Appendice 2.
Spazi euclidei

Indice

1 Spazi euclidei

Un insieme $\mathcal{E}$ si dice *spazio affine* modellato sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{V}$ se esiste una funzione
$$\mathcal{E} \times \mathcal{V} \to \mathcal{E}, \tag{1}$$
che trasforma una coppia $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$,$\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ in un elemento di $\mathcal{E}$, indicato con $\mathbf{x} + \mathbf{v}$, in modo tale che

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = \mathbf{x} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E},\ \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V},\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$, dove $\mathbf{o}$ è il vettore nullo di $\mathcal{V}$
3. per ogni coppia $\mathbf{x} \in \mathcal{E}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ esiste un unico elemento di $\mathcal{V}$, indicato con $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, tale che $\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Lo spazio $\mathcal{V}$ si dice *spazio delle traslazioni* di $\mathcal{E}$. Si dice inoltre che lo spazio affine $\mathcal{E}$ ha dimensione n con $n := \dim \mathcal{V}$. Si dice *spazio euclideo* uno spazio affine tale che in $\mathcal{V}$ sia definito un prodotto scalare. Si consideri la norma in $\mathcal{V}$ indotta dal prodotto scalare, cioè tale che $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$ si dice *ortonormale* se $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Si definisce *distanza* la funzione $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ tale che $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

Gli elementi di $\mathcal{E}$ si diranno *posizioni*.

Dagli assiomi dati derivano le seguenti espressioni utili nel calcolo. Sia
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}. \tag{2}$$
Il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, per l'assioma 3, è l'unico vettore tale che
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \tag{3}$$
Risulta dunque
$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{u}. \tag{4}$$
Un'altra utile relazione si ottiene nel modo seguente. Si osservi che per l'assioma 1 si ha
$$\mathbf{y} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{x} + \mathbf{u} + (-\mathbf{u}), \tag{5}$$
da cui, per l'assioma 2, risulta
$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{u} \tag{6}$$
Utilizzando la (4), si ottiene infine
$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = -\mathbf{u} \tag{7}$$
e anche
$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = -(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \tag{8}$$

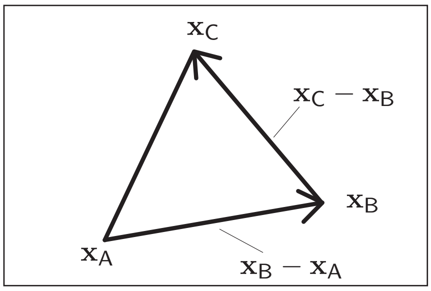

Figura 1: Triangolo

1.1 Vertici di un triangolo

Si osservi che, scelte tre posizioni $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{x}_C$, dall'assioma 3 si ha

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \tag{9}$$

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_B + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B). \tag{10}$$

Sostituendo nella seconda la prima, per l'assioma 1, risulta

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_A + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B). \tag{11}$$

Essendo anche

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_A + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \tag{12}$$

risulta

$$(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A). \tag{13}$$

1.2 Vertici di un parallelogramma

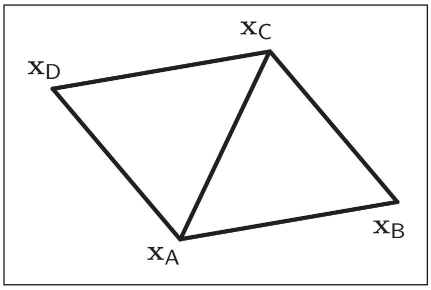

Figura 2: Parallelogramma

Aggiungendo alle tre posizioni $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{x}_C$ la posizione

$$\mathbf{x}_D := \mathbf{x}_A + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B). \tag{14}$$

