$$\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3, \tag{1}$$

dove α_1, α_2, α_3 sono dei numeri reali. Una combinazione lineare si può costruire con un qualsiasi numero di vettori.

Scelti dei vettori, essi si dicono *linearmente indipendenti* nel caso in cui una loro combinazione lineare è uguale al vettore nullo *solo se* i coefficienti sono tutti nulli.

3 Basi

Una *base* di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è un insieme ordinato di vettori linearmente indipendenti $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ tale che qualsiasi vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ si possa esprimere come loro combinazione lineare

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n. \tag{2}$$

Si dimostra che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori. Questo numero si dice *dimensione* dello spazio $\mathcal{V}$ e si indica con $\dim \mathcal{V}$.

Si dimostra che ad ogni vettore corrisponde una sola combinazione lineare dei vettori di una base fissata. I coefficienti di tale combinazione lineare si dicono *componenti* del vettore in tale base.

4 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è una funzione

$$\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} \tag{3}$$

tale che

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$,
3. $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Un modo per definire un prodotto scalare consiste nell'assegnare una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ che si assume *ortonormale*, cioè tale che

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{se} \quad i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Il prodotto tra due vettori si potrà poi calcolare utilizzando la loro espressione in termini di combinazione lineare dei vettori base. Ad esempio nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{5}$$

Si definisce *norma* di un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ il numero reale

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{6}$$

Ad esempio dalla (5) si ottiene

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{7}$$

Si dice *angolo tra due vettori* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il numero reale α tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}. \tag{8}$$

5 Applicazioni lineari

Una *applicazione lineare* è una funzione tra due spazi vettoriali

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \tag{9}$$

tale che

1. $\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathbf{A}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Sia ad esempio $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base di $\mathcal{V}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ una base di $\mathcal{U}$. Si ha

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) = u_1 \mathbf{A}(\mathbf{e}_1) + u_2 \mathbf{A}(\mathbf{e}_2) + u_3 \mathbf{A}(\mathbf{e}_3). \tag{10}$$

Un tale vettore risulta una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$. Esprimendo questi come combinazioni lineari dei vettori base

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11} \mathbf{f}_1 + a_{21} \mathbf{f}_2, \tag{11}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12} \mathbf{f}_1 + a_{22} \mathbf{f}_2, \tag{12}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_{13} \mathbf{f}_1 + a_{23} \mathbf{f}_2, \tag{13}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{u}) &= (a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3) \mathbf{f}_1 \\ &\quad + (a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3) \mathbf{f}_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Si noti che, ponendo $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{f}_1 + w_2 \mathbf{f}_2$ e disponendo le componenti di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ in vettori colonna, risulta

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

La matrice che compare in questa relazione si dice *matrice di* $\mathbf{A}$. Si noti che le colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$.

Una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in se stesso

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \tag{16}$$

si dice *endomorfismo* di $\mathcal{V}$. Scelta una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la matrice di un endomorfismo $\mathbf{A}$ è la matrice quadrata definita dalle espressioni

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + a_{31} \mathbf{e}_3, \tag{17}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{32} \mathbf{e}_3, \tag{18}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_{13} \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3. \tag{19}$$

6 Applicazione lineare trasposta

Data una applicazione lineare tra due spazi vettoriali con prodotto scalare

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U} \tag{20}$$

si dice *trasposta* la applicazione lineare

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \tag{21}$$

tale che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{22}$$

Se si scelgono delle basi ortonormali sia in $\mathcal{V}$ che in $\mathcal{U}$ la matrice di $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ risulta essere la trasposta della matrice di $\mathbf{A}$.

Un endomorfismo $\mathbf{U} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *simmetrico* se $\mathbf{U}^{\mathsf{T}} = \mathbf{U}$. Un endomorfismo $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *ortogonale* se $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Si noti che, poiché

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{23}$$

si ha

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{24}$$

Dunque un endomorfismo $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ conserva il prodotto scalare se e solo se è ortogonale. Un endomorfismo $\mathbf{W} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ si dice *antisimmetrico* se $\mathbf{W}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{W}$. Se la base è ortonormale la matrice di un endomorfismo simmetrico è simmetrica, la matrice di un endomorfismo antisimmetrico è antisimmetrica.

7 Determinante

Dato un endomorfismo

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \tag{25}$$

si definisce (v. Appendice 2) *determinante* di $\mathbf{A}$ il rapporto tra i volumi

$$\det \mathbf{A} = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3)}{\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$$

Da tale definizione discende che il determinante di $\mathbf{A}$ è uguale al determinante della matrice di $\mathbf{A}$ in una qualsiasi base.

