

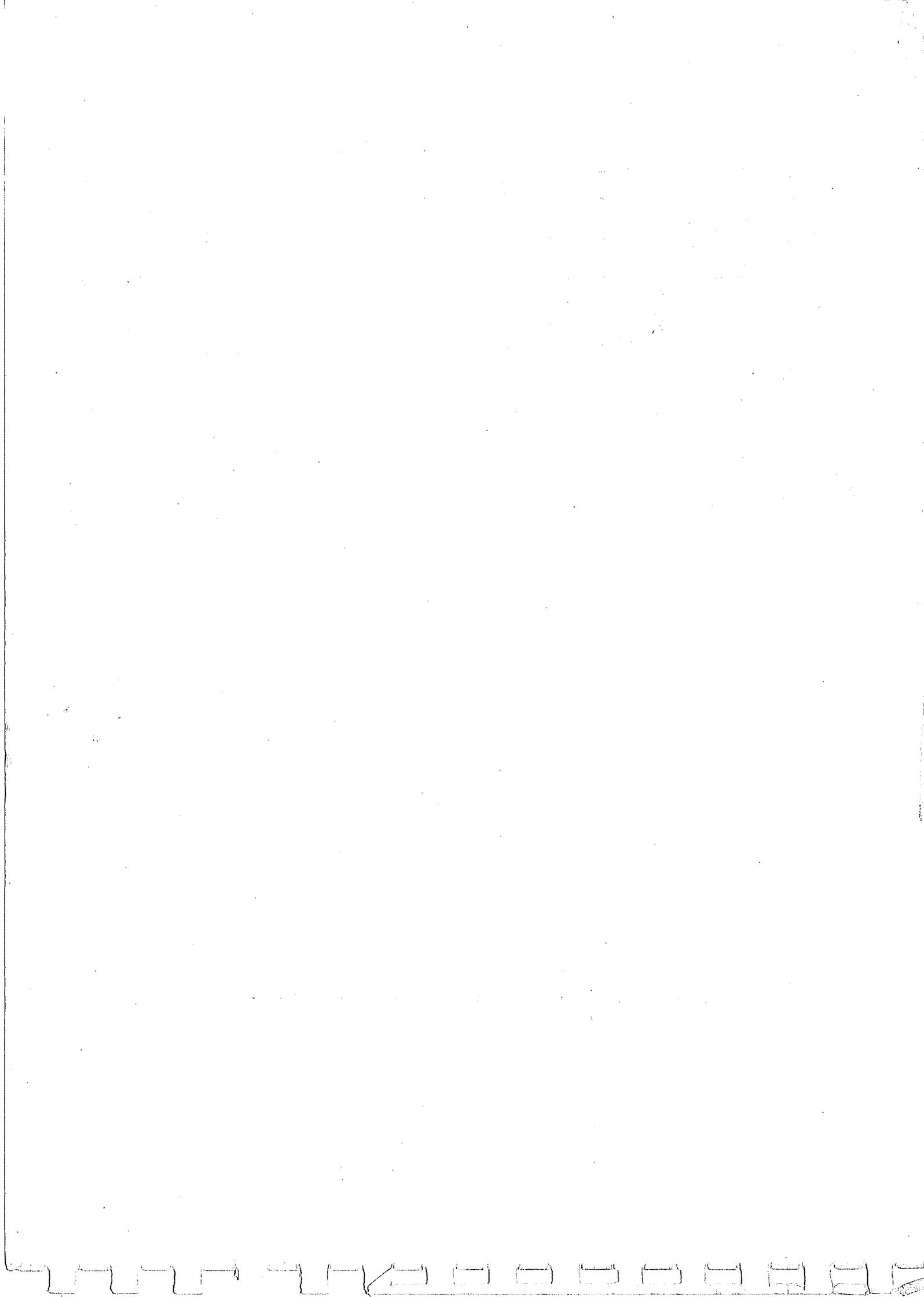
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI L'AQUILA

ELEMENTI
DI
TEORIA DELLE STRUTTURE

Appunti del corso di Scienza delle Costruzioni
per ingegneri Chimici, Elettronici, Elettrotecnici

Angelo Luongo

L'Aquila, 1989



P R E F A Z I O N E

Questo volume raccoglie le dispense di parte del corso di Scienza delle Costruzioni per allievi ingegneri chimici, elettrotecnici ed elettronici, da me tenuto presso l'Università degli Studi dell'Aquila nell'anno accademico 1988/89.

Il testo è stato scritto con l'intenzione di fornire agli studenti un supporto didattico in tempo utile per gli esami della sessione estiva, perciò steso di getto, sotto la pressione - non solo psicologica - degli allievi più impazienti, con poche o nulle possibilità di rilettura e ripensamenti.

Per questo motivo è lungi dall'essere un'opera compiuta: ne fa testo la veste editoriale dimessa, i caratteri di stampa e le formule scritte a mano. Tuttavia, ritenendo che l'impostazione che ho dato alla materia non sia priva di alcuni spunti di originalità, ho creduto egualmente di diffondere il volume tra i colleghi al fine di sollecitare possibilmente delle critiche ed una discussione. Riterrei infatti opportuno ripensare al ruolo a cui è chiamata oggi la Scienza delle Costruzioni nell'ambito di alcuni corsi di laurea, soprattutto in quello in ingegneria elettronica (e, in un futuro prossimo, informatica) che sono stati sedi nel passato in molte Università Italiane di forti spinte repulsive verso questa ed altre discipline.

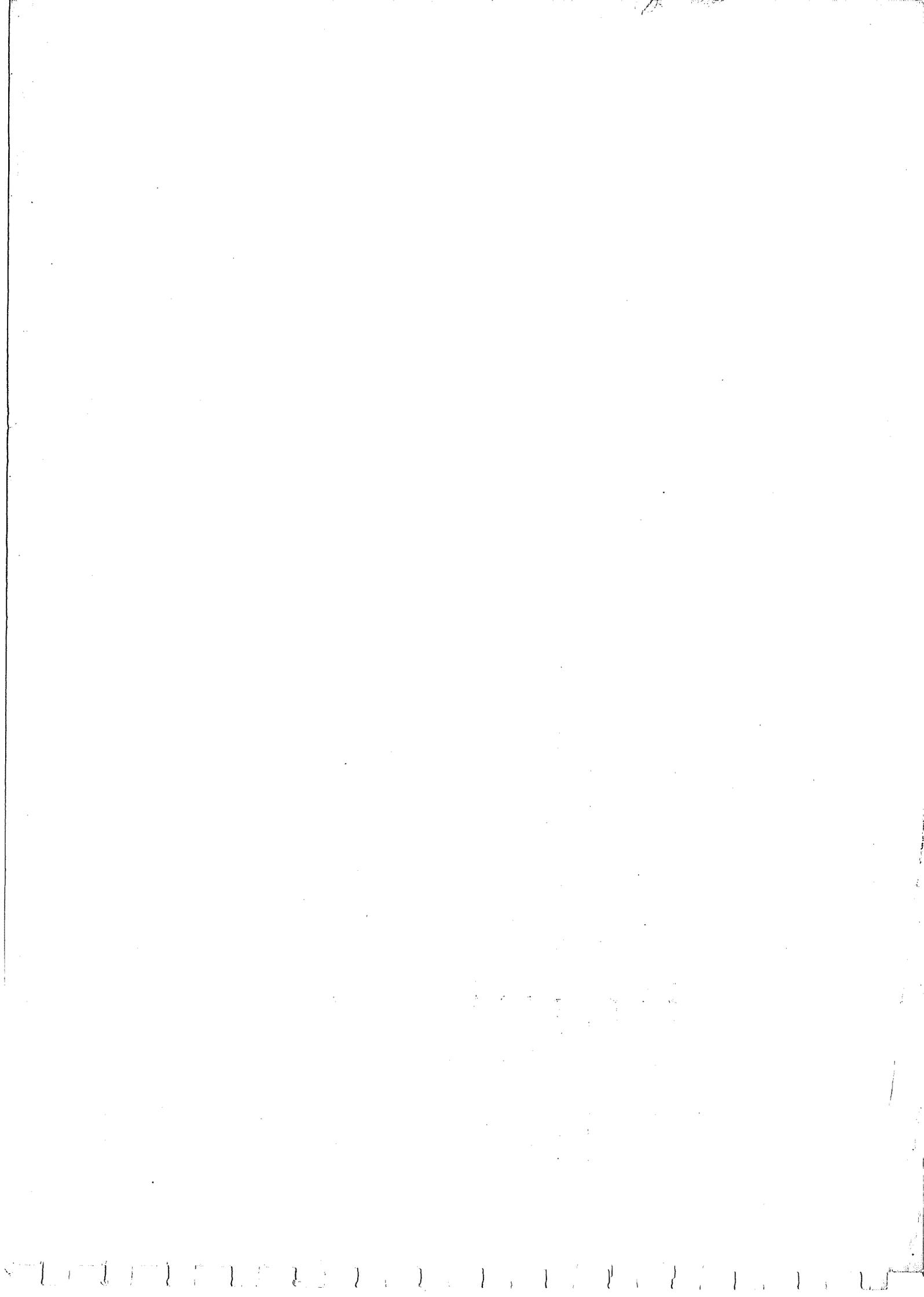
L'impostazione tradizionale da me data al corso va vista come uno sforzo teso a meglio recepire le esigenze culturali dei corsi di laurea ai quali è rivolto, ed è

finalizzata a valorizzare gli aspetti più formativi della disciplina piuttosto che quelli strettamente operativi. Il corso è così incentrato sullo sviluppo del processo logico di modellazione matematica del sistema - il corpo deformabile - piuttosto che sull'illustrazione di variegate tecniche di soluzione di modelli preconfezionati.

La definizione dei diversi modelli di continuo (l'asta, la trave, la lastra, la piastra, il filo, la membrana) avviene secondo schemi unitari (il metodo delle forze, il metodo degli spostamenti) e attraverso l'uso di strumenti sistematici (le formulazioni diretta, integrale e variazionale) che meglio si prestano ad un proficuo processo di sintesi.

La notazione operatoriale adottata serve allo scopo, permettendo di definire in maniera concisa entità astratte (quali gli operatori cinematico, d'equilibrio, elastico, di rigidezza, di flessibilità, di inerzia) che ritengo vengano meglio recepite dall'allievo, per la sua particolare attitudine, sviluppata in corsi paralleli, a interpretare un sistema come una "scatola nera" che trasforma dei dati d'ingresso in uscita.

La scelta di fondo di privilegiare la modellistica a scapito di temi più tradizionali, lascia spazio ad argomenti che solitamente, in ambiente civile o meccanico, si sviluppano a valle della Scienza delle Costruzioni. Tra questi i metodi di discretizzazione ed alcuni elementi di dinamica dei sistemi continui (questi ultimi espressamente richiesti dai colleghi elettronici); trova inoltre collocazione una trattazione abbastanza diffusa dei problemi



del secondo ordine, la quale, nel concetto di rigidità geometrica, accomuna i continui labili e la biforcazione dell'equilibrio .

Il testo presuppone la conoscenza della meccanica dei sistemi di corpi rigidi e della meccanica del continuo deformabile, il cui studio è sviluppato nella prima parte del corso.

In conclusione la scelta e presentazione degli argomenti è stata effettuata nella convinzione che l'aspetto più formativo della disciplina consista nella funzione di sviluppo della capacità del discente ad interpretare in maniera razionale un fenomeno fisico sulla base di una corretta formulazione di un modello matematico, e che questa capacità costituisca un patrimonio irrinunciabile nel bagaglio culturale dell'Ingegnere, in qualunque campo sia chiamato ad operare.

L'Aquila, luglio 1989

Angelo Luongo

I N D I C E

Capitolo 1: IL PROBLEMA ELASTICO

1.1	Equazioni fondamentali	1
1.2	Teorema dei lavori virtuali	3
1.3	Energia potenziale elastica	4
1.4	Teoremi di minimo	5
1.5	Sistemi cinematicamente impossibili e staticamente indeterminati	6
1.6	Metodo degli spostamenti	7
1.6.1	Formulazione diretta	8
1.6.2	Formulazione integrale	8
1.6.3	Formulazione variazionale	10
1.7	Metodo delle forze	10
1.7.1	Formulazione diretta	11
1.7.2	Formulazione integrale	12
1.7.3	Formulazione variazionale	13
1.8	Deformazioni imposte. Stati di coazione	14
1.9	Sistemi iperstatici, isostatici, localmente isostatici	16

Capitolo 2: ESEMPIO ILLUSTRATIVO: UN SISTEMA DISCRETO

2.1	Modello. Equazioni fondamentali	19
2.2	Metodo degli spostamenti	25
2.2.1	Formulazione diretta	25
2.2.2	Formulazione integrale e variazionale	26
2.3	Metodo delle forze	29
2.3.1	Formulazione diretta	29
2.3.2	Formulazione integrale e variazionale	33

Capitolo 3: CONTINUO MONODIMENSIONALE: ASTA RETTILINEA

3.1	Equazioni fondamentali	35
3.2	Metodo degli spostamenti	38
3.2.1	Formulazione diretta	38
3.2.2	Formulazione integrale e variazionale	42
3.3	Metodo delle forze	45
3.3.1	Formulazione diretta	45
3.3.2	Formulazione integrale e variazionale	49

Capitolo 4: CONTINUO BIDIMENSIONALE: LASTRA PIANA

4.1	Equazioni fondamentali	51
4.2	Metodo degli spostamenti	56
4.2.1	Formulazione diretta	56
4.2.2	Formulazione integrale e variazionale	58

4.2.3	Metodi di soluzione. Principio di De Saint Venant	60
4.3	Metodo delle forze	69
4.3.1	Formulazione diretta	69
4.3.2	Formulazione integrale e variazionale	73
4.3.3	Metodi di soluzione	74

Capitolo 5: CONTINUO POLARE MONODIMENSIONALE: TRAVE RETTILINEA

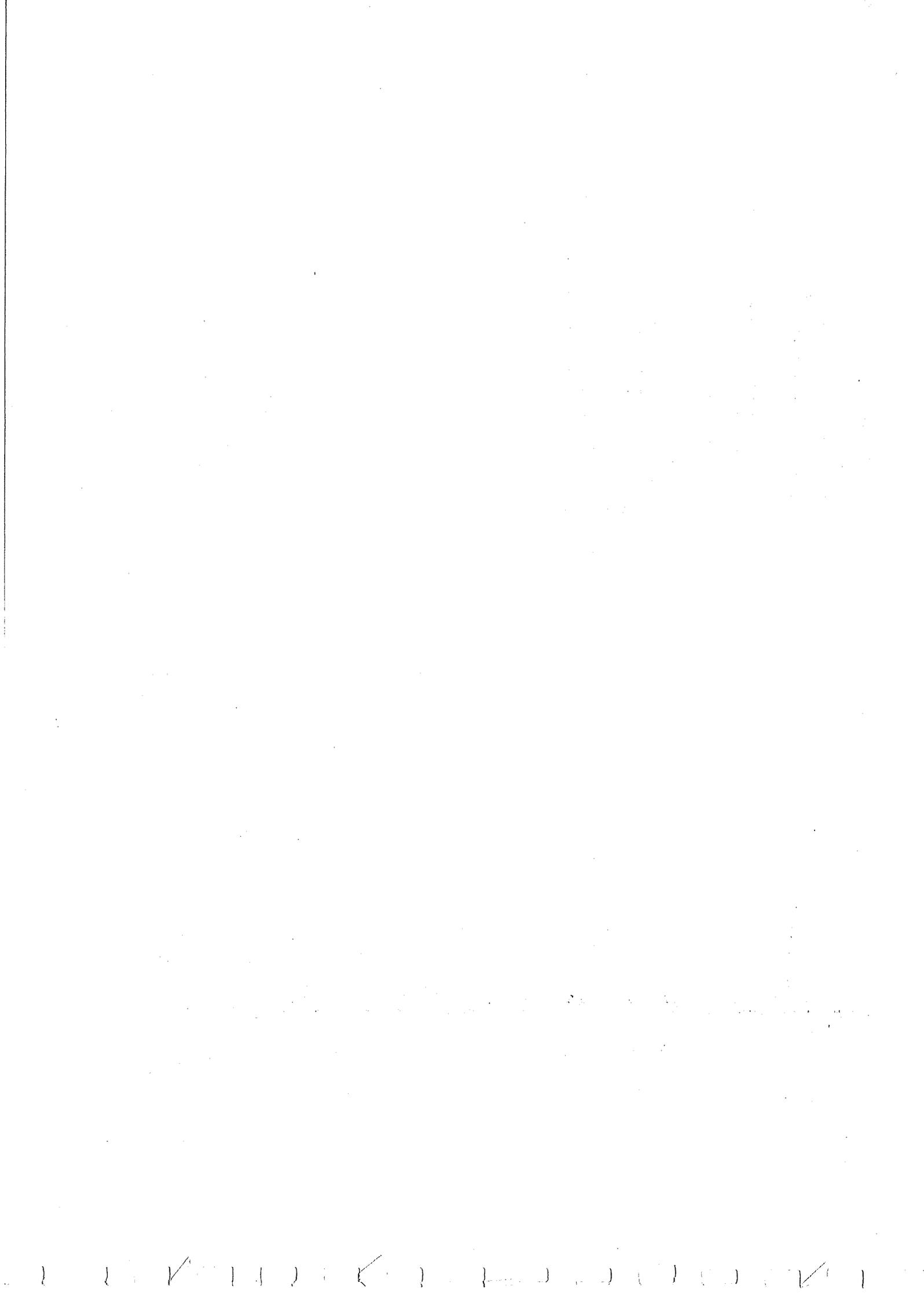
5.1	Equazioni fondamentali	83
5.1.1	Cinematica	84
5.1.2	Equilibrio	87
5.1.3	Legame costitutivo	89
5.1.4	Condizioni al contorno	90
5.2	Metodo degli spostamenti	92
5.2.1	Formulazione diretta	92
5.2.2	Formulazione integrale e variazionale	97
5.3	Metodo delle forze	98
5.3.1	Formulazione diretta	98
5.3.2	Formulazione integrale e variazionale	105
5.4	Trave indeformabile a taglio	106
5.5	La funzione di tensione nei sistemi di travi con vincoli elastici continui	115
5.6	Cenni sul problema tridimensionale della trave rettilinea	119