Si dimostra che

$$\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B. \tag{15}$$

Si osservi infatti che, utilizzando la (12) e la (14), si ha

$$\mathsf{x}_\mathsf{D} - \mathsf{x}_\mathsf{C} = \big(\mathsf{x}_\mathsf{A} + (\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{B})\big) - \big(\mathsf{x}_\mathsf{A} + (\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{A})\big). \tag{16}$$

Questa relazione implica, per l'assioma 3,

$$\big(\mathsf{x}_\mathsf{A} + (\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{B})\big) = \big(\mathsf{x}_\mathsf{A} + (\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{A})\big) + (\mathsf{x}_\mathsf{D} - \mathsf{x}_\mathsf{C}). \tag{17}$$

Pertanto risulta

$$\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{B} = (\mathsf{x}_\mathsf{C} - \mathsf{x}_\mathsf{A}) + (\mathsf{x}_\mathsf{D} - \mathsf{x}_\mathsf{C}). \tag{18}$$

Applicando la (13) si ottiene infine, per via della (8), la (15).

1.3 Sistemi di coordinate

Un sistema di coordinate *affine* in uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n è costituito da una funzione biunivoca

$$\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

indotta dalla scelta di una posizione *origine* $\mathbf{o} \in \mathcal{E}$ e di una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ nello spazio delle traslazioni $\mathcal{V}$, definita come la funzione che trasforma una posizione $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ nella n-pla delle componenti del vettore $(\mathbf{x} - \mathbf{o})$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Una posizione $\mathbf{x}$ può essere assegnata in termini di coordinate attraverso la espressione

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + (\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \xi_n \mathbf{e}_n) \tag{20}$$

essendo $\psi(\mathbf{x}) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Un sistema di coordinate affine si dice *cartesiano* se la base corrispondente è ortonormale.

2 Curve in uno spazio euclideo

Si consideri uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n. Si dice *curva* una funzione

$$\mathbf{c} : \mathcal{I} \to \mathcal{E}, \tag{21}$$

con $\mathcal{I}$ intervallo aperto di $\mathbb{R}$, tale che, in corrispondenza di un sistema di coordinate affine definito da ψ, la funzione

$$\psi \circ \mathbf{c} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n \tag{22}$$

sia C^∞. Con ciò si intende che, esprimendo la funzione (21) in termini di coordinate

$$\mathbf{c}(\zeta) = \mathbf{o} + c_1(\zeta)\mathbf{e}_1 + c_2(\zeta)\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n(\zeta)\mathbf{e}_n, \tag{23}$$

le funzioni c_i siano C^∞.

Si dice *vettore tangente* alla curva $\mathbf{c}$ in $\zeta \in \mathcal{I}$ il vettore

$$\mathbf{c}'(\zeta) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{c}(\zeta + h) - \mathbf{c}(\zeta)). \tag{24}$$

Tale vettore esiste poiché per la (23) si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\mathbf{c}(\zeta+h)-\mathbf{c}(\zeta)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\big(c_1(\zeta+h)-c_1(\zeta)\big)\mathbf{e}_1+\cdots+\big(c_n(\zeta+h)-c_n(\zeta)\big)\mathbf{e}_n\Big)\\ &= \frac{dc_1}{d\zeta}(\zeta)\mathbf{e}_1+\cdots+\frac{dc_n}{d\zeta}(\zeta)\mathbf{e}_n \end{aligned} \tag{25}$$

Si noti che curve diverse possono avere la stessa immagine. In generale due curve $\mathbf{c}_1 : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{E}$, $\mathbf{c}_2 : \mathcal{I}_2 \to \mathcal{E}$ aventi la stessa immagine $\mathcal{C}$ hanno tangenti diverse in punti corrispondenti. Si consideri infatti la funzione

$$\sigma : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_2 \tag{26}$$

tale che $\mathbf{c}_1(\zeta) = \mathbf{c}_2(\sigma(\zeta))$. Dalla definizione (24) e dalla (25) risulta

$$\mathbf{c}_1'(\zeta) = \mathbf{c}_2'(\sigma(\zeta))\sigma'(\zeta), \tag{27}$$

avendo posto $\sigma'(\zeta) := d\sigma(\zeta)/d\zeta$.