8 Rotazioni e simmetrie

Si consideri un endomorfismo ortogonale $\mathbf{Q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Essendo $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, si ha

$$\det(\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det \mathbf{I} = 1. \tag{26}$$

Pertanto risulta $|\det \mathbf{Q}| = 1$. Un endomorfismo ortogonale si dice *rotazione* se il determinante è 1, si dice *simmetria* se il determinante è -1.

Si supponga che esista un *sottospazio invariante* $\mathcal{W}$ rispetto a $\mathbf{Q}$. Per tale sottospazio si ha

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \quad \mathbf{Q}\mathbf{w} \in \mathcal{W}. \tag{27}$$

In particolare $\mathcal{W}$ è un autospazio se esiste λ tale che

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \quad \mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}. \tag{28}$$

Il sottospazio $\mathcal{W}^\perp$ costituito da tutti i vettori ortogonali ai vettori di $\mathcal{W}$, detto *complemento ortogonale* di $\mathcal{W}$, è anch'esso invariante. Infatti, essendo $\mathbf{Q}$ un isomorfismo e $\mathcal{W}$ invariante, comunque si scelga un vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ esiste un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ tale che $\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Per ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ e ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{W}^\perp$ risulta pertanto

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{v} \in \mathcal{W}^\perp. \tag{29}$$

8.1 Simmetrie e rotazioni in uno spazio vettoriale di dimensione 2

Sia $\mathbf{Q}$ un endomorfismo ortogonale in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimensione 2 definito sul campo dei reali. In tal caso un sottospazio invariante può solo avere dimensione 1 ed è pertanto definito dalla condizione che esistano λ e $\mathbf{w}$ tali che $\mathbf{Q}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Questa condizione equivale alla seguente

$$(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w} = 0, \tag{30}$$

che implica, affinché sia $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$,

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{31}$$

In corrispondenza di un tale vettore $\mathbf{w}$ si ha

$$\mathbf{Q}\mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{w} \cdot \lambda\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1. \tag{32}$$

Indicando la matrice di $\mathbf{Q}$, in una qualsiasi base ortonormale, con

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

questa ha, essendo $\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, le seguenti proprietà

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \tag{34}$$

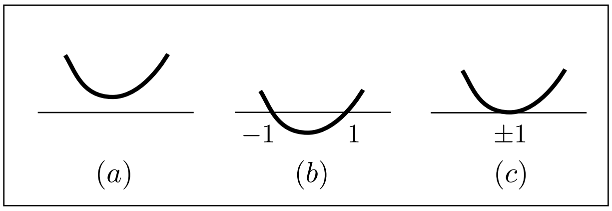
$$b_2^2 + a_2^2 = 1, \tag{35}$$

$$a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0, \tag{36}$$

mentre le radici dell'equazione caratteristica (31) sono date dall'espressione

$$\frac{(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 + a_2)^2 - 4 \det \mathbf{Q}}}{2}. \tag{37}$$

Per il polinomio caratteristico, nella (31), si possono avere pertanto i seguenti casi:



Nel caso (a), in assenza di zeri del polinomio caratteristico, non esiste nessun sottospazio invariante. Infatti risulta

$$\big((a_1 + a_2)^2 - 4\det \mathbf{Q}\big) < 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = 1. \tag{38}$$

Ne deriva, dalle proprietà della matrice di $\mathbf{Q}$, che

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = -b_2. \tag{39}$$

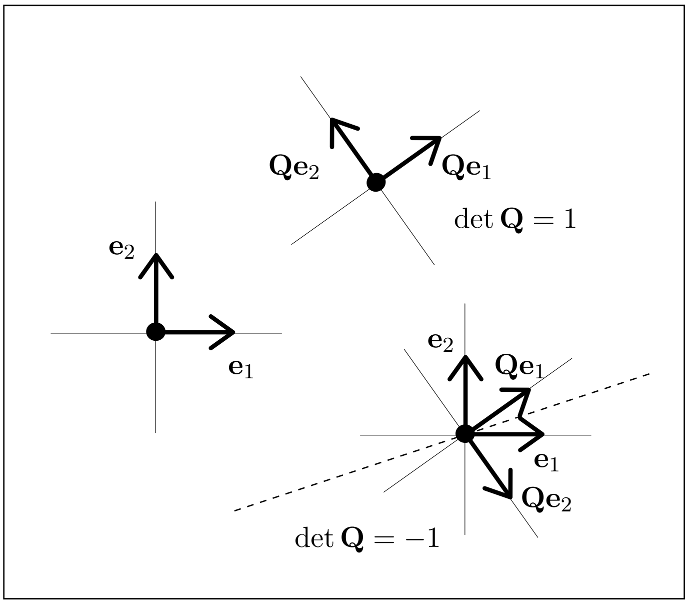
Per questa ragione la matrice di $\mathbf{Q}$ può essere espressa nella forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Si può osservare che se $\mathbf{Q}$ fosse la composizione di una rotazione con un 'ribaltamento' sarebbe $\det \mathbf{Q} = -1$. La matrice di $\mathbf{Q}$ sarebbe in questo caso, essendo $\mathbf{Q}\mathbf{e}_2$ opposto al precedente,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Tale matrice che ha autovalori 1 e -1. Si tratta dunque del caso (b). Questo caso è illustrato nella figura in basso in cui si vede come si possa tracciare un *asse di simmetria* (linea tratteggiata) a cui corrisponde un autospazio con autovalore 1, mentre ad una retta ortogonale all'asse di simmetria corrisponde un autospazio con autovalore -1.