Capitolo 6: CONTINUO POLARE BIDIMENSIONALE: PIASTRA

6.1	Modello bidimensionale	123
6.2	Cinematica	124
6.3	Equilibrio	130
6.4	Legame costitutivo	134
6.5	Modelli semplificati	135
6.5.1	Torsione simmetrica	135
6.5.2	Piastrella indeformabile a taglio	138
6.6	Metodo degli spostamenti	143
6.6.1	Formulazione diretta	144
6.6.2	Formulazioni integrale e variazionale	145
6.6.3	Esempio applicativo: piastra rettangolare appoggiata	147

Capitolo 7: FORMULAZIONE DISCRETA DEL PROBLEMA ELASTICO IN TERMINI DI SPOSTAMENTO PER I CONTINUI MONODIMENSIONALI

7.1	Introduzione	151
7.2	Continuo monodimensionale: asta	152
7.2.1	Matrice di rigidità dell'elemento	153
7.2.2	Condizioni globali di equilibrio. Assemblaggio	159



7.2.3	Condizioni di vincolo	163	10.6.1	Equazioni del moto	279
7.2.4	Calcolo di spostamenti, deformazioni e tensioni	165	10.6.2	Moto libero	281
7.2.5	Esempio illustrativo	166	10.6.3	Moto forzato: lancio del missile	287
7.3	Continuo polare monodimensionale: trave	168	10.7	Dinamica del filo	289
7.3.1	Matrice di rigidezza	169	10.8	Oscillazioni torsionali della trave	291
7.3.2	Assemblaggio	172	10.9	Oscillazioni trasversali della trave	293
7.3.3	Condizioni di vincolo	175	10.9.1	Equazioni del moto	294
7.3.4	Calcolo di spostamenti, deformazioni e tensioni	178	10.9.2	Moto libero	295
7.3.5	Esempio: sistema di due travi	178	10.9.3	Moto forzato: forza viaggiante	299
7.3.6	Sistemi reticolari	183	10.9.4	Spostamenti impressi	301
			10.10	Cenni di dinamica dei continui bidimensionali: membrana e piastra	305

Capitolo 8: METODI DI DISCRETIZZAZIONE

8.1	Introduzione	185	1.	Definizioni. Condizioni al contorno	311
8.2	Metodo di Ritz	186	2.	Operatore aggiunto. Condizioni al contorno aggiunte	312
8.3	Applicazioni del metodo di Ritz	190	3.	Problema omogeneo aggiunto	315
8.4	Metodo degli elementi finiti e metodo di Ritz	198	4.	Problemi autoaggiunti e principi variazionali	319
8.5	Derivazione generale delle equazioni di equilibrio secondo il metodo degli elementi finiti	201	5.	Operatori dipendenti da un parametro: problema agli autovalori	321
8.6	Funzioni di interpolazione, matrice di rigidezza e vettore dei carichi locali	204	5.1	Problema agli autovalori	321
8.7	Convergenza del metodo degli elementi finiti	213	5.2	Sviluppo in serie delle autofunzioni	324

Capitolo 9: TEORIA LINEARIZZATA: CONTINUI LABILI E BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO

9.1	Introduzione	217
9.2	Esempio introduttivo: il pendolo	218
9.2.1	Rigidezza geometrica. Sistema labile	218
9.2.2	Biforcazione dell'equilibrio	222
9.2.3	Formulazione variazionale	226
9.3	Sistemi continui pressollecitati	229
9.4	Continui labili. Il filo e la membrana	234
9.4.1	Il filo teso	235
9.4.2	La membrana uniformemente tesa	240
9.5	Biforcazione dell'equilibrio	243
9.5.1	Trave compressa	249
9.5.2	Piastra compressa	255

Capitolo 10: ELEMENTI DI DINAMICA DEI CONTINUI ELASTICI

10.1	Introduzione	259
10.2	Equazioni del moto	260
10.3	Moto libero	264
10.4	Moto forzato. Analisi modale	268
10.5	Spostamenti impressi	276
10.6	Oscillazioni longitudinali della trave: dinamica dell'asta	279

Appendice: OPERATORI DIFFERENZIALI LINEARI

1.	Definizioni. Condizioni al contorno	311
2.	Operatore aggiunto. Condizioni al contorno aggiunte	312
3.	Problema omogeneo aggiunto	315
4.	Problemi autoaggiunti e principi variazionali	319
5.	Operatori dipendenti da un parametro: problema agli autovalori	321
5.1	Problema agli autovalori	321
5.2	Sviluppo in serie delle autofunzioni	324



1. IL PROBLEMA ELASTICO

1.1 Equazioni fondamentali

Il problema elastico si pone in questi termini: considerato un corpo che occupa nella configurazione di riferimento un dominio \mathcal{B} , con frontiera $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_u + \partial\mathcal{B}_f$, vincolato su $\partial\mathcal{B}_u$, sottoposto all'azione di forze di volume $b(x)$ e di superficie $f(x)$ applicate su $\partial\mathcal{B}_f$, determinare:

- * il campo di spostamenti $u(x)$
- * il campo di deformazioni $\varepsilon(x)$
- * il campo di tensioni $\sigma(x)$.

Nel problema si riconoscono tre diversi aspetti, geometrico, dinamico (in particolare statico) e reologico, descritti dalle equazioni che seguono.

a) Compatibilit  cinematica

Lo studio della cinematica del sistema conduce a relazioni differenziali lineari tra le variabili di configurazione u e di deformazione ε , nonch  a condizioni algebriche al contorno:

$$\begin{aligned} D u &= \varepsilon & \text{in } \mathcal{B} \\ u &= \bar{u} & \text{su } \partial\mathcal{B}_u \end{aligned} \quad (1)$$

dove D   un operatore differenziale lineare, detto operatore cinematico, ed \bar{u}   il vettore dei cedimenti vincolari assegnati al contorno. Le (1) sono le equazioni implicite di congruenza del problema.

b) Equilibrio

L'imposizione delle condizioni di equilibrio, indefinite e al contorno, fornisce le relazioni:

$$D \sigma + b = 0 \quad \text{in } \mathcal{B} \\ N \sigma = f \quad \text{su } \partial\mathcal{B}_f \quad (2)$$

in cui D   l'operatore differenziale di equilibrio e N   un operatore algebrico. La relazione (2)   valida anche su $\partial\mathcal{B}_u$ e permette di determinare le relazioni vincolari una volta note le tensioni σ .

c) Legame costitutivo

Il comportamento meccanico del materiale   descritto dalla relazione tensioni-deformazioni, assunta di tipo lineare:

$$C \varepsilon = \sigma \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (3)$$

in cui C   un operatore algebrico detto operatore elastico.

Le relazioni (1)-(3) possono essere combinate in modo da ottenere equazioni nella sola variabile u (metodo degli spostamenti), nella variabile σ (metodo delle forze) oppure nelle variabili u , σ (metodo misto). Le equazioni possono essere ottenute in forma diretta, integrale o variazionale. Nel seguito si analizzano i primi due metodi secondo le tre diverse formulazioni.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

1.2 Teorema dei lavori virtuali

Dato un sistema di forze e tensioni equilibrate (eq.(2)) ed un campo di spostamenti e di deformazioni compatibili (eq.(1)), il lavoro virtuale esterno δL_e eguaglia il lavoro virtuale interno δL_i :

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma^T \varepsilon \, dV = \int_{\mathcal{D}} u^T b \, dV + \int_{\mathcal{S}} u^T f \, dS \quad (4)$$

Sostituendo le (1) e (2) nel TLV si ottiene:

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma^T D u \, dV = - \int_{\mathcal{D}} u^T \tilde{D} \sigma \, dV + \int_{\mathcal{S}} u^T N \sigma \, dS \quad (5)$$

(formula di integrazione per parti) da cui si ricava:

L'operatore di equilibrio $-\tilde{D}$ e' l'aggiunto dell'operatore di compatibilita' cinematica D (e viceversa):

$$\tilde{D} = -D^*$$

Le (2) si riscrivono:

$$D^* \sigma = b \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$N \sigma = f \quad \text{su } \mathcal{S}_f \quad (2')$$

Un'importante applicazione del TLV e' la formula generale dello spostamento che permette di calcolare una componente di spostamento η , note le deformazioni ε , senza dover risolvere l'intero problema cinematico.

Assumendo come sistema di forze virtuali una forza d'intensita' unitaria che fa lavoro nello spostamento incognito η e come campo di tensioni virtuali lo stato σ^i equilibrato con la forza unitaria, il TLV fornisce:

$$\eta = \int_{\mathcal{D}} \sigma^{i^T} \varepsilon \, dV - \int_{\mathcal{S}} \bar{u}^T N \sigma^i \, dS \quad (6)$$

dove l'integrale su \mathcal{S} esprime il lavoro delle reazioni vincolari virtuali $f^i = N \sigma^i$ nei cedimenti vincolari \bar{u} del sistema effettivo.

1.3 Energia potenziale elastica

Si ammette l'esistenza di un funzionale energia potenziale elastica

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \varepsilon^T C \varepsilon \, dV \quad (7)$$

tale che la sua variazione δU eguagli il lavoro interno di deformazione δL_i :

$$\delta U = \int_{\mathcal{D}} \delta \varepsilon^T C \varepsilon \, dV = \int_{\mathcal{D}} \delta \varepsilon^T \sigma \, dV = \delta L_i \quad (8)$$

L'esistenza del funzionale U implica che l'operatore elastico C e' autoaggiunto (teorema di reciprocita', o di Betti):

$$\int_{\mathcal{D}} \varepsilon_1^T C \varepsilon_2 \, dV = \int_{\mathcal{D}} \varepsilon_2^T C \varepsilon_1 \, dV \quad (9)$$

Si ammette che $V(\xi)$ sia definita positiva affinché il materiale sia stabile:

$$\begin{aligned} V(\xi) &> 0 & \xi &\neq 0 \\ V(\xi) &= 0 & \xi &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Il legame costitutivo è pertanto invertibile:

$$\xi = C^{-1} \sigma \quad (11)$$

1.4 Teoremi di minimo

a) Minimo dell'energia potenziale totale:

CNES per l'equilibrio è che il funzionale $V(u)$ assuma un valore minimo nella classe delle configurazioni compatibili (cioè nello spazio \mathcal{G} delle funzioni $u(x)$ sufficientemente regolari che soddisfano le condizioni al contorno su $\partial\mathcal{B}_u$)

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \varepsilon^T C \varepsilon \, dV - \int_{\mathcal{B}} u^T b \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_f} u^T f \, dS = \min \quad (12)$$

b) Minimo dell'energia complementare totale:

CNES per la congruenza è che il funzionale $V_c(\sigma)$ assuma un valore minimo nella classe delle configurazioni equilibrate (cioè nello spazio \mathcal{E} delle funzioni $\sigma(x)$ che soddisfano le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni al contorno su $\partial\mathcal{B}_f$)

$$V_c(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \sigma^T C^{-1} \sigma \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_u} \bar{u}^T N \sigma \, dS = \min \quad (13)$$

1.5 Sistemi cinematicamente impossibili e staticamente indeterminati.

Il problema cinematico (1) (assegnato $\xi(x)$ determinare $u(x)$) in generale non ammette soluzione, a meno che il campo di deformazione $\xi(x)$ non soddisfi le equazioni esplicitate di congruenza

$$\tilde{\mathcal{D}} \xi = 0 \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (14)$$

dove $\tilde{\mathcal{D}}$ è un operatore differenziale lineare, e le condizioni al contorno sono opportune.

Il problema statico (2') (assegnati $b(x)$, $f(x)$ determinare $\sigma(x)$) in generale è indeterminato; la soluzione può esprimersi come

$$\sigma = \sigma_0 + \mathcal{N} \chi \quad (15)$$

dove:

* $\sigma_0(x)$ è una soluzione particolare delle (2');

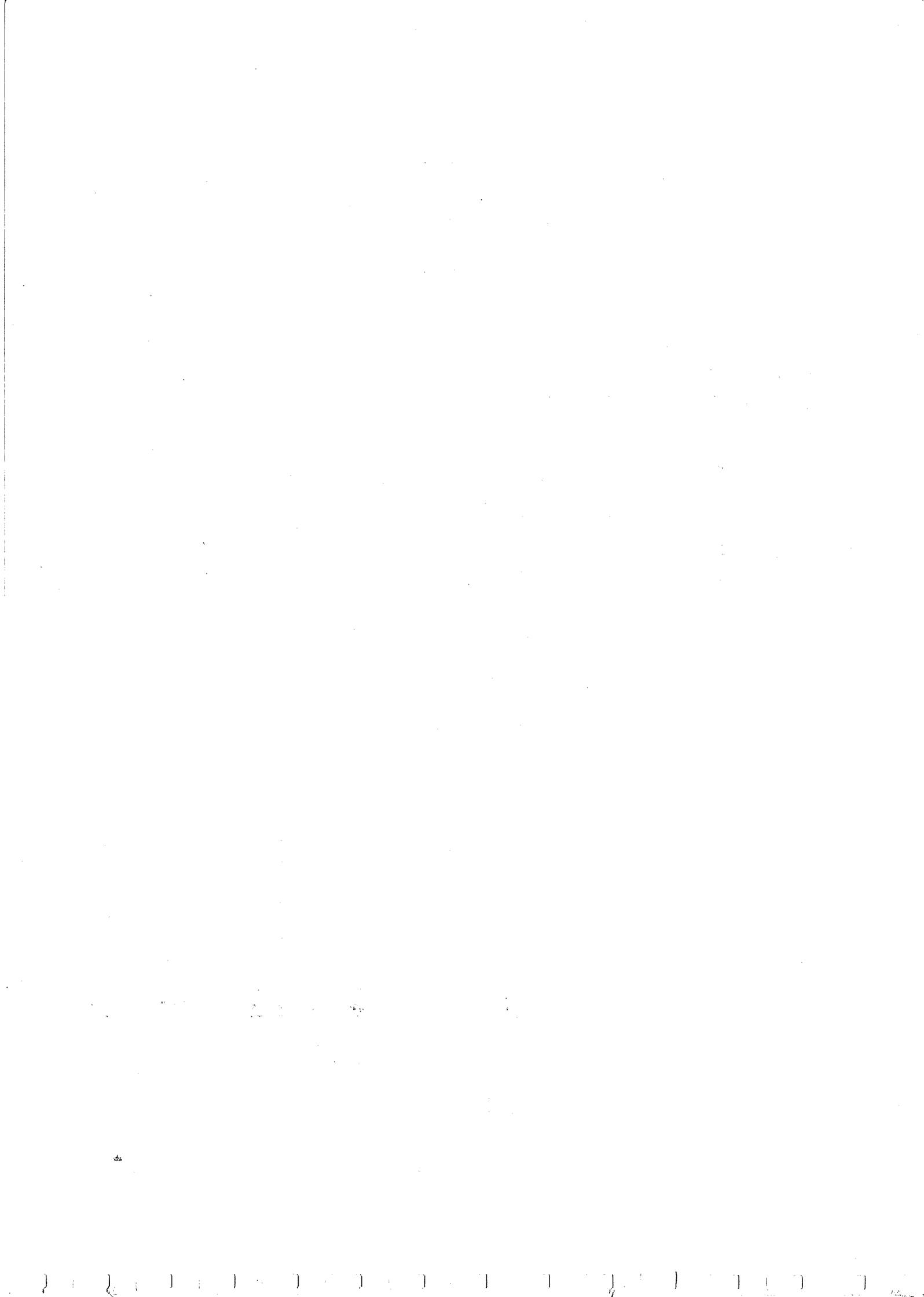
* \mathcal{N} è un operatore lineare;

* $\mathcal{N} \chi = \mathcal{N} \chi$ è la soluzione generale del problema omogeneo (tensioni autoequilibrate, o autotensioni):

$$\begin{aligned} D^* \sigma_x &= 0 & \text{in } \mathcal{B} \\ N \sigma_x &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{B}_f \end{aligned} \quad (16)$$

in cui $\chi(x)$ è un vettore di funzioni arbitrarie (funzioni di tensione o incognite iperstatiche).