Spesso con il termine *curva* si indica il sottoinsieme $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ immagine di $\mathbf{c}$. Una funzione (21) si dice *parametrizzazione* della curva $\mathcal{C}$ se il vettore tangente è diverso dal vettore nullo in ogni punto. Se $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ sono due parametrizzazioni della stessa curva, la funzione (26) si dice *riparametrizzazione*.

2.1 Lunghezza di una curva

Si consideri l'arco di curva compreso tra i punti $\mathbf{x}_\mathsf{A}$ e $\mathbf{x}_\mathsf{B}$ della curva $\mathcal{C}$ e due parametrizzazioni $\mathbf{c}_1 : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{E}$, $\mathbf{c}_2 : \mathcal{I}_2 \to \mathcal{E}$. Indicando con $[\eta_\mathsf{A}, \eta_\mathsf{B}]$, $[\zeta_\mathsf{A}, \zeta_\mathsf{B}]$ i corrispondenti intervalli contenuti in $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ e con σ la riparametrizzazione (26), risulta, attraverso il cambiamento di variabile $\eta = \sigma(\zeta)$ e per la (27),

$$l_{\mathsf{AB}} := \int_{\eta_\mathsf{A}}^{\eta_\mathsf{B}} \|\mathbf{c}_2'(\eta)\| d\eta = \int_{\zeta_\mathsf{A}}^{\zeta_\mathsf{B}} \|\mathbf{c}_2'(\sigma(\zeta))\| |\sigma'(\zeta)| d\zeta = \int_{\zeta_\mathsf{A}}^{\zeta_\mathsf{B}} \|\mathbf{c}_1'(\zeta)\| d\zeta. \tag{28}$$

Tale scalare, che risulta dipendere solo dalla immagine $\mathcal{C}$, per una fissata norma di $\mathcal{V}$, si dice *lunghezza* dell'arco di curva.

Si noti che qualunque sia la parametrizzazione $\mathbf{c}_1$, se la riparametrizzazione σ è tale che $\sigma(\zeta_\mathsf{B}) - \sigma(\zeta_\mathsf{A})$ ha il significato di *lunghezza dell'arco di curva* tra i punti $\mathbf{c}_1(\zeta_\mathsf{A})$ e $\mathbf{c}_1(\zeta_\mathsf{B})$, essendo

$$\sigma(\zeta_\mathsf{B}) - \sigma(\zeta_\mathsf{A}) = \int_{\zeta_\mathsf{A}}^{\zeta_\mathsf{B}} \|\mathbf{c}_1'(\zeta)\| d\zeta, \tag{29}$$

risulta $\sigma'(\zeta) = \|\mathbf{c}_1'(\zeta)\|$ e, per la (27), $\|\mathbf{c}_2'(\eta)\| = 1$. In una parametrizzazione in cui il parametro ha il significato di lunghezza di un arco di curva i vettori tangenti hanno dunque norma unitaria.

3 Rette e piani

Una *retta* per $\mathbf{x}_\mathsf{A}$ è una curva del tipo

$$\mathbf{c}(\zeta) = \mathbf{x}_\mathsf{A} + \zeta \mathbf{u}, \tag{30}$$

essendo $\mathbf{u}$ un vettore. Notare che risulta $\mathbf{c}'(\zeta) = \mathbf{u}$. Date due rette

$$\mathbf{c}_1(\zeta) = \mathbf{x}_\mathsf{A} + \zeta \mathbf{u}_1, \tag{31}$$
$$\mathbf{c}_2(\zeta) = \mathbf{x}_\mathsf{A} + \zeta \mathbf{u}_2, \tag{32}$$

si dice *angolo* tra di esse il numero reale α tale che

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\|}. \tag{33}$$

Le due rette si dicono *ortogonali* se $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Due rette

$$\mathbf{c}_1(\zeta) = \mathbf{x}_\mathsf{A} + \zeta \mathbf{u}_1, \tag{34}$$
$$\mathbf{c}_2(\zeta) = \mathbf{x}_\mathsf{B} + \zeta \mathbf{u}_2, \tag{35}$$

si dicono *parallele* se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono vettori linearmente dipendenti.