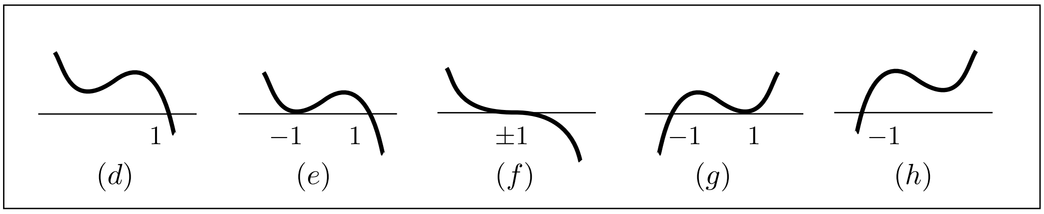


Viceversa nel caso (b), ai due autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ corrispondono due autospazi, mutuamente ortogonali per la (29). Si tratta dunque della simmetria appena illustrata.

Nel caso (c) se $\lambda = 1$ allora $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Se $\lambda = -1$ si tratta di una rotazione di ampiezza π.

8.2 Simmetrie e rotazioni in uno spazio vettoriale di dimensione 3

Si consideri ora un endomorfismo ortogonale $\mathbf{Q}$ in uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimensione 3 definito sul campo dei reali. In questo caso un sottospazio invariante può avere dimensione 1 oppure 2. Il polinomio caratteristico è di terzo grado e il suo grafico è uno dei seguenti:



In ogni caso esiste un autospazio di dimensione 1 e, per la (29), il suo complemento ortogonale è invariante.

Nel caso (d) esiste un solo autovalore e dunque un solo autospazio. Essendo il complemento ortogonale invariante, una qualsiasi coppia di vettori in esso, per quanto visto nel caso (a), è ruotata da $\mathbf{Q}$. Indicando con $\mathbf{a}_3$ è un autovettore unitario e con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una base ortonormale, la matrice di $\mathbf{Q}$ in tale base risulta

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Risulta pertanto $\det \mathbf{Q} = 1$.

Nel caso (e) risulta $\det \mathbf{Q} = (-1)^2 = 1$. Esiste un autospazio di dimensione 1 in corrispondenza di $\lambda = 1$. Sul complemento ortogonale $\mathbf{Q}$ si comporta come nel caso (c) con $\lambda = -1$. Si tratta dunque di una rotazione di ampiezza π.

Nel caso (f) è $\mathbf{Q} = \pm\mathbf{I}$. Corrispondentemente risulta $\det \mathbf{Q} = \pm 1$.

Nel caso (g) risulta $\det \mathbf{Q} = -1$. Esiste un autospazio di dimensione 1 in corrispondenza di $\lambda = -1$. Sul complemento ortogonale $\mathbf{Q}$ si comporta come nel caso (c) con $\lambda = 1$. Si tratta dunque di una simmetria.

Nel caso (h) esiste un solo autovalore e dunque un solo autospazio. Essendo il complemento ortogonale invariante, una qualsiasi coppia di vettori in esso, per quanto visto nel caso (a), è ruotata da $\mathbf{Q}$. Indicando con $\mathbf{a}_3$ è un autovettore unitario e con $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una base ortonormale, la matrice di $\mathbf{Q}$ in tale base risulta, essendo $\lambda = -1$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Risulta pertanto $\det \mathbf{Q} = -1$.