Le condizioni di compatibilità (14) possono essere determinate applicando il TLV scegliendo: a) come sistema



equilibrato le autotensioni G_X e le forze attive nulle, b) come campo di spostamento e deformazioni quello effettivo (in questa forma il teorema e' detto dei lavori virtuali complementare)

$$\int_{\mathcal{B}} \varepsilon^T S^* X dV = \int_{\mathcal{B}} \bar{u}^T N S^* X dS^*, \quad \forall X \quad (17)$$

$$\int_{\mathcal{B}} X^T S^* \varepsilon dV + \text{termini contorno} = 0, \quad \forall X$$

Si ottengono le equazioni esplicite di compatibilita':

$$S^* \varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (14')$$

condiz. cont. su $\partial \mathcal{B}_u$

Risulta perciò:

$$\bar{S} = S^* \quad (18)$$

1.6 Metodo degli spostamenti

Si soddisfano a priori le equazioni di compatibilita' cinematica (1) e il legame costitutivo (3); si esprimono le equazioni di equilibrio (2') in termini di spostamento (fig.1).

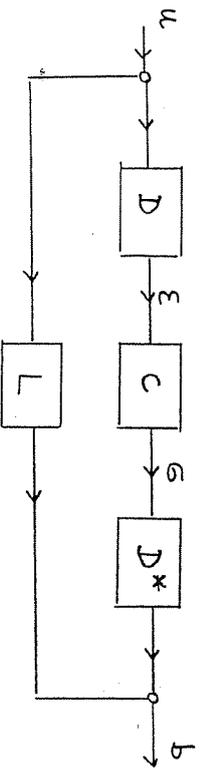


Fig. 1

1.6.1 Formulazione diretta

Dallo schema di fig.1 si ottengono le equazioni di equilibrio

$$L u = b \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (19)$$

$$B u = f \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_f$$

dove gli operatori L e B sono cosi' definiti:

$$\begin{aligned} L &= D^* C D \\ B &= N C D \end{aligned} \quad (20)$$

L e' detto operatore di rigidezza; poiche' risulta $L = L^*$,

L e' un operatore autoaggiunto.

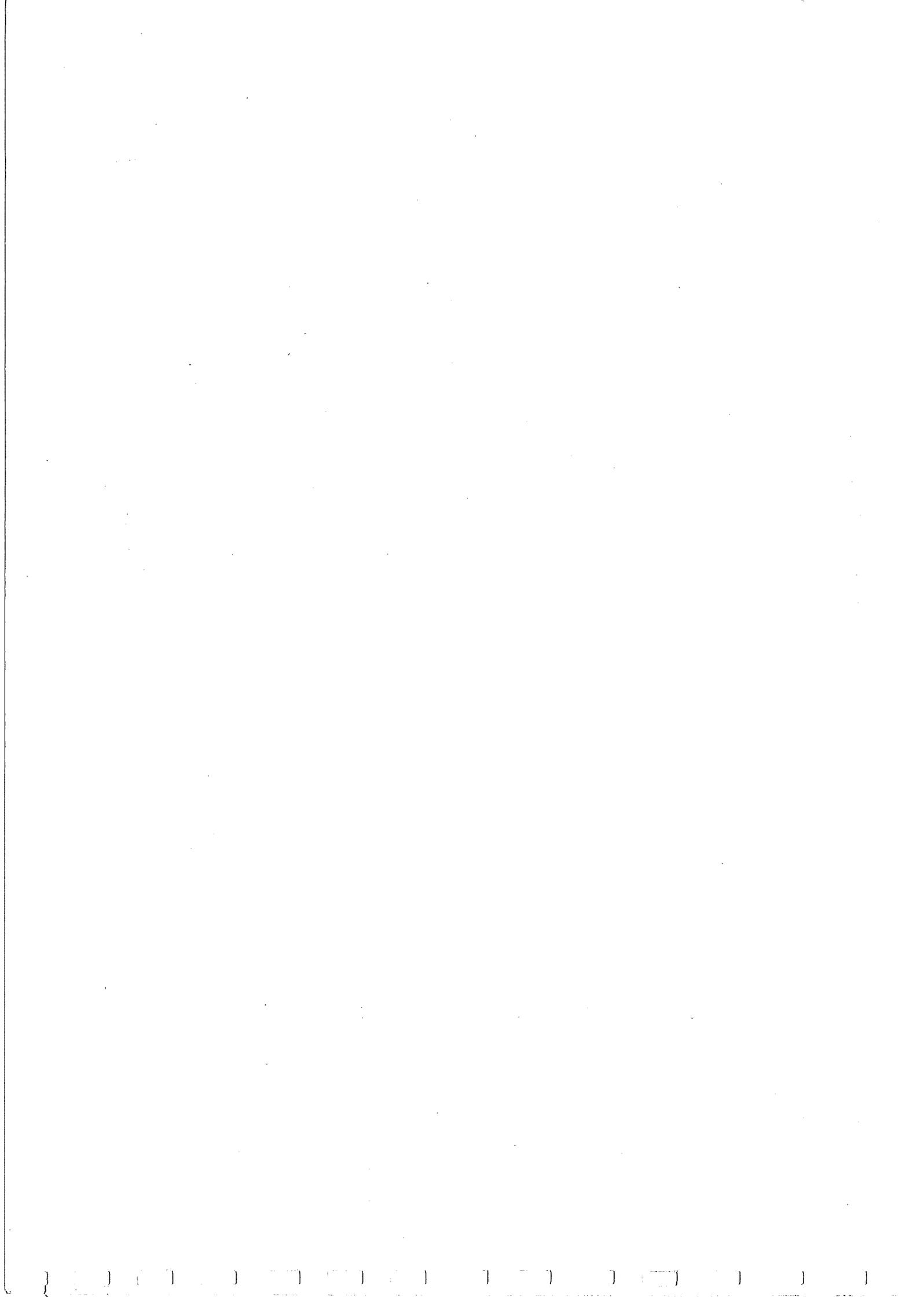
Le equazioni (19) costituiscono un sistema differenziale nelle variabili di configurazione $u(x)$. La sua soluzione (unica per il teorema di Kirchhoff) individua la configurazione equilibrata tra le infinite configurazioni compatibili.

Integrato il sistema differenziale e determinata u si calcolano successivamente:

- * il campo di deformazione: $\varepsilon = D u$
 - * il campo di tensione: $\sigma = C D u$
- attraverso operazioni algebriche e di derivazione.

1.6.2 Formulazione integrale

Le condizioni di equilibrio (19) possono essere determinate imponendo che l'equazione dei lavori virtuali



(in cui le G sono espresse in termini di u tramite le equazioni di legame e di compatibilita') sia soddisfatta per ogni campo di spostamenti e deformazioni congruenti. L'equazione si scrive:

$$\int_{\mathcal{B}} G^T \delta \epsilon dV = \int_{\mathcal{B}} \delta u^T b dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \delta u^T f dS \quad (21)$$

Imponendo che gli spostamenti e le deformazioni virtuali siano compatibili ($\delta u \in \mathcal{E}$) si ha:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon &= D \delta u \quad \text{in } \mathcal{B} \\ \delta u &= 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_u \end{aligned} \quad (22)$$

Le tensioni effettive si esprimono in termini di spostamento:

$$\sigma = C D u \quad (23)$$

Con le (22) e (23) il TLV (21) si scrive:

$$\int_{\mathcal{B}} (C D u)^T D \delta u dV - \int_{\mathcal{B}} \delta u^T b dV - \int_{\partial \mathcal{B}_f} \delta u^T f dS = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{E} \quad (24)$$

Integrando per parti il primo termine (eq.(5)) si ottiene:

$$\int_{\mathcal{B}} \delta u^T (D^* C D u - b) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \delta u^T (N C D u - f) dS = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{E} \quad (25)$$

da cui le (19).

1.6.3 Formulazione variazionale

Un metodo alternativo per ottenere le equazioni di equilibrio e' quello che fa uso del teorema di minimo dell'E.P.T.. Sostituendo nella (12) le condizioni di compatibilita' (1) si ottiene:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (D u)^T C (D u) dV - \int_{\mathcal{B}} u^T b dV - \int_{\partial \mathcal{B}_f} u^T f dS \quad (26)$$

Imponendo la stazionarieta' in \mathcal{E} si ha

$$\delta \Pi = \int_{\mathcal{B}} (D \delta u)^T C D u dV - \int_{\mathcal{B}} \delta u^T b dV - \int_{\partial \mathcal{B}_f} \delta u^T f dS = 0 \quad \text{cioe' la (24)}. \quad (27)$$

Le tre formulazioni, diretta, integrale e variazionale sono equivalenti. Le ultime due costituiscono il fondamento di alcuni metodi approssimati di soluzione (metodi di discretizzazione).

1.7 Metodo delle forze

Si soddisfano a priori le equazioni di equilibrio (2') e il legame costitutivo (3); si esprimono le equazioni esplicite di congruenza (14') in termini di tensioni

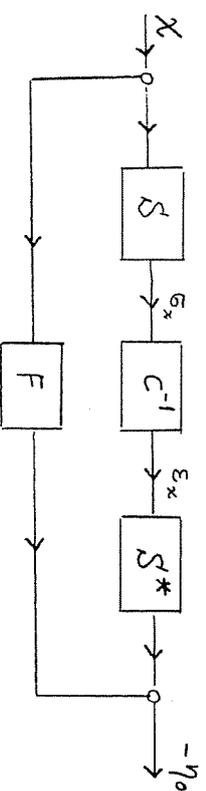
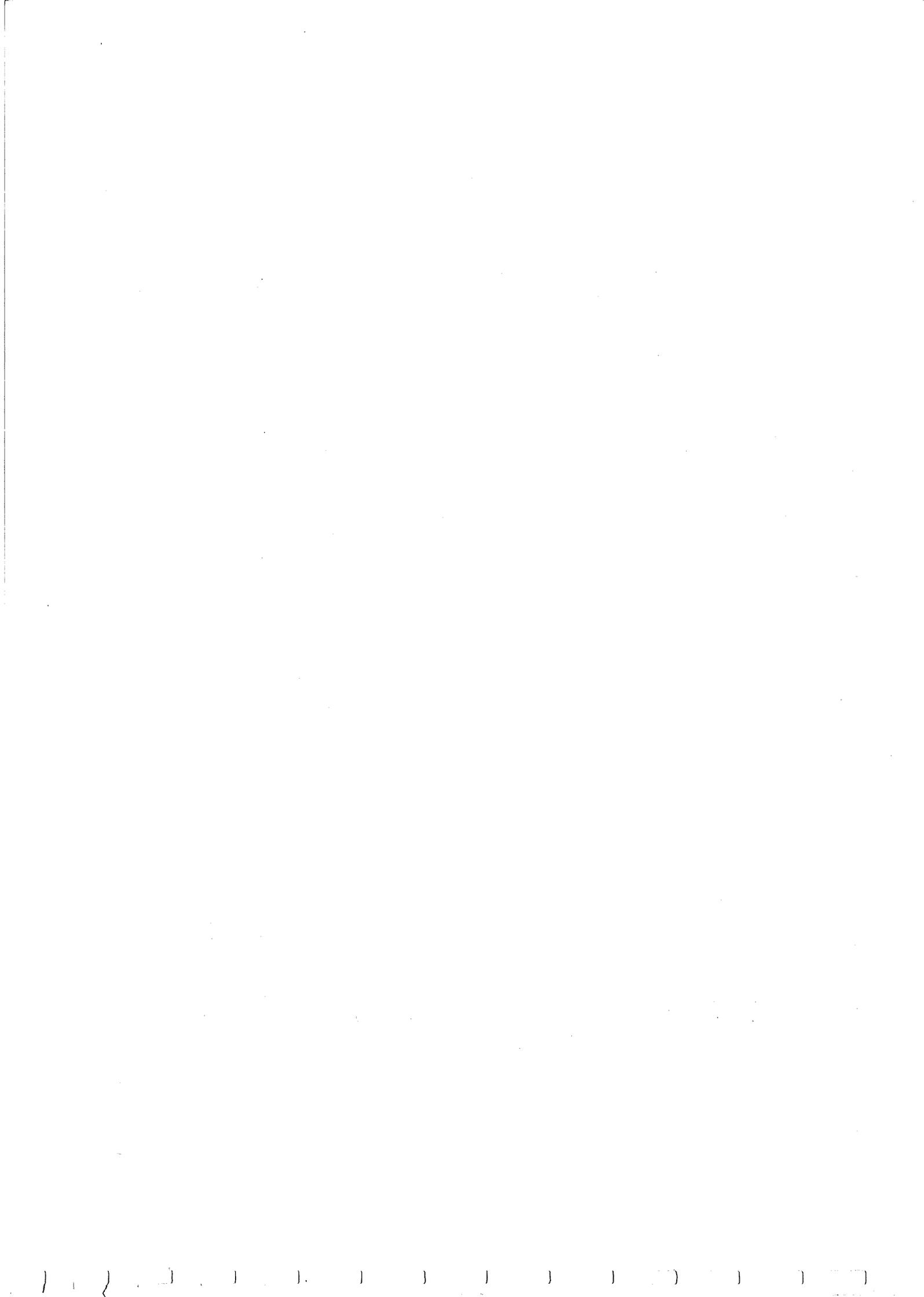


Fig. 2



1.7.1 Formulazione diretta

Se il sistema e' staticamente indeterminato la soluzione delle equazioni di equilibrio contiene delle incognite iperstatiche χ (eq. (15)):

$$G = G_0 + S' \chi \quad (15')$$

dove G_0 e' una soluzione particolare. Facendo uso del legame costitutivo si ha:

$$\varepsilon = C^{-1} G_0 + C^{-1} S' \chi \quad (28)$$

La (28) esprime la deformazione come somma di due contributi: il primo $\varepsilon_0 = C^{-1} G_0$ e' la deformazione corrispondente a valori nulli delle incognite iperstatiche, il secondo e' la piu' generale deformazione dovuta a forze attive nulle. A scelte arbitrarie delle funzioni di tensione $\chi(x)$ corrispondono infiniti stati equilibrati che in generale non sono congruenti (in quanto le equazioni (1) non sono integrabili per un arbitrario termine noto (28)). L'unico stato congruente, soluzione del problema elastico, e' caratterizzato dal fatto che le condizioni di integrabilita' - cioe' le equazioni esplicite di congruenza (14') - sono soddisfatte. Sostituendo le (28) nelle (14') si ottengono le equazioni risolventi:

$$\begin{aligned} F \chi + \eta_0 &= 0 & \text{in } \mathcal{B} \\ u &= \bar{u} & \text{su } \partial \mathcal{B}_u \end{aligned} \quad (29)$$

dove

$$\begin{aligned} F &= S^* C^{-1} S \\ \eta_0 &= S^* C^{-1} G_0 \end{aligned} \quad (30)$$

F e' detto operatore di flessibilita' e risulta autoaggiunto. Le condizioni al contorno su $\partial \mathcal{B}_u$ vanno espresse in termini di tensioni integrando le equazioni implicite di congruenza. Problemi con condizioni al contorno su $\partial \mathcal{B}_u$ vengono percio' piu' agevolmente trattati con il metodo degli spostamenti.

1.7.2 Formulazione integrale

Le condizioni di congruenza (28) possono essere determinate imponendo che l'equazione dei lavori virtuali (in cui le ε sono espresse in termini di χ tramite le equazioni di legame e di equilibrio) sia soddisfatta per ogni stato di tensione equilibrato.