Un *piano* per $\mathbf{x}_\mathsf{A}$ è una funzione del tipo

$$\boldsymbol{\pi}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{x}_\mathsf{A} + \zeta_1 \mathbf{u}_1 + \zeta_2 \mathbf{u}_2, \tag{36}$$

essendo $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ due vettori linearmente indipendenti.

Anche per le immagini di tali funzioni si usano i termini *retta* e *piano*, rispettivamente.

4 Area

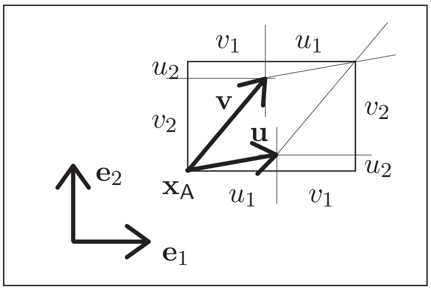

Figura 3: Area di un parallelogramma

In uno spazio euclideo[1] di dimensione 2 si consideri una posizione $\mathbf{x}_\mathsf{A}$ e il parallelogramma corrispondente ad una coppia di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, di vertici

$$\mathbf{x}_\mathsf{A},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{u},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{v},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v}. \tag{37}$$

[1] Si noti che nelle definizioni che seguono di area, volume e determinante si utilizza solo la struttura di spazio affine. Tali definizioni sono pertanto indipendenti dal prodotto scalare e dunque dalla nozione di ortogonalità.

Si dice *area* una funzione

$$\text{area} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \tag{38}$$

tale che

1. $\text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\,\text{area}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
2. $\text{area}(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \text{area}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$,
3. $\text{area}(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha\,\text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,

e che non valga zero per qualsiasi coppia di vettori. Si può dimostrare che da queste proprietà deriva che l'area è nulla se e solo se i vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sono linearmente dipendenti.

Esprimendo i vettori come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\text{area}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \text{area}(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = u_1\,\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) + u_2\,\text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) \\
&= u_1\,\text{area}(\mathbf{e}_1, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) + u_2\,\text{area}(\mathbf{e}_2, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
&= u_1v_1\,\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + u_1v_2\,\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + u_2v_1\,\text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + u_2v_2\,\text{area}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\
&= (u_1v_2 - u_2v_1)\,\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).
\end{aligned} \tag{39}$$

L'area del parallelogramma risulta pertanto uguale al determinante della matrice che ha per colonne le coppie delle componenti dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, moltiplicato per l'area del parallelogramma corrispondente ai vettori della base. Se la base è ortonormale si assume di solito

$$\text{area}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1. \tag{40}$$

L'espressione trovata per l'area coincide con quella che si può calcolare seguendo la Fig. 3, utilizzando la definizione di area di un rettangolo e di area di un triangolo, attraverso l'espressione

$$(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - 2\Big(\frac{u_1u_2 + v_1v_2}{2} + v_1u_2\Big) = u_1v_2 - v_1u_2. \tag{41}$$

5 Volume

In uno spazio euclideo di dimensione 3 si consideri una posizione $\mathbf{x}_\mathsf{A}$ e il parallelepipedo corrispondente ad una terna di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, di vertici

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_\mathsf{A}, \\
&\mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{u},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{v},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{w}, \\
&\mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{w} + \mathbf{u}, \\
&\mathbf{x}_\mathsf{A} + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Si dice *volume* una funzione

$$\text{vol} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}, \tag{43}$$

tale che

1. $\operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\operatorname{vol}(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}) = -\operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$,
2. $\operatorname{vol}(\mathbf{u}+\mathbf{z},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) + \operatorname{vol}(\mathbf{z},\mathbf{v},\mathbf{w})$,
3. $\operatorname{vol}(\alpha\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \alpha\operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$,

e che non valga zero per qualsiasi terna di vettori. Si può dimostrare che da queste proprietà deriva che il volume è nullo se e solo se i vettori $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ sono linearmente dipendenti.