Per una rotazione $\mathbf{R}$ (endomorfismo ortogonale con determinante uguale a 1) si ha in generale il caso (d). Esiste dunque un sottospazio invariante di dimensione 1 corrispondente a $\lambda = 1$. Tale sottospazio si chiama *asse della rotazione.*

9 Decomposizione spettrale

Si dimostra che per un endomorfismo simmetrico $\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ esiste la decomposizione, detta *spettrale*,

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{P}_m, \quad (m \leq \dim \mathcal{V}), \tag{44}$$

essendo gli endomorfismi $\mathbf{P}_i$ delle *proiezioni ortogonali*, cioè tali che $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i \mathbf{v} = \mathbf{P}_i \mathbf{v}, \tag{45}$$

$$(\mathbf{P}_1 + \cdots + \mathbf{P}_m)\mathbf{v} = \mathbf{v}, \tag{46}$$

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j \mathbf{v} = \mathbf{o}, \tag{47}$$

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_j \mathbf{v} = 0, \tag{48}$$

e gli scalari λ_i, detti *autovalori*, dei numeri reali. Le immagini delle proiezioni $\mathbf{P}_i$ si dicono *autospazi.* Si noti che se $\mathbf{v}_i \in \operatorname{im} \mathbf{P}_i$ allora, essendo anche $\mathbf{v}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i$, risulta dalla (44)

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \tag{49}$$

Essendo tale espressione equivalente a

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{o}, \tag{50}$$

gli autovalori sono definiti dalla condizione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{51}$$

Il vettore $\mathbf{v}_i$ è un *autovettore* corrispondente all'autovalore λ_i. Per la (48) due autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali. Si dice che gli autospazi sono mutuamente ortogonali.

Un endomorfismo simmetrico si dice *definito positivo* se gli autovalori sono tutti positivi.

9.1 Calcolo della decomposizione spettrale

Una volta calcolati gli autovalori dalla condizione (51), le proiezioni ortogonali sugli autospazi si possono calcolare osservando che, per le proprietà (45)–(48), dalla (44) si ha, ad esempio nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 2$,

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 - \lambda_1(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2. \tag{52}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}), \tag{53}$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_2. \tag{54}$$

Nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_1(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{P}_3, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_2(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{P}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{P}_3, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 - \lambda_3(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{P}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{P}_2. \end{aligned} \tag{57}$$

Ne deriva che

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{P}_3, \tag{58}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{P}_1, \tag{59}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{P}_2. \tag{60}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}), \tag{61}$$
$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}), \tag{62}$$
$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}). \tag{63}$$

Il calcolo consiste nel valutare le matrici delle proiezioni ortogonali attraverso le espressioni corrispondenti alle espressioni qui sopra.

10 Decomposizione polare

Si dimostra che un endomorfismo

$$\mathbf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \tag{64}$$

tale che $\det \mathbf{F} > 0$, si può esprimere in un unico modo come composizione

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \tag{65}$$

essendo $\mathbf{R}$ una rotazione e $\mathbf{U}$ un endomorfismo simmetrico definito positivo. Si può calcolare facilmente il quadrato di $\mathbf{U}$ essendo

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2. \tag{66}$$

Dalla definizione precedente l'endomorfismo $\mathbf{C}$ risulta simmetrico e definito positivo. Infatti

$$\mathbf{C}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}^{\mathsf{T}}\mathbf{F}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{u} \geq 0, \tag{67}$$

essendo il prodotto nullo se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Pertanto $\mathbf{C}$ è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono positivi. Se esiste $\mathbf{U}$, esso è diagonalizzabile essendo simmetrico e definito positivo. Nel caso in cui $\dim \mathcal{V} = 3$ si ha dunque, dalla (44),

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^2 &= (\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3)(\lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3) \\ &= \lambda_1^2 \mathbf{P}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{P}_3.\end{aligned} \tag{69}$$

La condizione $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ implica che, essendo la decomposizione spettrale unica, la decomposizione spettrale di $\mathbf{C}$ sia

$$\mathbf{C} = \lambda_1^2 \mathbf{P}_1 + \lambda_2^2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3^2 \mathbf{P}_3. \tag{70}$$

L'endomorfismo $\mathbf{U}$ si ottiene dunque, costruendo la decomposizione spettrale di $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \eta_1 \mathbf{P}_1 + \eta_2 \mathbf{P}_2 + \eta_3 \mathbf{P}_3, \tag{71}$$

e ponendo quindi

$$\mathbf{U} := \sqrt{\eta_1}\mathbf{P}_1 + \sqrt{\eta_2}\mathbf{P}_2 + \sqrt{\eta_3}\mathbf{P}_3. \tag{72}$$

Tale endomorfismo è definito positivo, essendo positivi i suoi autovalori. La unicità di $\mathbf{U}$ deriva da tale proprietà, essendo uniche le radici positive degli autovalori di $\mathbf{C}$. La rotazione si ottiene infine dalla espressione

$$\mathbf{R} := \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{F}(\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{\sqrt{\eta_2}}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{\sqrt{\eta_3}}\mathbf{P}_3). \tag{73}$$

L'endomorfismo $\mathbf{R}$ risulta infatti ortogonale essendo

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^{\mathsf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}) = (\mathbf{U}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{U}^2\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}. \tag{74}$$

Il determinante di $\mathbf{R}$ risulta positivo essendo positivo il determinante di $\mathbf{F}$ e il determinante di $\mathbf{U}$.