L'equazione si scrive:

$$\int_{\mathcal{B}} \delta G^T \varepsilon dV = \int_{\mathcal{B}} \delta b^T u dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \delta f^T u dS \quad (31)$$

Imponendo che lo stato di tensione virtuale sia equilibrato si ha:

$$\begin{aligned} \delta G &= S' \delta \chi, & \delta b &= 0 & \text{in } \mathcal{B} \\ \delta f &= 0 & \text{su } \partial \mathcal{B}_f, & \delta f &= N S' \delta \chi & \text{su } \partial \mathcal{B}_u \end{aligned} \quad (32)$$



Le deformazioni effettive in termini delle funzioni di tensione sono:

$$\underline{\varepsilon} = C^{-1} \underline{\sigma}_0 + C^{-1} S X \quad (28')$$

Con le (31) e (28') il TLV si scrive (TLV complementare):

$$\int_{\mathcal{G}} (C^{-1} \underline{\sigma}_0 + C^{-1} S X)^T S \delta X \, dV = \int_{\partial \mathcal{P}_u} (N S \delta X)^T \bar{u} \, dS \quad V \delta X \in \mathcal{E} \quad (33)$$

Integrando per parti il primo termine si ha:

$$\int_{\mathcal{G}} \delta X^T S^* (C^{-1} \underline{\sigma}_0 + C^{-1} S X) \, dV = \text{termini al contorno} \quad V \delta X \in \mathcal{E} \quad (34)$$

da cui le (29).

1.7.3 Formulazione variazionale

L'energia complementare totale (13) si scrive

$$V_c = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} (\underline{\sigma}_0 + S X)^T C^{-1} (\underline{\sigma}_0 + S X) \, dV + \int_{\partial \mathcal{P}_u} \bar{u}^T N (\underline{\sigma}_0 + S X) \, dS \quad (35)$$

avendo espresso $\underline{\sigma}$ in termini di X tramite la (15).

Imponendo la stazionarietà in \mathcal{E} si riottiene la (33) e quindi le equazioni di congruenza (29).

1.8 Deformazioni imposte. Stati di coazione

Se nel sistema sono presenti deformazioni iniziali note $\bar{\underline{\varepsilon}}(x)$, ad esempio dovute a distorsioni diffuse o variazioni di temperatura, ovvero ad imperfezioni geometriche $\bar{u}(x)$ alle quali corrispondono deformazioni $\bar{\underline{\varepsilon}}(x) = D \bar{u}(x)$, il legame costitutivo (3) si modifica come segue

$$C(\underline{\varepsilon} - \bar{\underline{\varepsilon}}) = \underline{\sigma} \quad \text{in } \mathcal{G} \quad (36)$$

ferme restando le (1) e (2'). La (36) esprime la legge di proporzionalità tra tensioni $\underline{\sigma}$ e deformazioni elastiche $\underline{\varepsilon}_e = \underline{\varepsilon} - \bar{\underline{\varepsilon}}$, dove $\underline{\varepsilon}$ misura la deformazione totale.

Le relazioni precedentemente determinate si modificano come di seguito illustrato.

* Legame tensione-spostamenti (23):

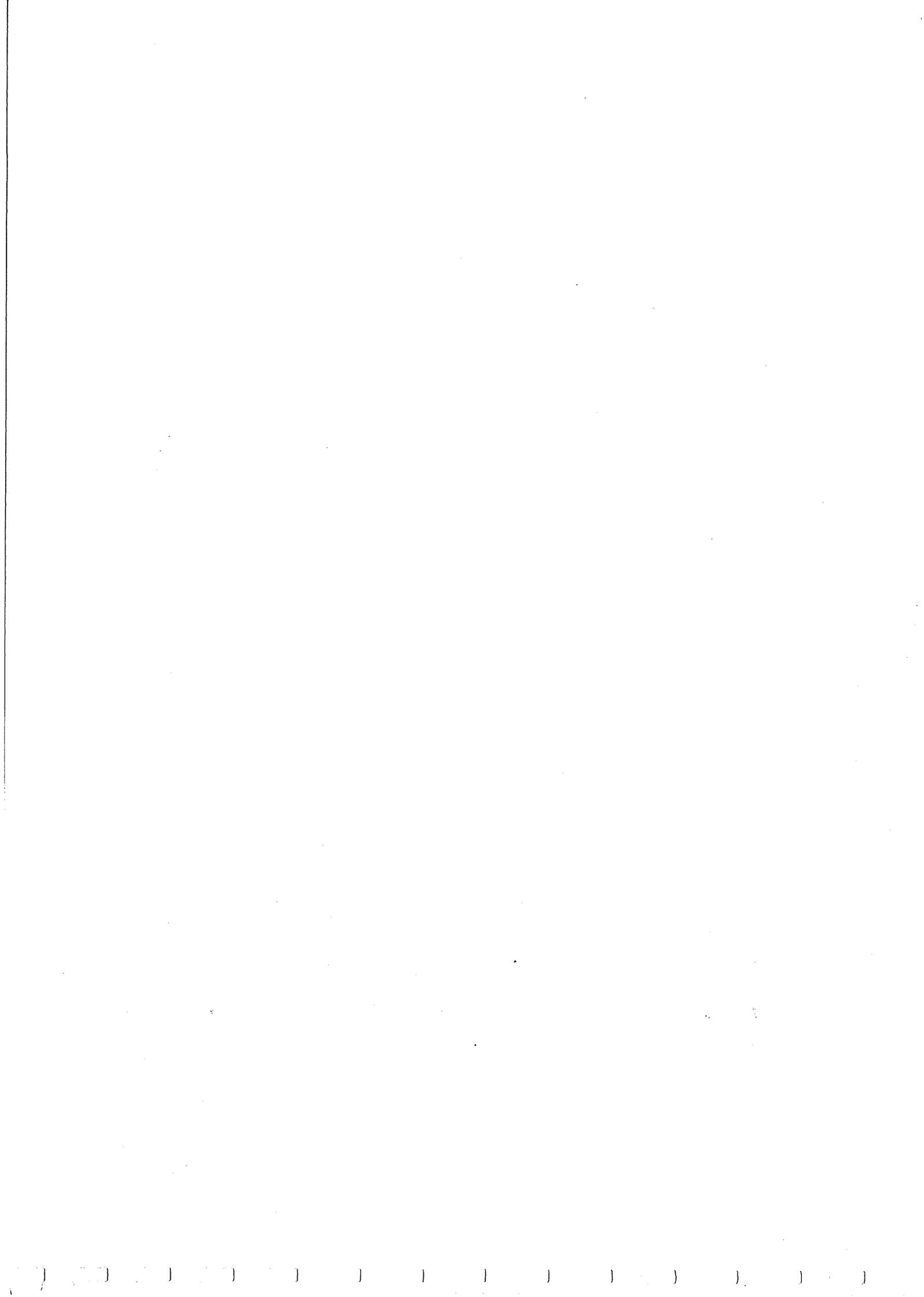
$$\underline{\sigma} = C D u - C \bar{\underline{\varepsilon}} \quad (37)$$

* Condizioni di equilibrio in termini di spostamenti (19)

$$\begin{aligned} L u &= b + \bar{b} \\ B u &= f + \bar{f} \end{aligned} \quad (38)$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{b} &= D^* C \bar{\underline{\varepsilon}} \\ \bar{f} &= N C \bar{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (39)$$



Nelle (38) \bar{b} e \bar{f} rappresentano pertanto forze di volume e superficie equivalenti alle deformazioni imposte $\bar{\epsilon}$.

* Deformazioni in termini di funzione di tensione (28):

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} + C^{-1} G_0 + C^{-1} S' \chi \quad (40)$$

* Equazioni esplicite di congruenza in termini di

funzione di tensione:

$$F \chi + \eta_0 + \bar{\eta} = 0 \quad (41)$$

dove

$$\bar{\eta} = S'^* \bar{\epsilon} \quad (42)$$

Nelle (41) $\bar{\eta}$ e' uno spostamento dovuto alle deformazioni imposte.

Anche nel caso in cui sul sistema agiscano forze attive nulle ($b=0$, $f=0$) le (38) forniscono un campo di spostamenti u al quale in generale corrisponde (eq.(37)) uno stato non nullo di tensioni autoequilibrate: il sistema e' detto essere in stato di coazione. Lo stato di coazione puo' sussistere solo in sistemi iperstatici, i soli per i quali le equazioni omogenee di equilibrio ammettono una soluzione non banale; nei sistemi isostatici le deformazioni imposte producono solo effetti cinematici.

Per gli stati di coazione sussiste un importante teorema, di notevole interesse applicativo: "Il lavoro virtuale interno compiuto da un campo di tensioni elastiche (dovute a forze attive b , f non nulle e cedimenti

vincolari $\bar{u}=0$) in un campo di deformazione dovuto ad uno stato di coazione risulta essere uguale a zero"

$$\mathcal{L}_i = \int_{\mathcal{B}} G_{eI}^T \epsilon_{eI} dV = 0 \quad (43)$$

La dimostrazione e' immediata. E' infatti:

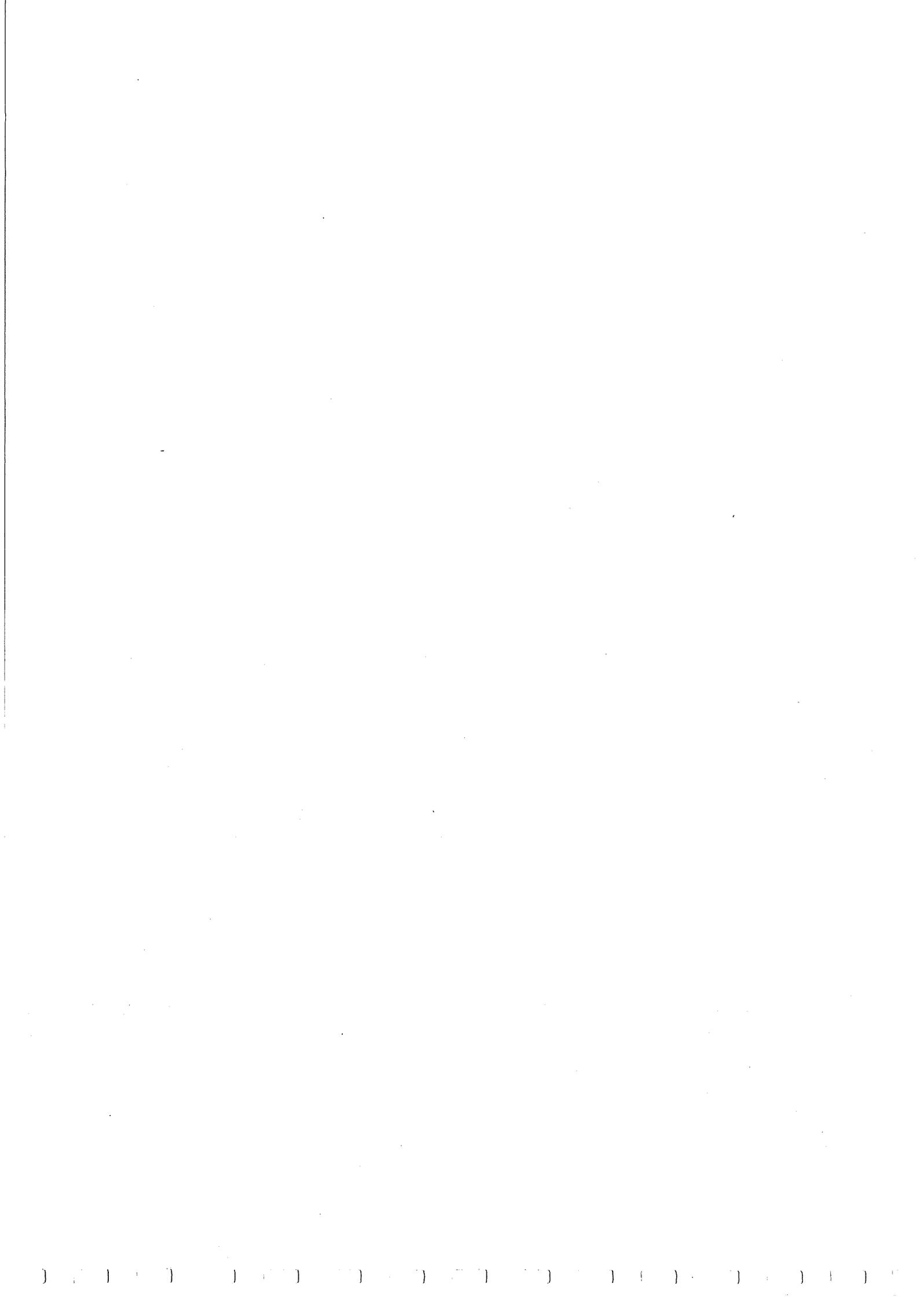
$$\mathcal{L}_i = \int_{\mathcal{B}} G_{eI}^T \epsilon_{eI} dV = \int_{\mathcal{B}} b_{eI}^T u_{eI} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_f} f_{eI}^T u_{eI} dS + \int_{\partial \mathcal{B}_u} \bar{u}_{eI}^T N_{eI} dS$$

dove nella prima uguaglianza si e' applicato il teorema di reciprocita' e nella seconda il teorema dei lavori virtuali. Poiche' per ipotesi e' $b_{eI}=0$, $f_{eI}=0$, $\bar{u}_{eI}=0$, risulta dimostrato l'asserto.

1.9 Sistemi iperstatici, isostatici, localmente isostatici.

Il metodo degli spostamenti si applica indifferentemente a sistemi isostatici (cinematicamente determinati) e a sistemi iperstatici (cinematicamente impossibili).

Il metodo delle forze si applica esclusivamente a sistemi iperstatici, i soli per i quali ha senso introdurre delle funzioni di tensione. Per i sistemi isostatici il metodo degenera in una soluzione in cascata delle equazioni del problema elastico: le condizioni di equilibrio forniscono infatti un'unica soluzione equilibrata; successivamente il legame costitutivo fornisce lo stato di deformazione e le equazioni implicite di congruenza, sempre integrabili in



quanto il sistema e' cinematicamente determinato, il campo di spostamenti.

Nel caso particolare di sistema localmente isostatico (o isostatico per vincoli interni) ed iperstatico in grande (o per vincoli esterni), come accade ad esempio per sistemi monodimensionali ipervincolati, le equazioni di equilibrio sono integrabili a meno di costanti arbitrarie (in quanto le condizioni al contorno sulle forze non sono in numero sufficiente a determinarle tutte) mentre quelle di compatibilita' cinematica in generale non ammettono soluzione (perche' le condizioni al contorno sugli spostamenti, in numero eccessivo rispetto all'ordine del problema differenziale, non possono essere tutte soddisfatte). Per tale classe di problemi il metodo delle forze conduce ad equazioni algebriche di compatibilita' in termini delle costanti arbitrarie di tensione. Le equazioni (15) sono ancora valide salvo considerare χ come vettore di costanti (incognite iperstatiche) ed $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\chi)$ come operatore algebrico.