Esprimendo i vettori come combinazione lineare dei vettori della base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{3} u_i \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i,\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i v_j \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{w})\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} u_i v_j w_k \operatorname{vol}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)\\ &= (u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1)\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3).\end{aligned} \tag{44}$$

Il volume del parallelepipedo risulta pertanto uguale al determinante della matrice che ha per colonne le terne delle componenti dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, moltiplicato per il volume del parallelepipedo corrispondente ai vettori della base. Se la base è ortonormale si assume di solito

$$\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = 1. \tag{45}$$

6 Determinante

Nel caso di spazio euclideo di dimensione 2, ponendo per un endomorfismo $\mathbf{F}$ di $\mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\mathbf{e}_1 &= f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2\\ \mathbf{F}\mathbf{e}_2 &= f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2\end{aligned} \tag{46}$$

si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1,\mathbf{F}\mathbf{e}_2) &= \operatorname{area}(f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2, f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2)\\ &= (f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12})\operatorname{area}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2).\end{aligned} \tag{47}$$

Si definisce *determinante* di $\mathbf{F}$ il rapporto

$$\det\mathbf{F} = \frac{\operatorname{area}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1,\mathbf{F}\mathbf{e}_2)}{\operatorname{area}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)} \tag{48}$$

Si dimostra che tale rapporto non dipende dalla scelta della coppia di vettori e neppure dalla scelta della funzione area.

La definizione data si estende al caso di spazio euclideo di dimensione 3. Per un endomorfismo $\mathbf{F}$ di $\mathcal{V}$ si definisce *determinante* di $\mathbf{F}$ il rapporto

$$\det\mathbf{F} = \frac{\operatorname{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1,\mathbf{F}\mathbf{e}_2,\mathbf{F}\mathbf{e}_3)}{\operatorname{vol}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} \tag{49}$$

Si noti che ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{e}_1 &= f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2 + f_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{F}\mathbf{e}_2 &= f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2 + f_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{F}\mathbf{e}_2 &= f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2 + f_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{50}$$

si ottiene

$$\begin{gathered} \mathrm{vol}(\mathbf{F}\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) \\ = \mathrm{vol}(f_{11}\mathbf{e}_1 + f_{21}\mathbf{e}_2 + f_{31}\mathbf{e}_3, f_{12}\mathbf{e}_1 + f_{22}\mathbf{e}_2 + f_{32}\mathbf{e}_3, f_{13}\mathbf{e}_1 + f_{23}\mathbf{e}_2 + f_{33}\mathbf{e}_3) \\ = (f_{11}f_{22}f_{33} + f_{21}f_{32}f_{13} + f_{31}f_{12}f_{23} - f_{11}f_{32}f_{23} - f_{21}f_{12}f_{33} - f_{31}f_{22}f_{13})\,\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \end{gathered} \tag{51}$$

7 Orientamento

Definita un'area in uno spazio euclideo di dimensione 2, si dicono *orientate positivamente* le coppie ordinate di vettori a cui corrisponde un parallelogramma di area positiva, *orientate negativamente* quelle a cui corrisponde un parallelogramma di area negativa.

Definito un volume in uno spazio euclideo di dimensione 3, si dicono *orientate positivamente* le terne di vettori a cui corrisponde un parallelepipedo di volume positivo, *orientate negativamente* quelle a cui corrisponde un parallelepipedo di volume negativo.