11 Prodotto tensoriale

Siano $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ due spazi vettoriali dotati di prodotto scalare. In corrispondenza di una coppia di vettori $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ risulta definita l'applicazione lineare, detta *prodotto tensoriale* tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}, \tag{75}$$

tale che[1]

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \tag{76}$$

[1]Si può dare una definizione alternativa del prodotto tensoriale assumendo che sia $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$. Ma questo corrisponde semplicemente a scambiare le posizioni di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ attorno al simbolo $\otimes$.

Sia ad esempio $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ una ortonormale base di $\mathcal{U}$. Ponendo $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, risulta

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{u} = v_1\mathbf{u}, \tag{77}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{u} = v_2\mathbf{u}, \tag{78}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_3 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{u} = v_3\mathbf{u}. \tag{79}$$

Pertanto la matrice di $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$ è tale che la colonna j-ma è costituita dalle componenti del vettore $\mathbf{u}$ moltiplicate per v_j, l'elemento sulla riga i e la colonna j risultando $v_j u_i$:

$$\begin{pmatrix} v_1u_1 & v_2u_1 & v_3u_1 \\ v_1u_2 & v_2u_2 & v_3u_2 \\ v_1u_3 & v_2u_3 & v_3u_3 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Si dimostra che i prodotti tensoriali $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{a}_j$, costruiti con i vettori di una base di $\mathcal{V}$ e i vettori di una base di $\mathcal{U}$, costituiscono una base dello spazio delle applicazioni lineari $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$. Qualsiasi applicazione è dunque esprimibile come loro combinazione lineare.

Si noti che, essendo

$$\begin{aligned} ((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{a}_j &= ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a}_j = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_j) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_j)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) = ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_j)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_i = ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{e}_i, \end{aligned} \tag{81}$$

risulta

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^{\mathsf{T}} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}. \tag{82}$$

Un prodotto tensoriale può ovviamente essere definito anche come endomorfismo di $\mathcal{V}$ o di $\mathcal{U}$. Si osservi che, in corrispondenza di due applicazioni $\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ e $\mathbf{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, si ha

$$((\mathbf{A}\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{w})\mathbf{u} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{U} \tag{83}$$

$$(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{u}))\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \tag{84}$$

Risulta dunque

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \tag{85}$$

$$\mathbf{v} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}). \tag{86}$$

12 Prodotto scalare tra endomorfismi

Si consideri uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ e una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. Si osservi che, utilizzando una base ortonormale,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \sum_i v_i u_i = \operatorname{tr}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}), \tag{87}$$

dove il simbolo 'tr' indica la traccia di un endomorfismo, definita come la somma dei termini sulla diagonale della matrice di questo. Ne deriva che, per la (85), in corrispondenza di qualsiasi endomorfismo $\mathbf{A}$ di $\mathcal{V}$ si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{tr}((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^{\mathsf{T}}). \tag{88}$$

Questa espressione motiva una definizione di prodotto scalare tra un endomorfismo e un prodotto tensoriale $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ tale che

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{tr}((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{A}^{\mathsf{T}}). \tag{89}$$

Si noti che

$$\mathbf{A}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{tr}((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{A}). \tag{90}$$

Poichè un qualsiasi endomorfismo può essere espresso come combinazione lineare dei prodotti tensoriali costruiti con i vettori di una base, la definizione data di prodotto scalare si estende ad una qualsiasi coppia di endomorfismi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, risultando

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \operatorname{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}). \tag{91}$$

Dalla simmetria del prodotto scalare tra vettori deriva poi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \tag{92}$$

Una importante proprietà del prodotto scalare è che il prodotto di un endomorfismo simmetrico $\mathbf{U}$ con un endomorfismo antisimmetrico $\mathbf{W}$ è nullo. Si ha infatti

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = \operatorname{tr}(\mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}) = \operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}), \tag{93}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{W} = \operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}^{\mathsf{T}}) = -\operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{W}). \tag{94}$$