Dal teorema dei lavori virtuali complementare (17) si ottiene percio' :

$$\chi^T \left(\int_{\mathcal{D}} \mathcal{S}'^T \varepsilon dV - \int_{\mathcal{D}} (NS)^T \bar{u} dS \right) = 0, \quad \forall \chi$$

da cui seguono le equazioni esplicite di congruenza

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{S}'^T \varepsilon dV - \int_{\mathcal{D}} (NS)^T \bar{u} dS = 0 \quad (44)$$

Esprimendo le ε in termini di χ , nel caso generale di deformazioni imposte (eq. (40)), si ottiene il sistema

$$F \chi + \eta_0 + \bar{\eta} = 0 \quad (41')$$

analogo all'equazione (41), in cui compaiono pero' grandezze algebriche:

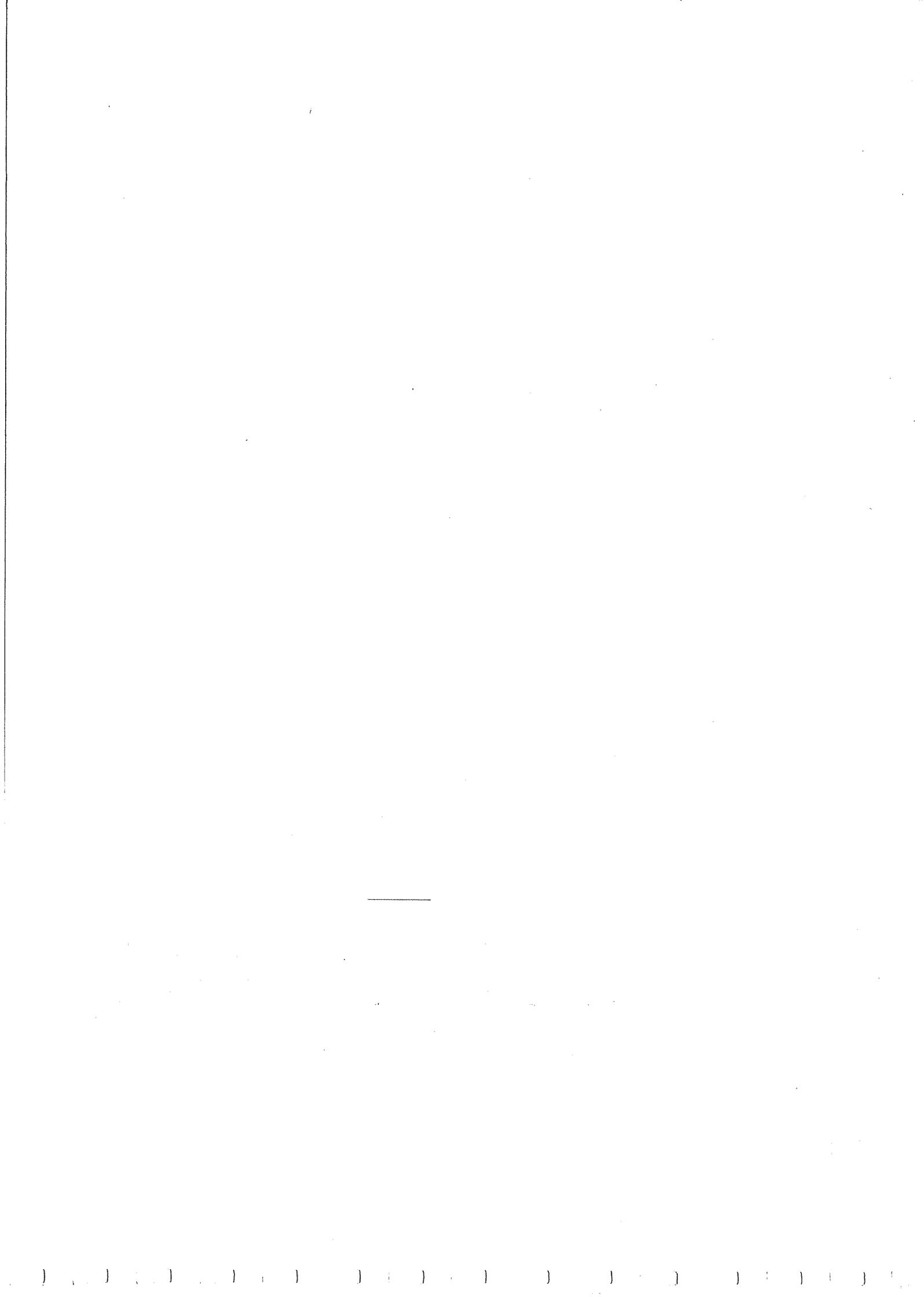
$$F = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{S}'^T C^{-1} \mathcal{S}' dV$$

$$\eta_0 = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{S}'^T C^{-1} \varepsilon_0 dV$$

(45)

$$\bar{\eta} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{S}'^T \varepsilon dV - \int_{\mathcal{D}} (NS)^T \bar{u} dS$$

Una formulazione duale che riconduce il problema differenziale ad uno algebrico nello spirito del metodo degli spostamenti sara' illustrato piu' avanti.



2. ESEMPIO ILLUSTRATIVO: UN SISTEMA DISCRETO

Prima di affrontare lo studio dei diversi modelli di continui elastici e' opportuno esemplificare i concetti sino ad ora illustrati facendo riferimento ad un sistema semplice, come quello costituito da corpi rigidi vincolati elasticamente. Dal momento che la deformabilita' del sistema e' concentrata in punti (vincoli elastici) le equazioni del problema sono tutte di tipo algebrico invece che differenziale, cosicche' l'esempio non puo' chiarire tutti gli aspetti precedentemente discussi (soprattutto il ruolo delle condizioni al contorno, che qui non sono presenti); cio' nonostante il modello e' sufficiente ad illustrare la metodologia di analisi.

2.1 Modello. Equazioni fondamentali

Il sistema considerato e' costituito da un corpo rigido ABCD, vincolato in A con un carrello e in B,C,D da molle

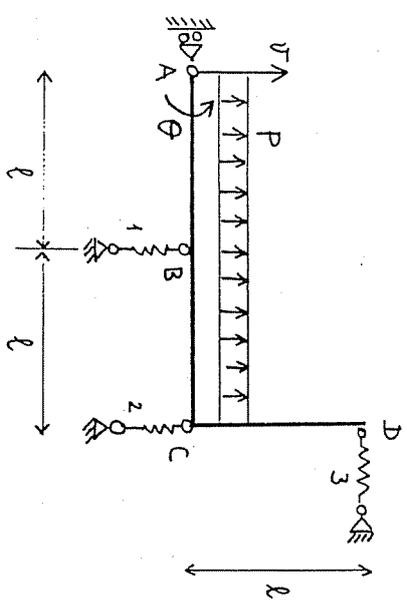


Fig. 3

elastiche (fig.3). Il sistema e' sottoposto all'azione del carico ripartito p . Si vuole risolvere il problema elastico determinando il campo di spostamenti, le deformazioni elastiche e le tensioni nelle molle.

Nel seguito si formulano le equazioni del problema.

a) Problema cinematico

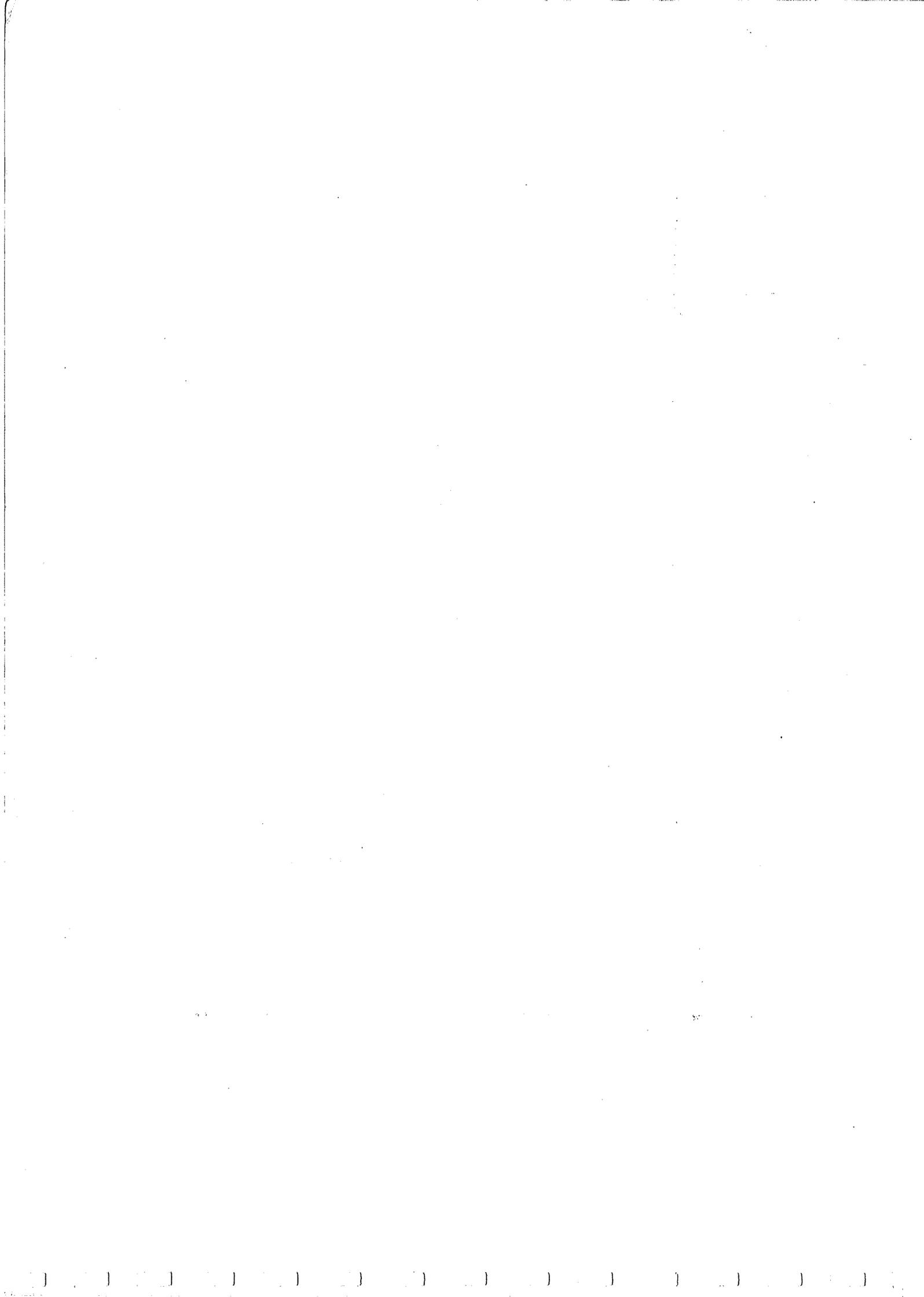
Il sistema puo' assumere ∞^2 configurazioni compatibili, che rispettano cioe' le condizioni di vincolo interne (indeformabilita' del corpo rigido) ed esterne (spostamento orizzontale in A nullo). Per individuare la generica configurazione deformata e' necessario introdurre due parametri (variabili di configurazione), ad esempio gli spostamenti v , θ indicati in figura. Per un generico sistema il numero delle variabili di configurazione e' pari al grado di libilita' del sistema di corpi rigidi privato dei vincoli elastici. Nel caso in esame:

$$\{u\} = \{v \quad \theta\}^T$$

Lo stato di deformazione e' descritto dalla variazione di lunghezza Δ_i delle molle (assunte positive se d'allungamento):

$$\{\epsilon\} = \{\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3\}^T$$

Dallo studio della cinematica del corpo rigido si ottengono le relazioni (equazioni implicite di congruenza)



$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 1 & 2\ell \\ 0 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Theta \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = D u \quad (1)$$

che definiscono l'operatore cinematico D .

Il problema cinematico "assegnati $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ determinare U e Θ " in generale non ammette soluzione in quanto il sistema e' cinematicamente impossibile. La soluzione esiste solo se il vettore dei termini noti ε soddisfa le condizioni richieste dal teorema di Rouché-Capelli, cioè se il rango della matrice ampliata

$$[D | \varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \Delta_1 \\ 1 & 2\ell & \Delta_2 \\ 1 & \ell & \Delta_3 \end{bmatrix}$$

e' uguale al rango della matrice D (pari a 2). Imponendo che il determinante della matrice 3×3 sia nullo si ottiene

$$\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \quad (2)$$

ovvero in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad S^* \varepsilon = 0 \quad (2')$$

La (2) costituisce l'equazione esplicita di congruenza del problema e definisce l'operatore S^* .

b) Problema statico

Lo stato di tensione nelle molle e' descritto dalle reazioni elastiche N_i , positive se di trazione

$$\{\varepsilon\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3\}^T$$

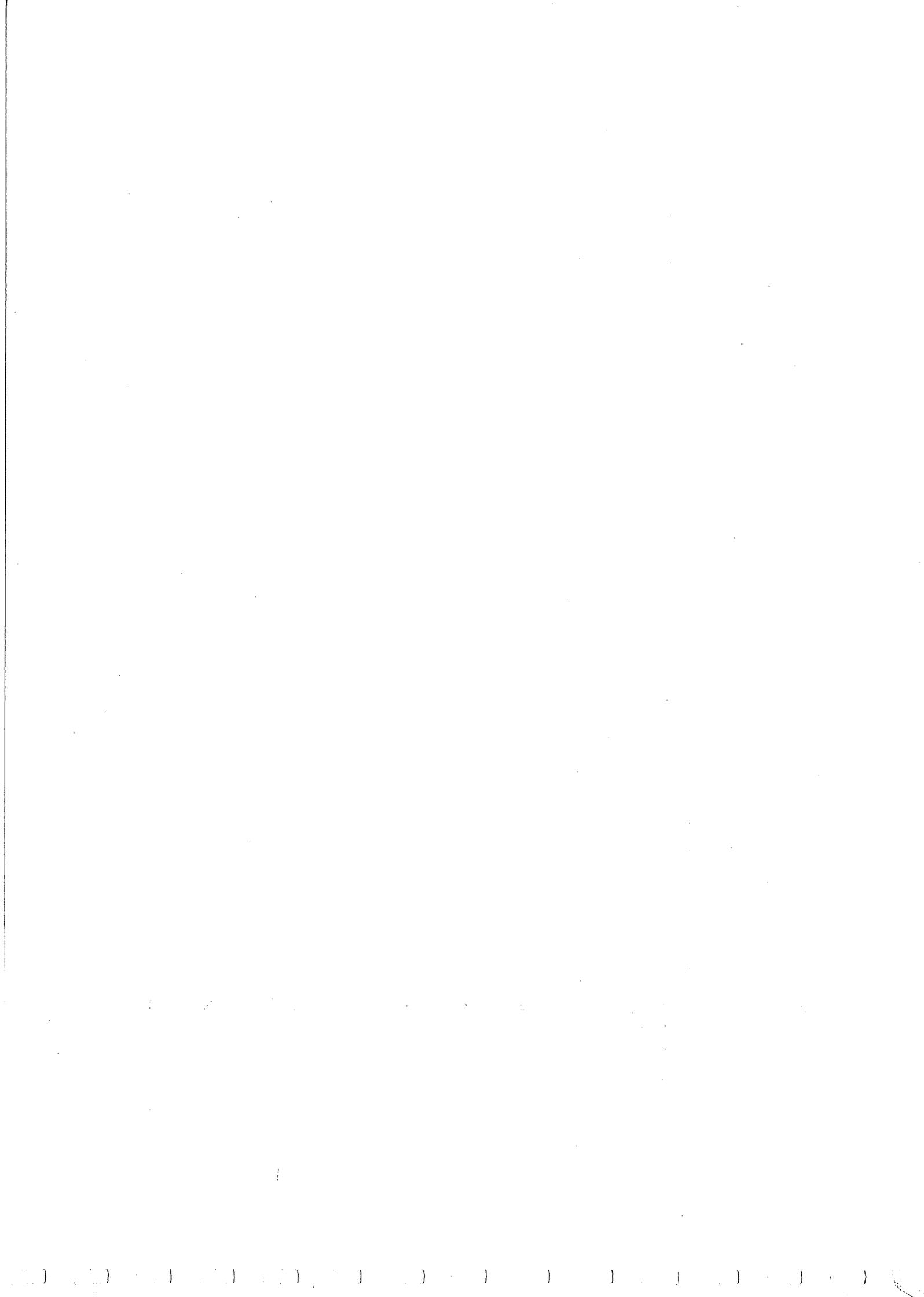
Le condizioni di equilibrio del corpo rigido (fig.4) si scrivono (+)

$$\sum X = 0 \quad R_A + N_3 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad -N_1 - N_2 + 2P\ell = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -N_1\ell - 2N_2\ell - N_3\ell + 2P\ell^2 = 0$$

(+) Si noti che le condizioni di equilibrio sono espresse nello stato indeformato del sistema.



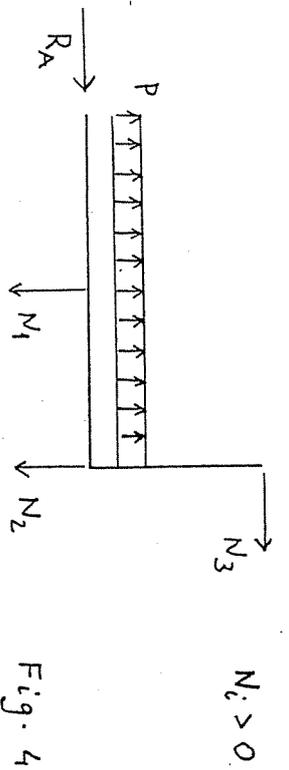


Fig. 4

dove si è assunto quale polo di riduzione delle forze lo stesso punto A assunto quale polo di riduzione degli spostamenti. Il sistema risulta essere una volta iperstatico. Si noti che nella prima equazione compare la relazione del vincolo in A che non può essere espressa attraverso un legame costitutivo. È necessario pertanto eliminarla combinando linearmente le equazioni di equilibrio, in modo da ottenere condizioni nelle sole variabili N_i . Nel caso semplice in esame è sufficiente ignorare la prima equazione e scrivere (+)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \ell & 2\ell & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P\ell \\ 2P\ell^2 \end{Bmatrix}, \quad D^* \sigma = b \quad (4)$$

che definisce l'operatore statico D^* come il trasposto dell'operatore cinematico. Si noti che il vettore b definisce

(+) Nel caso di $3n$ equazioni ed m reazioni vincolari R'_i , si ottengono $3n-m$ equazioni nelle sole N'_i .

sce le forze generalizzate che fanno lavoro nelle variabili di configurazione.

c) Legame costitutivo

Si considerano molle elastiche lineari di rigidezza k . Il legame sforzi-deformazioni è pertanto

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}, \quad \sigma = C \epsilon \quad (5)$$

che definisce l'operatore elastico C .