Per via della (48) e della (49), un endomorfismo $\mathbf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *conserva l'orientamento* se e solo se

$$\det \mathbf{F} > 0. \tag{52}$$

8 Prodotto vettoriale

In uno spazio euclideo di dimensione 3, in cui sia stato definito il volume in modo che in corrispondenza di una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sia

$$\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1, \tag{53}$$

si definisce *prodotto vettoriale* tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il vettore

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \tag{54}$$

tale che

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \tag{55}$$

Si noti che, per le proprietà del volume, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Inoltre $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$ se e solo se i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti. Dalla (44) risulta

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \tag{56}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \tag{57}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1. \tag{58}$$

Pertanto è

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{e}_3. \tag{59}$$

In particolare risulta

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \tag{60}$$

8.1 Prodotto tensoriale antisimmetrico

Il prodotto vettoriale può essere messo in relazione con il prodotto tensoriale nel seguente modo. In corrispondenza dei due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si consideri l'endomorfismo

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}. \tag{61}$$

Come qualsiasi endomorfismo questo può essere espresso come la somma della parte simmetrica e della parte antisimmetrica

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathrm{sym}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \mathrm{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \tag{62}$$

dove

$$\mathrm{sym}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{\mathsf{T}}), \qquad \mathrm{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{\mathsf{T}}). \tag{63}$$

Essendo la matrice di $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$

$$\begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{pmatrix}, \tag{64}$$

la matrice della parte antisimmetrica risulta

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_2 v_1 - v_2 u_1 & u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 & 0 & u_3 v_2 - v_3 u_2 \\ u_1 v_3 - v_1 u_3 & u_2 v_3 - v_2 u_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Si osservi che gli elementi $(3,2)$, $(1,3)$ e $(2,1)$ di questa matrice, a meno del fattore $1/2$, sono uguali alle componenti del vettore (59). Esiste dunque una corrispondeza biunivoca tra i vettori $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ e gli endomorfismi $\mathrm{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$, risultando $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ il vettore assiale di $2\,\mathrm{skw}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$.

8.2 Rotazioni e prodotto vettoriale

In uno spazio euclideo di dimensione 3, per la definizione data di prodotto vettoriale, si ha in corrispondenza di una coppia di vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \qquad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}. \tag{66}$$

Applicando una rotazione $\mathbf{R}$ si ottiene

$$(\mathbf{Ru} \times \mathbf{Rv}) \cdot \mathbf{Rw} = \mathrm{vol}(\mathbf{Ru}, \mathbf{Rv}, \mathbf{Rw}) = \mathrm{vol}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{67}$$

da cui deriva che $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}$

$$(\mathbf{Ru} \times \mathbf{Rv}) \cdot \mathbf{Rw} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \tag{68}$$

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{Ru} \times \mathbf{Rv}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \tag{69}$$

Risulta pertanto

$$\mathbf{R}^{\mathsf{T}}(\mathbf{Ru} \times \mathbf{Rv}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \tag{70}$$

da cui si ottiene infine, essendo $\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$,

$$\mathbf{Ru} \times \mathbf{Rv} = \mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \tag{71}$$

9 Campi scalari e campi vettoriali

Un *campo scalare* su uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ è una funzione

$$\alpha : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \tag{72}$$

che assegna ad ogni posizione un numero reale.

Fissato un sistema di coordinate, il campo scalare (72) può essere descritto, in uno spazio euclideo di dimensione 3, dalla funzione

$$\hat{\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{73}$$

tale che

$$\alpha(\mathbf{x}) = (\alpha \circ \psi^{-1})(\psi(\mathbf{x})) = \hat{\alpha}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{74}$$

essendo (ξ_1, ξ_2, ξ_3) le coordinate della posizione $\mathbf{x}$.

Si dice *derivata del campo scalare α lungo la curva* $\mathbf{c}$ in $\mathbf{c}(0)$ lo scalare

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\alpha(\mathbf{c}(h)) - \alpha(\mathbf{c}(0))\Big). \tag{75}$$

Descrivendo la curva attraverso la (23) e il campo scalare attraverso la (73) l'espressione della derivata diventa

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\alpha(\mathbf{c}(h)) - \alpha(\mathbf{c}(0))\Big) \\ &\quad = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(\hat{\alpha}(c_1(h), c_2(h), c_3(h)) - \hat{\alpha}(c_1(0), c_2(0), c_3(0))\Big) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \xi_i}(c_1(0), c_2(0), c_3(0)) \frac{dc_i}{dh}(0), \end{aligned} \tag{76}$$

dove con $\partial\hat{\alpha}/\partial\xi_i$ si intende la derivata della funzione $\hat{\alpha}$ rispetto all'argomento i-esimo.

Per la (25), dalla (76) risulta che la derivata di un campo scalare lungo una curva dipende solo dal vettore tangente alla curva. Si può dunque riguardare la (76) come la espressione di una funzione

$$\nabla\alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \tag{77}$$

che, in corrispondenza della posizione $\mathbf{x}$, trasforma un vettore $\mathbf{v}$ nella derivata del campo α lungo una qualsiasi curva per $\mathbf{x}$ che abbia $\mathbf{v}$ come vettore tangente in $\mathbf{x}$. Tale funzione si dice *gradiente del campo scalare* α *in* $\mathbf{x}$.

Si noti che, ad esempio, per la retta $\mathbf{c}(h) = \mathbf{x} + h\mathbf{e}_1$ si ha dalla (76)

$$\begin{aligned}\nabla\alpha(\mathbf{e}_1) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\alpha(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_1)-\alpha(\mathbf{x})\big)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\hat\alpha(\xi_1+h,\xi_2,\xi_3)-\hat\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\big) = \frac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_1},\end{aligned} \tag{78}$$

essendo la derivata calcolata in corrispondenza di $\mathbf{x}$. Per una retta $\mathbf{c}(h) = \mathbf{x} + h\mathbf{v}$, con $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla\alpha(\mathbf{v}) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\alpha(\mathbf{x}+h\mathbf{v})-\alpha(\mathbf{x})\big) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\hat\alpha(\xi_1+hv_1,\xi_2+hv_2,\xi_3+hv_3)-\hat\alpha(\xi_1,\xi_3,\xi_3)\big)\\ &= \frac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_1}v_1+\frac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_2}v_2+\frac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_3}v_3.\end{aligned} \tag{79}$$

Dunque $\nabla\alpha$ è una applicazione lineare. La sua matrice, con una sola riga, risulta

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_2} & \dfrac{\partial\hat\alpha}{\partial\xi_3}\end{pmatrix}. \tag{80}$$

Un *campo vettoriale* su uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ è una funzione

$$\mathbf{u} : \mathcal{E} \to \mathcal{V} \tag{81}$$

che assegna ad ogni posizione un vettore. Fissato un sistema di coordinate, il campo vettoriale (81) può essere descritto, in uno spazio euclideo di dimensione 3, dalle funzioni scalari

$$u_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{82}$$

tali che

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mathbf{e}_1 + u_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mathbf{e}_2 + u_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\mathbf{e}_3, \tag{83}$$

essendo (ξ_1,ξ_2,ξ_3) le coordinate della posizione $\mathbf{x}$. Si dice *derivata del campo vettoriale* $\mathbf{u}$ *lungo la curva* $\mathbf{c}$ in $\mathbf{c}(0)$ il vettore

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\mathbf{u}(\mathbf{c}(h)) - \mathbf{u}(\mathbf{c}(0))\Big). \tag{84}$$