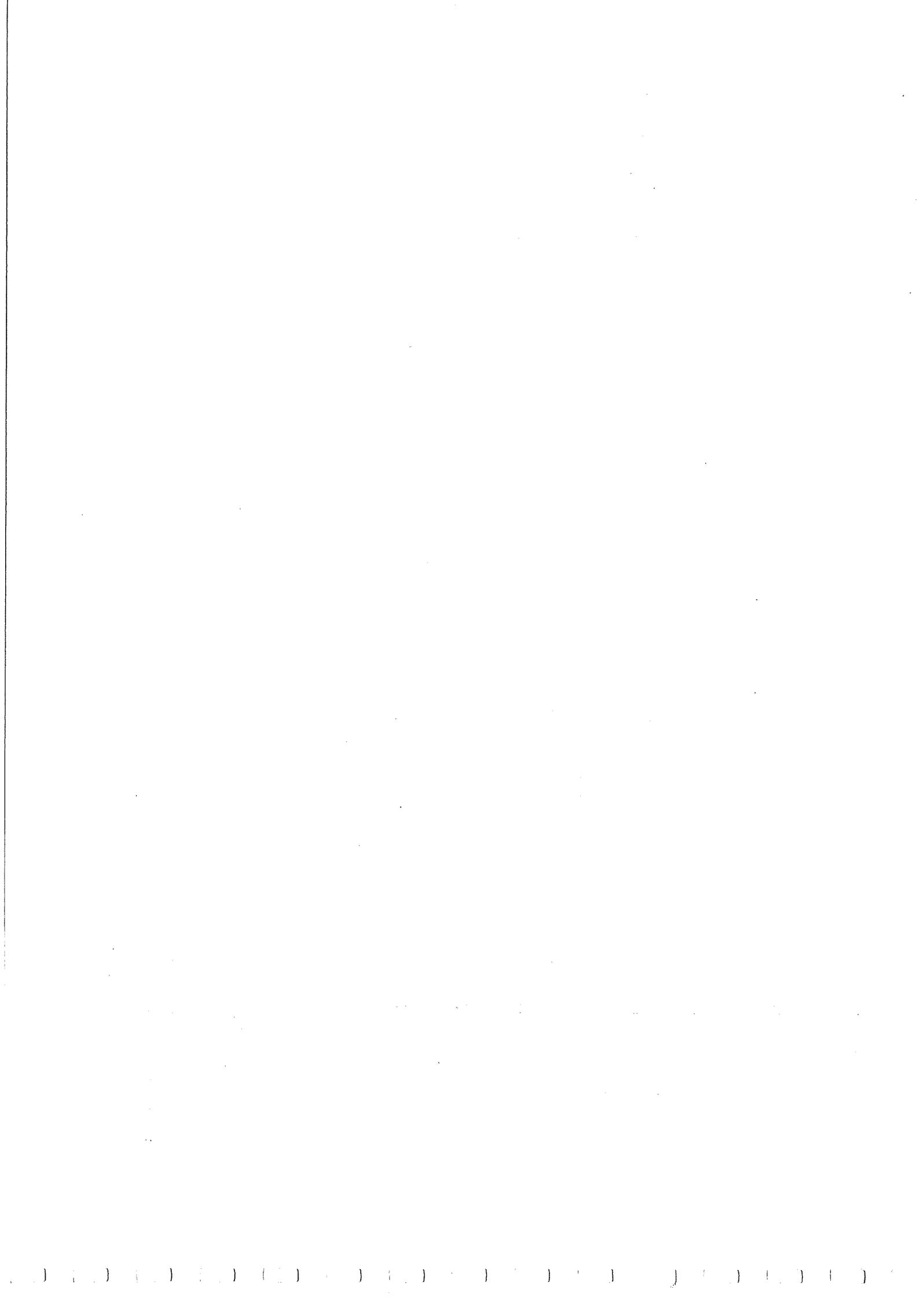
d) Problema elastico

Si hanno:

- * 3 equazioni implicite di congruenza (1);
- * 2 equazioni di equilibrio (4);
- * 3 equazioni di legame (5);
- * 2 variabili di configurazione incognite ψ, θ ;
- * 3 deformazioni incognite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$;
- * 3 tensioni incognite N_1, N_2, N_3 .

Complessivamente si hanno 8 equazioni in 8 incognite. Risolto il problema elastico e determinate le tensioni N'_i , l'equazione (3), precedentemente non utilizzata, permette di calcolare la relazione vincolare R_A .

Nel seguito si risolve il problema prima con il metodo degli spostamenti, poi con quello delle forze.



2.2 Metodo degli spostamenti

2.2.1 Formulazione diretta

Seguendo il percorso logico di fig.1 si esprimono:

* le tensioni in termini di spostamenti (eq.(1) e (5)):

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 1 & 2\ell \\ 0 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \sigma = CDu \quad (6)$$

* le condizioni di equilibrio in termini di spostamenti (eq.(4) e (6)):

$$K \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \ell & 2\ell & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 1 & 2\ell \\ 0 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P\ell \\ 2P\ell^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 2K & 3K\ell \\ 3K\ell & 6K\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P\ell \\ 2P\ell^2 \end{Bmatrix}, \quad Lu = b \quad (8)$$

che definisce l'operatore di rigidità L .

Risolviendo le (8) si determina la configurazione equilibrata

$$v = 2P \frac{\ell}{K}, \quad \theta = -\frac{2}{3} \frac{P}{K} \quad (9)$$

Sostituendo la soluzione nelle (1.45) si ha:

$$\Delta_1 = \frac{1}{3} P \frac{\ell}{K}, \quad \Delta_2 = \frac{2}{3} P \frac{\ell}{K}, \quad \Delta_3 = -\frac{2}{3} P \frac{\ell}{K} \quad (10)$$

Sostituendo le (10) nelle (5) (ovvero le (9) nelle (6)) si ottiene infine:

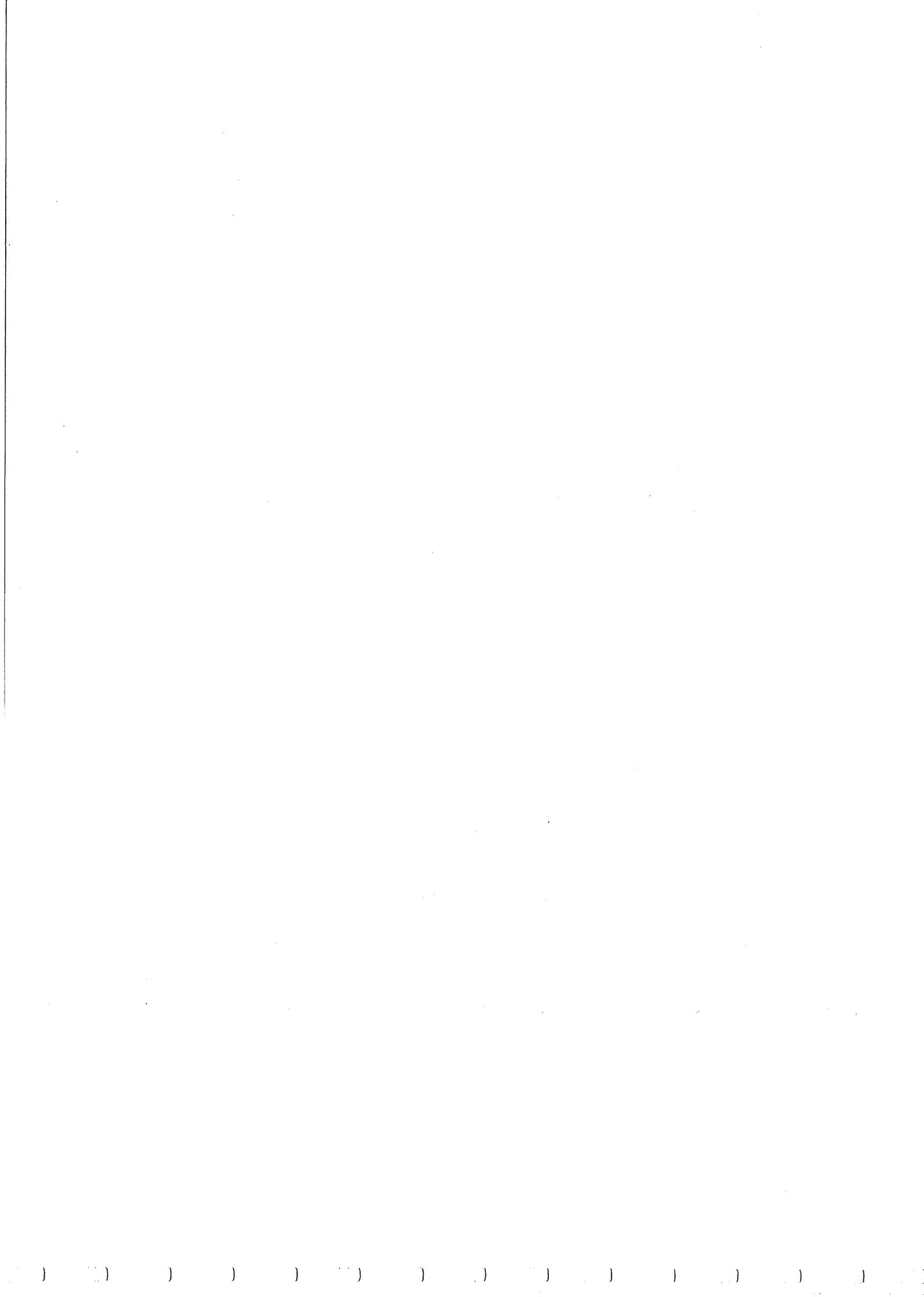
$$N_1 = \frac{1}{3} P \ell, \quad N_2 = \frac{2}{3} P \ell, \quad N_3 = -\frac{2}{3} P \ell \quad (11)$$

L'intero problema elastico e' cosi' risolto. Vale la pena di osservare che l'equazione esplicita di congruenza (2), che non viene utilizzata nel metodo degli spostamenti, e' identicamente soddisfatta dalla soluzione (10). Per completare la soluzione, dalla (3₁) si ricava

$$R_A = \frac{2}{3} P \ell \quad (12)$$

2.2.2 Formulazioni integrale e variazionale

Le due formulazioni si distinguono da quella diretta per il fatto che non richiedono lo studio del problema statico (4) ma solo quello cinematico (1.45), oltre naturalmente alla definizione del legame (5). La



condizione di equilibrio viene ottenuta direttamente in termini di spostamento dal teorema dei lavori virtuali oppure da quello dell'energia potenziale totale.

L'equazione dei lavori virtuali (1.21) nel caso in esame si scrive:

$$\sigma^T \delta \varepsilon = b^T \delta u, \quad \forall \delta u \quad (15)$$

ovvero

$$N_1 \delta \Delta_1 + N_2 \delta \Delta_2 + N_3 \delta \Delta_3 = 2p\ell \delta v + 2p\ell^2 \delta \theta, \quad \forall \delta v, \delta \theta \quad (14)$$

Esprimendo gli sforzi N_i in funzione degli spostamenti effettivi v e θ (eq.(6)) e le deformazioni virtuali $\delta \Delta_i$ in funzione degli spostamenti virtuali δv , $\delta \theta$ (eq.(1.45)) si ha:

$$k(v + \theta\ell)(\delta v + \ell\delta\theta) + k(v + 2\theta\ell)(\delta v + 2\ell\delta\theta) + k(\theta\ell)(\ell\delta\theta) =$$

$$= 2p\ell \delta v + 2p\ell^2 \delta \theta, \quad \forall \delta v, \delta \theta \quad (15)$$

Raccogliendo i termini in δv , $\delta \theta$:

$$[k(2v + 3\theta\ell) - 2p\ell] \delta v + [k(3\ell v + 6\ell^2\theta) - 2p\ell^2] \delta \theta = 0, \quad \forall \delta v, \delta \theta \quad (16)$$

da cui si ottengono le equazioni di equilibrio (8).

La formulazione variazionale richiede la scrittura dell'energia potenziale totale (1.12):

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon - b u = \frac{1}{2} k (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) - 2p\ell v - 2p\ell^2 \theta \quad (17)$$

Introducendo le condizioni di compatibilit  (1.45) si ha:

$$V = \frac{1}{2} k [(v + \theta\ell)^2 + (v + 2\theta\ell)^2 + (\theta\ell)^2] - 2p\ell v - 2p\ell^2 \theta \quad (18)$$

Risulta pertanto $V = V(v, \theta)$. Imponendo che sia

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial v} \delta v + \frac{\partial V}{\partial \theta} \delta \theta = 0, \quad \forall \delta v, \delta \theta \quad (19)$$

Si riottiene la (16) e quindi le (8).

Le due formulazioni, integrale e variazionale, permettono pertanto di ottenere in maniera automatica le equazioni di equilibrio del problema studiando solo due dei tre aspetti del problema elastico. Il grosso vantaggio operativo rispetto alla formulazione diretta e' che entrambi gli strumenti forniscono equazioni "pure" negli spostamenti, filtrando via le reazioni dei vincoli (come R_A) che non sono associate ad un legame costitutivo. Queste reazioni, se d'interesse, vanno comunque ricavate a valle della soluzione in base a sole condizioni di equilibrio.



L'esempio di fig.5 serve ad illustrare meglio il concetto: la scrittura dell'unica equazione di equilibrio del problema che non contenga reazioni R e' certamente non agevole se affrontata in forma diretta, ma puo' essere facilmente ricavata con il TLV (o con quello dell'EPT).

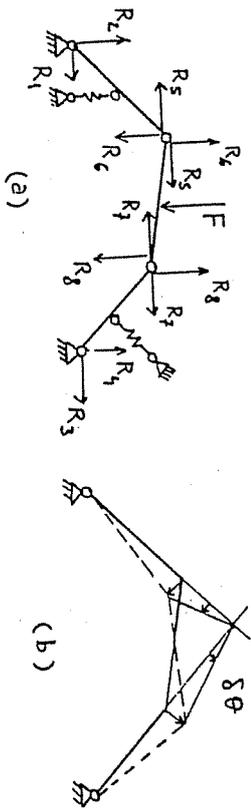


Fig. 5

Le reazioni vincolari R_i (fig.5a) non compiono infatti lavoro nel campo di spostamenti virtuale (fig.5b) e l'unica condizione di equilibrio che si ottiene contiene solo le forze attive F e le reazioni elastiche N'_i .