Descrivendo la curva attraverso la (23) e il campo vettoriale attraverso le (82) l'espressione della derivata diventa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\mathbf{u}(\mathbf{c}(h))-\mathbf{u}(\mathbf{c}(0))\Big)\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{3}\Big(u_i(c_1(h),c_2(h),c_3(h))-u_i(c_1(0),c_2(0),c_3(0))\Big)\mathbf{e}_i\\
&\quad=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}(c_1(0),c_2(0),c_3(0))\frac{dc_j}{dh}(0)\mathbf{e}_i. \qquad (85)
\end{aligned}
$$

La derivata di un campo vettoriale lungo una curva dipende dunque solo dal vettore tangente alla curva. Come per la derivata di un campo scalare la (85) induce, in corrispondenza di una posizione $\mathbf{x}$, un endomorfismo, detto *gradiente del campo vettoriale* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{x}$,

$$\nabla\mathbf{u} : \mathcal{V}\to\mathcal{V} \qquad (86)$$

tale che

$$\nabla\mathbf{u}(\mathbf{e}_j)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(\mathbf{u}(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_j)-\mathbf{u}(\mathbf{x})\big)=\frac{\partial u_1}{\partial \xi_j}\mathbf{e}_1+\frac{\partial u_2}{\partial \xi_j}\mathbf{e}_2+\frac{\partial u_3}{\partial \xi_j}\mathbf{e}_3. \qquad (87)$$

La sua matrice risulta

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\\
\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\\
\dfrac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial \xi_3}
\end{pmatrix}. \qquad (88)$$

10 Trasformazioni di uno spazio euclideo

Sia $\mathcal{E}$ uno spazio euclideo e $\mathcal{V}$ lo spazio delle traslazioni. Una funzione biunivoca

$$\phi : \mathcal{E}\to\mathcal{E} \qquad (89)$$

si dice *trasformazione di* $\mathcal{E}$. Essa fa corrispondere a *tutte* le posizioni nuove posizioni. Una trasformazione di $\mathcal{E}$ si dice *affine* se

$$\phi(\mathbf{x}+\mathbf{v})=\phi(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{x}\in\mathcal{E},\quad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{V}, \qquad (90)$$

essendo $\mathbf{F}$ una applicazione lineare di $\mathcal{V}$ non singolare. Una trasformazione di $\mathcal{E}$ che mantiene invariate le distanze tra qualsiasi coppia di posizioni si dice *isometria*. Si dimostra che per una isometria si ha

$$\phi(\mathbf{x}+\mathbf{v})=\phi(\mathbf{x})+\mathbf{Q}(\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{x}\in\mathcal{E},\quad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{V}, \qquad (91)$$

essendo $\mathbf{Q}$ una applicazione ortogonale di $\mathcal{V}$. La applicazione lineare $\mathbf{Q}$ trasforma i vettori in modo da conservare le norme e gli angoli. Se la isometria conserva anche l'orientamento allora risulta

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{92}$$

dove $\mathbf{R}$ è una rotazione di $\mathcal{V}$. Una isometria che conserva l'orientamento si dice *congruenza*.

Una trasformazione di $\mathcal{E}$ tale che

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{93}$$

si dice *traslazione*. Si noti che si tratta di una particolare congruenza.

Si osservi che dalle espressioni (90), (91), (92), scegliendo una posizione $\mathbf{x}_0$ e ponendo $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, si ottengono rispettivamente $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}$

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{94}$$
$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \tag{95}$$
$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{96}$$

In particolare dalla (93) si ha

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \tag{97}$$

da cui si ottiene che in una traslazione

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}. \tag{98}$$

Si dice *rotazione* una congruenza che lascia fissa almeno una posizione.

Si dimostra che in uno spazio euclideo di dimensione 2 una congruenza è una traslazione o una rotazione, il cui punto fisso è detto *centro della rotazione*.

In generale in uno spazio euclideo di dimensione 3 una congruenza è la composizione di una rotazione attorno ad una retta, detta *asse della rotazione*, e di una traslazione a questa parallela.