2.3 Metodo delle forze

2.3.1 Formulazione diretta

Procedendo nello spirito del metodo delle forze e' necessario dapprima determinare il generico stato di tensione equilibrato. Risolvendo le (4) in corrispondenza di un arbitrario minore non nullo, ad esempio:

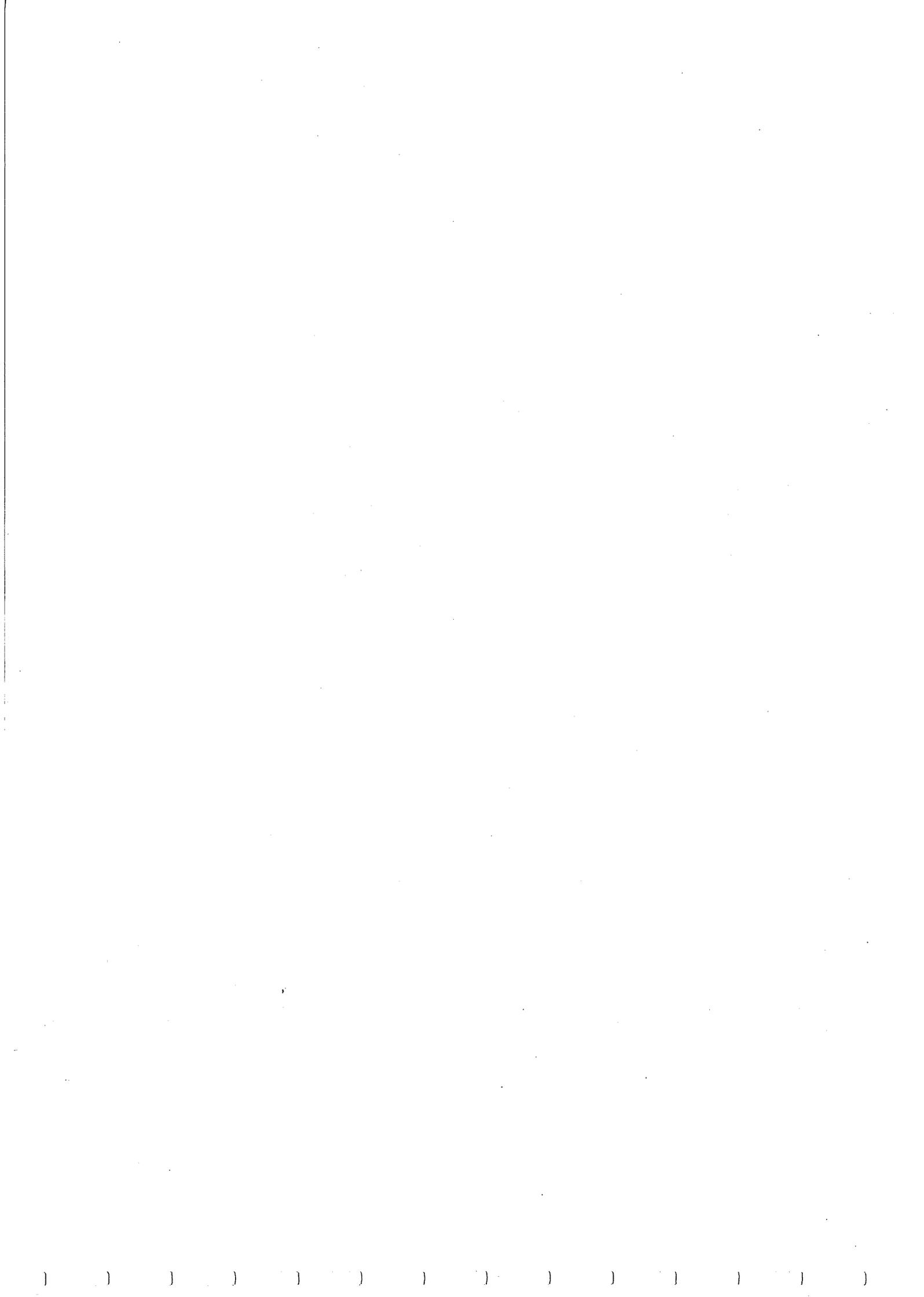
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P\ell \\ 2P\ell^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ell \end{Bmatrix} N_2 \quad (20)$$

Si ottiene

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P\ell \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} N_2, \quad G = G_0 + S X \quad (21)$$

La (21) e' la soluzione generale dell'equazione di equilibrio (4): lo stato di tensione nelle molle e' descritto come somma di due termini:

- a) il primo e' soluzione particolare (in quanto corrispondente ad una particolare scelta del minore non nullo) del problema non omogeneo; da un punto di vista meccanico puo' interpretarsi come soluzione (unica) del sistema isostatico che si ottiene dal sistema originario eliminando il vincolo di continuita' nella molla n.2 (fig.6a);
- b) il secondo e' la soluzione generale del problema omogeneo e rappresenta il generico stato di tensione nelle molle in assenza di carico; la soluzione puo' essere determinata applicando allo stesso sistema isostatico una



tensione arbitraria N_2 in corrispondenza del vincolo soppresso (fig. 6b).

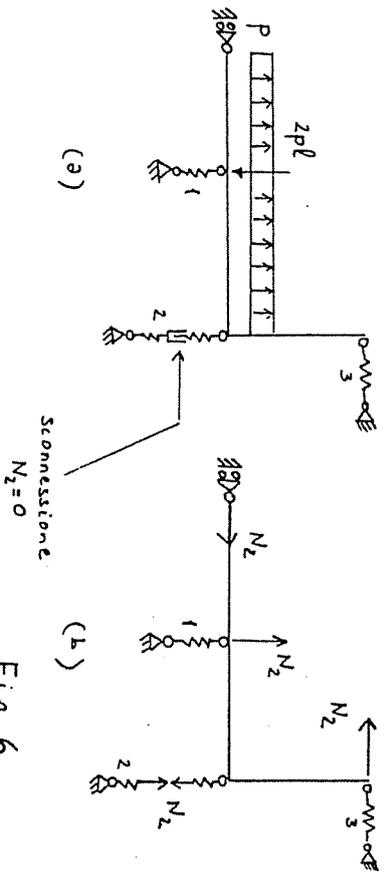


Fig. 6

Il sistema isostatico e' detto sistema principale; la tensione arbitraria $N_2 \in \mathcal{X}$ e' detta incognita iperstatica e va determinata attraverso un'equazione di congruenza.

Le (21) definiscono l'operatore algebrico S' che, in accordo a quanto visto nel paragrafo 1.5, risulta essere il trasposto dell'operatore S'^* che appare nell'equazione esplicita di congruenza (2).

Allo stato di tensione (21) corrisponde, tramite il legame costitutivo (5), lo stato di deformazione

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2pl/k \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1/k \\ 1/k \\ -1/k \end{Bmatrix} N_2 \quad (22)$$

In generale non congruente per una scelta arbitraria di N_2 . In altre parole, assegnato ad arbitrio N_2 , sovrapponendo le deformazioni nelle molle corrispondenti alle tensioni di fig. 6a e 6b, lo spostamento relativo in corrispondenza della sconnessione risulta diverso da zero, cioe' viola la compatibilita' cinematica. Il valore di N_2 che e' soluzione del problema elastico e' quello per il quale tale spostamento si annulla. Sostituendo la (22) nell'equazione esplicita di congruenza (2) si ottiene:

$$\frac{3}{k} N_2 = 2pl/k \quad F\mathcal{X} = -\eta_0 \quad (23)$$

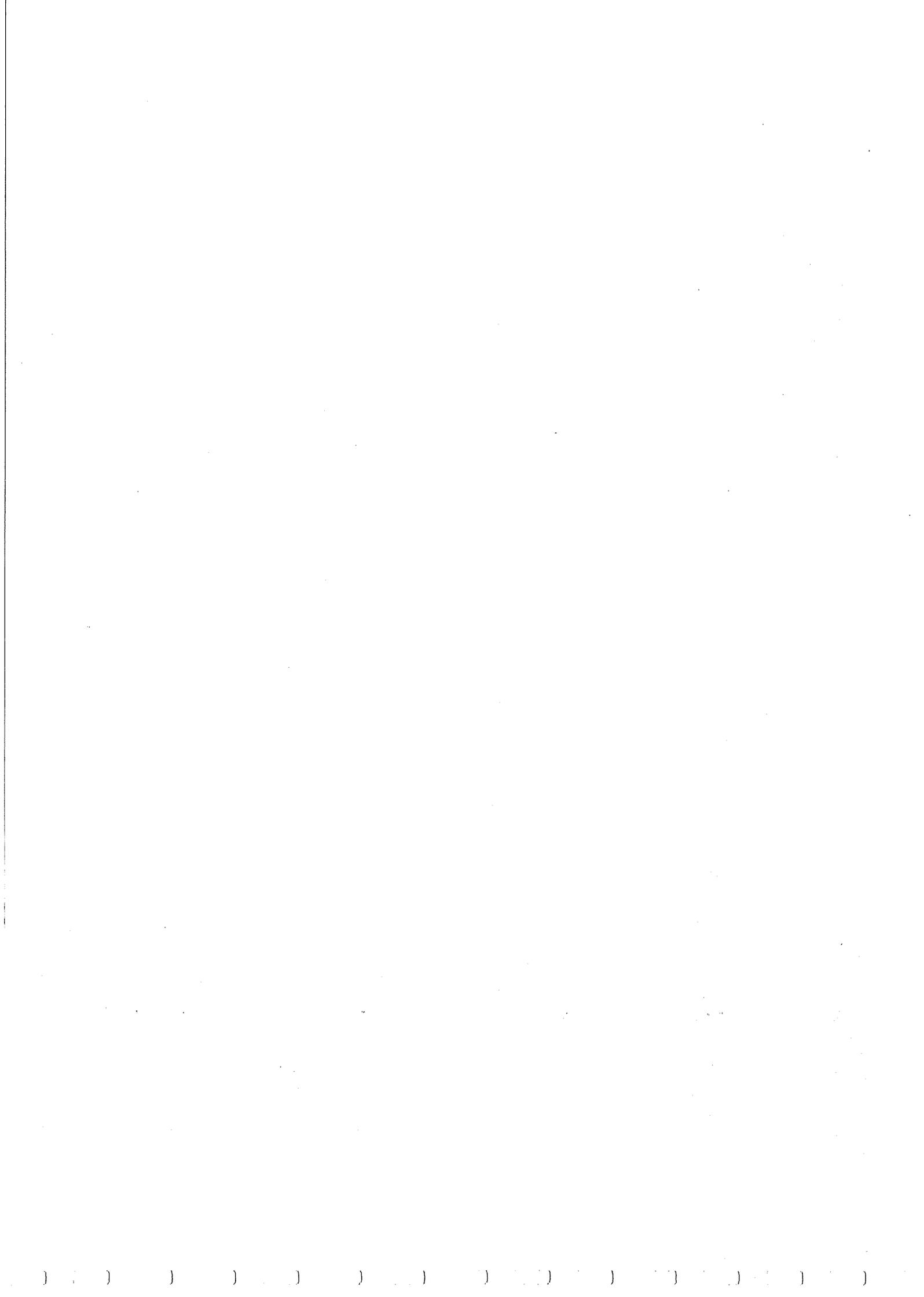
che, risolta, individua l'unica configurazione compatibile tra le ∞^1 equilibrate. Determinato N_2 , la (21) fornisce lo stato di tensione completo e la (22) quello di deformazione, coincidenti con quelli prima trovati con il metodo degli spostamenti (eq. (10), (11)).

A conclusione di questa trattazione si vuole illustrare un metodo alternativo, di larghissimo uso nelle applicazioni, per ottenere l'equazione esplicita di congruenza. Il metodo utilizza la formula generale dello spostamento (1.5) che nel caso in esame, in cui sono assenti i cedimenti vincolari, si scrive:

$$1 \cdot \eta = \epsilon^T G^1 \quad (24)$$

dove G^1 e' la tensione equilibrata con una forza unitaria che fa lavoro nello spostamento effettivo η . Si utilizzi ora la (24) per il calcolo dello spostamento relativo in corrispondenza della sconnessione della molla n. 2. Lo stato G^1 e' pari a

$$G^1 = \begin{Bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \quad (25)$$



cioè alla (21) privata del termine dovuto al carico, posto $N_2 = N_2' = 1$. Assumendo come stato di deformazione la (22) si ha:

$$\eta = -2P \frac{\ell}{K} + \frac{3}{K} N_2 \quad (26)$$

I due termini a secondo membro rappresentano gli spostamenti relativi in corrispondenza della sconnessione rispettivamente dovuti ai carichi P e all'incognita iperstatica N_2 . Imponendo che sia $\eta = 0$ (equazione esplicita di congruenza) si riottiene la (23).

2.3.2 Formulazioni Integrali e variazionale

In queste formulazioni non è richiesto lo studio esplicito della congruenza, ma solo quello dell'equilibrio e del legame costitutivo. L'equazione risolvente (di compatibilità) è ottenuta direttamente in termini di tensione dal teorema dei lavori virtuali oppure da quello dell'energia complementare totale.

L'equazione dei lavori virtuali (1.31), con le condizioni (1.32), nel caso in esame (assenza di cedimenti vincolari) si scrive:

$$\delta \sigma^T \epsilon = 0 \quad (27)$$

in cui $\delta \sigma$ è il generico stato autoequilibrato.

Esplicitando:

$$\Delta_1 \delta N_1 + \Delta_2 \delta N_2 + \Delta_3 \delta N_3 = 0 \quad (28)$$

dove Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 sono dati dalle (22) (deformazioni effettive) ed inoltre, dalla (21), risulta

$$\delta N_1 = -\delta N_2, \quad \delta N_2 = \delta N_2, \quad \delta N_3 = -\delta N_2 \quad (29)$$

(tensioni virtuali autoequilibrate). La (28) si scrive pertanto:

$$\left[-(2P \frac{\ell}{K} - \frac{N_2}{K}) + \frac{N_2}{K} + \frac{N_2}{K} \right] \delta N_2 = 0, \quad \forall \delta N_2 \quad (30)$$

da cui si ricava la (23).

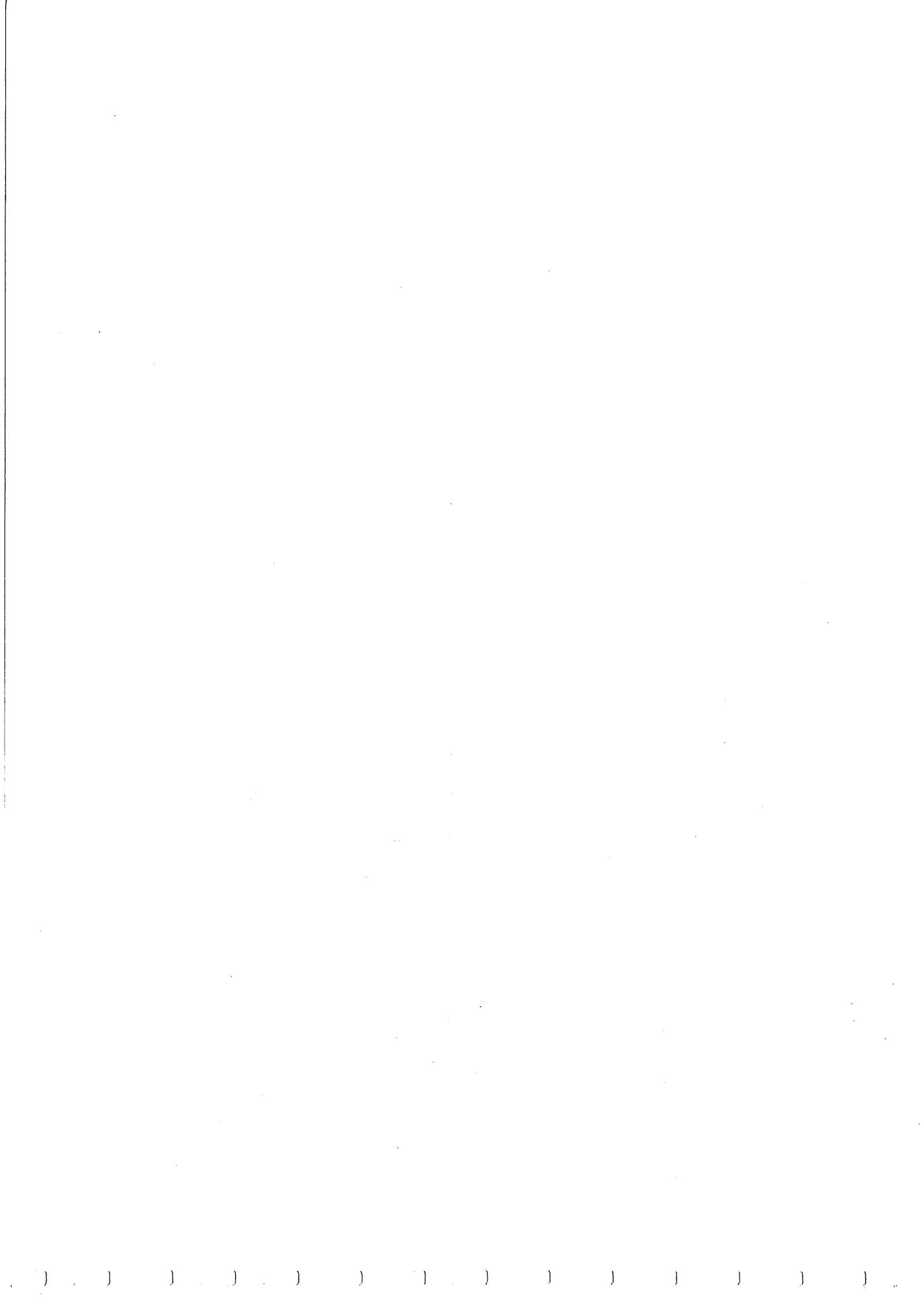
L'energia complementare totale (1.35) si scrive:

$$\begin{aligned} V_C(N_2) &= 1/2 \sigma^T C^{-1} \sigma = \\ &= \frac{1}{2K} \left[(2P\ell - N_2)^2 + N_2^2 + N_3^2 \right] \quad (31) \end{aligned}$$

avendo espresso le tensioni σ in termini dell'incognita iperstatica N_2 tramite le (21). Imponendo la stazionarietà di V_C :

$$\delta V_C = \frac{\partial V_C}{\partial N_2} \delta N_2 = 0, \quad \forall \delta N_2 \quad (32)$$

si riottiene la (30) e quindi la (23).



3. CONTINUO MONODIMENSIONALE: ASTA RETTILINEA

3.1 Equazioni fondamentali

Si consideri un'asta rettilinea di lunghezza l , sottoposta all'azione di forze di linea $p(x)$ e di forze d'estremità F_A e F_B , eventualmente vincolata agli estremi A e B (fig. 7).

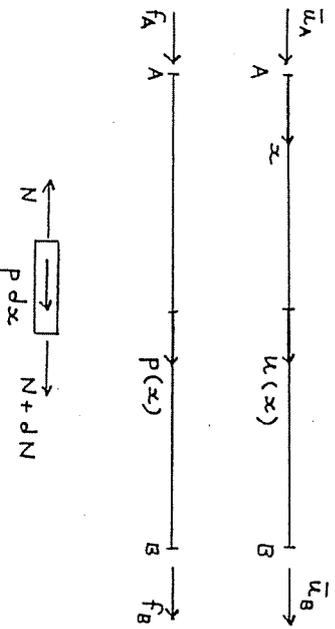


Fig. 7

Il problema elastico si particolarizza come segue.

a) Problema cinematico

La generica configurazione dell'asta e' individuata dalla funzione $u(x)$, lo stato di deformazione dalla funzione $\epsilon(x)$ che misura la dilatazione specifica. Le equazioni implicite di congruenza si scrivono:

$$\frac{du}{dx} = \epsilon \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{su } \partial \mathcal{D}$$

dove \mathcal{D} e' l'intervallo $[A, B]$ e $\partial \mathcal{D}$ la parte della frontiera (cioe' l'unione dei punti A e B) su cui sono assegnati gli spostamenti. Le (1) definiscono l'operatore cinematico $D = d/dx$.

b) Problema statico

Lo stato di tensione e' descritto dalla funzione $N(x)$ (sforzo normale nell'asta); le condizioni di equilibrio, indefinite e al contorno, si scrivono

$$-\frac{dN}{dx} = p \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (2)$$

$$n N = F \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad n = \begin{cases} -1 & \text{in } A \\ +1 & \text{in } B \end{cases}$$

dove $\partial \mathcal{D}_f$ e' la parte della frontiera su cui sono assegnate le forze. Le (2) definiscono l'operatore statico $D^* = -d/dx$ (+), come aggiunto di quello cinematico, e l'operatore algebrico $[N] = \pm 1$.

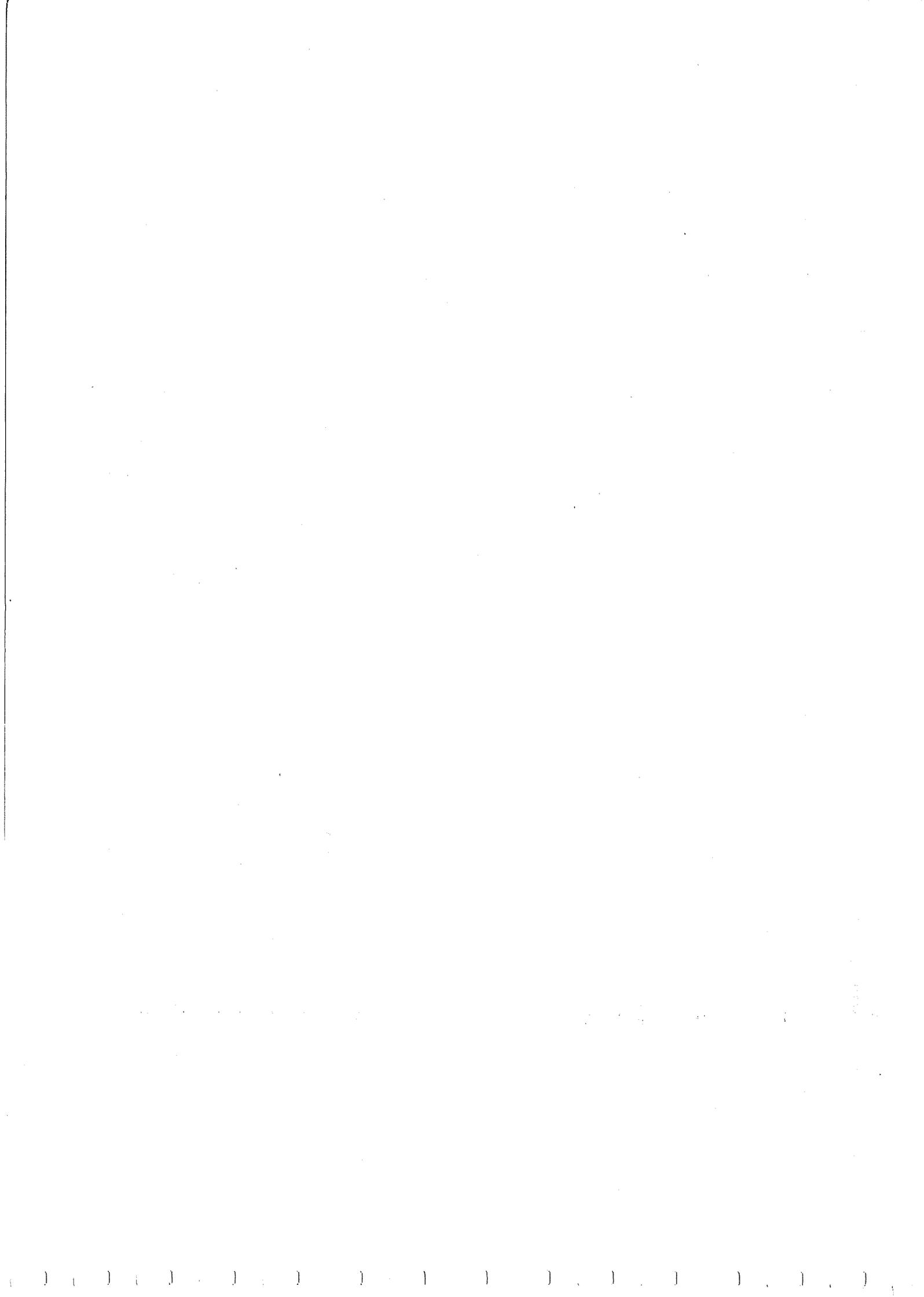
c) Legame costitutivo

Si assume:

$$EA \epsilon = N \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (3)$$

che definisce l'operatore elastico $C = EA$ come prodotto del modulo elastico E e dell'area A della sezione

(+) $u(x)$ e $N(x)$ devono perciò essere funzioni continue in \mathcal{D} perche' ad esse possa essere applicato l'operatore D o D^* .



trasversale dell'asta (rigidezza assiale). Si noti che nel legame costitutivo sono contenute informazioni (caratteristiche geometriche della sezione trasversale) che si sono perse nella riduzione a continuo monodimensionale dell'oggetto tridimensionale.

Si osservi che sia il problema cinematico che quello statico sono localmente determinati (+), cioè le equazioni differenziali (una sola in una incognita per ciascun problema), sono integrabili per qualsiasi termine noto e la soluzione è determinata a meno di costanti arbitrarie. La soluzione in grande è però unica solo se le condizioni al contorno sono sufficienti a determinare le costanti. La classificazione del sistema (cinematicamente /staticamente determinato, indeterminato, impossibile) dipende perciò esclusivamente dalle condizioni al contorno. Per discutere i diversi casi si considerino i seguenti tipi di condizioni al contorno.

1) Condizioni sui soli spostamenti: $U_A = \bar{U}_A$, $U_B = \bar{U}_B$; il problema cinematico è impossibile (2 condizioni al contorno per un'equazione del primo ordine), quello statico è indeterminato (1 costante rimane arbitraria); il sistema è ipervincolato (iperstatico).

2) Condizioni sulle sole forze: $N_A = -f_A$, $N_B = f_B$ (asta non vincolata); il problema statico è impossibile, quello

(+) Il sistema è anche detto staticamente determinato per vincoli interni.

cinematico indeterminato; il sistema è ipovincolato (labile).

3) Condizioni miste, ad esempio: $U_A = \bar{U}_A$, $N_B = f_B$; entrambi i problemi sono determinati; il sistema è isovincolato (isostatico).

Se si fa invece riferimento all'intero problema elastico, introducendo cioè il legame costitutivo, il sistema (1)-(3) è un sistema differenziale del secondo ordine e la sua soluzione è univocamente determinata quando si impongano due condizioni al contorno, siano esse di tipo geometrico (tipo 1), meccanico (tipo 2) o misto (tipo 3).

Il problema elastico è formulato e risolto nel seguito secondo il metodo degli spostamenti e quello delle forze.

3.2 Metodo degli spostamenti

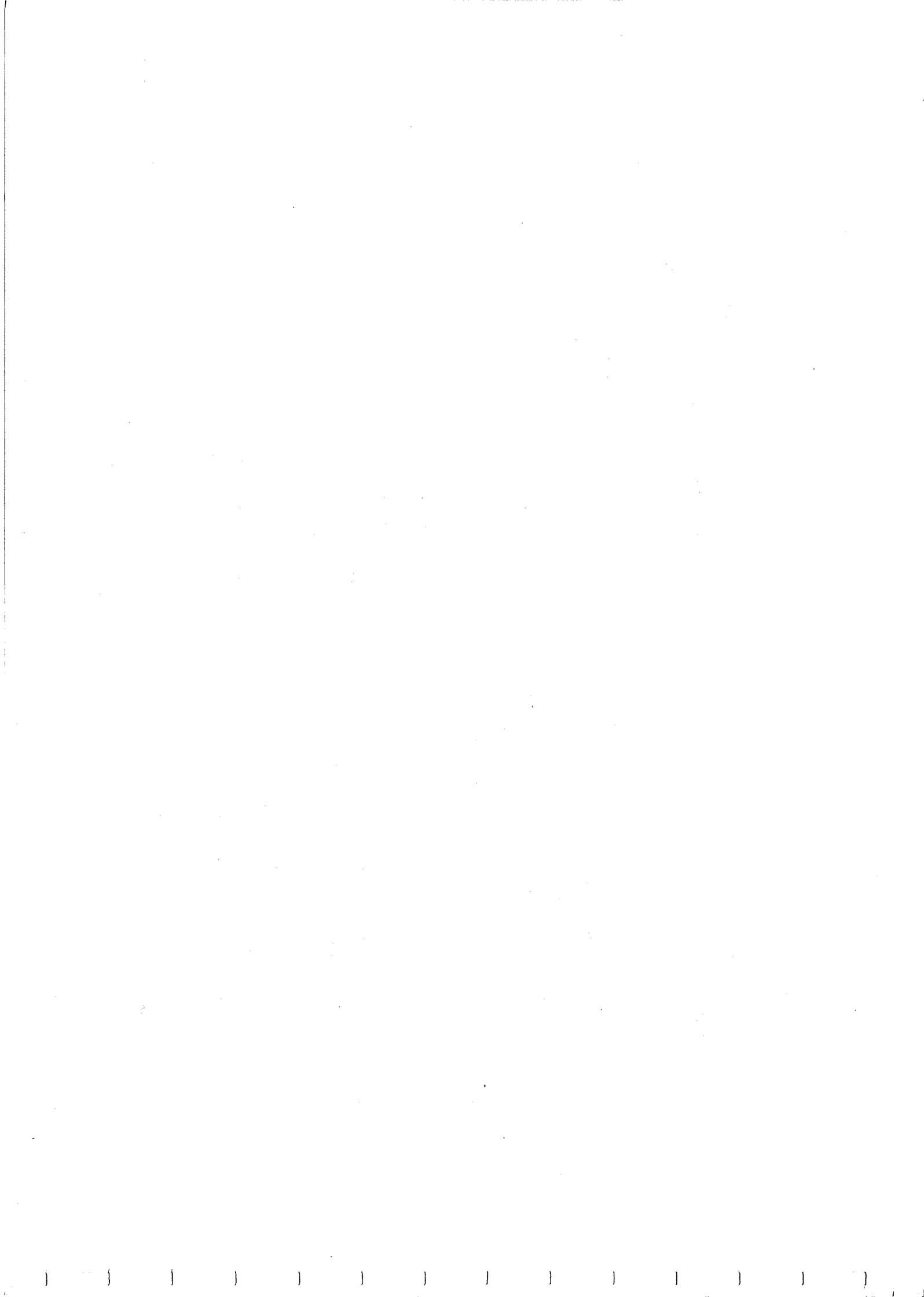
3.2.1 Formulazione diretta

Alla generica configurazione compatibile, descritta dalla funzione continua $u(x)$ che soddisfa le condizioni geometriche su $\partial \mathcal{D}_u$, corrisponde lo stato di tensione

$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (4)$$

tenuto conto del legame (3). Le condizioni di equilibrio (2) si scrivono perciò in termini di spostamento

$$\begin{aligned} -EA \frac{d^2 u}{dx^2} &= P & \text{in } \mathcal{D} \\ n EA \frac{du}{dx} &= f & \text{su } \partial \mathcal{D}_f \end{aligned} \quad (5)$$



L'operatore di rigidità è perciò $L = -EA d^2/dx^2$.

Alle (5) vanno aggiunte le condizioni geometriche $u = \bar{u}$ su $\partial \mathcal{D}u$.

La soluzione generale dell'equazione (5) è'

$$u(x) = \iint \frac{P(x)}{EA} dx dx + c_1 x + c_2 \quad (6)$$

dove il primo termine è un integrale particolare dell'equazione non omogenea e gli altri due termini costituiscono l'integrale generale del problema omogeneo. Le costanti arbitrarie c_1 e c_2 vanno determinate con le condizioni al contorno. In alternativa alla (6) si può integrare la (5) tra limiti definiti e ottenere

$$u(x) = - \int_0^x \int \frac{P(x)}{EA} dx dx + u'(0)x + u(0) \quad (7)$$

dove $(\cdot)' = d/dx$ e $u'(0)$, $u(0)$ sono arbitrarie. Determinate le costanti e quindi $u(x)$, la (1) fornisce per derivazione il campo di deformazione e la (3) quello di tensione.

A titolo di esempio si consideri il sistema (isostatico) di fig. 8. La soluzione (6) si scrive

$$u(x) = -\frac{1}{2} \frac{P}{EA} x^2 + c_1 x + c_2 \quad (8)$$

Le condizioni al contorno sono geometriche in $A \equiv \partial \mathcal{D}u$ e meccaniche in $B \equiv \partial \mathcal{D}f$:

$$u(0) = 0, \quad EA u'(l) = F_B = 0 \quad (9)$$

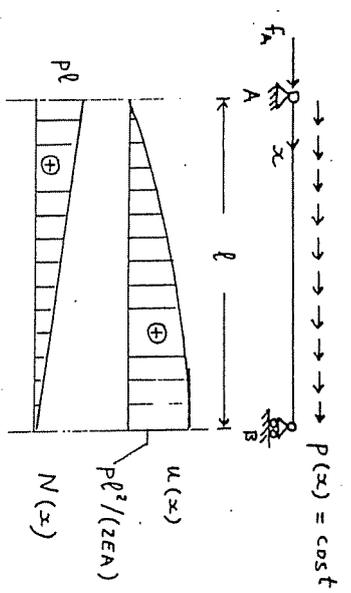


Fig. 8

La prima condizione implica $c_2 = 0$; la seconda $c_1 = p l / EA$. Sostituendo si ha:

$$u(x) = \frac{p l^2}{EA} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{2l^2} \right) \quad (10)$$

diagrammata in figura. Lo sforzo normale $N(x)$, positivo di trazione, si ottiene dall'equazione (4):

$$N(x) = p l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (11)$$

anch'esso riportato in figura. Per completare la soluzione è possibile calcolare la reazione vincolare F_A dalla (22):

$$F_A = -N(0) = -p l \quad (12)$$

Come controllo, l'equilibrio globale è soddisfatto.

Quale secondo esempio si consideri l'asta di fig. 9 (sistema iperstatico) sollecitata da una forza F_a applicata in C. Poiché è presente una singolarità ($P(\alpha) = \infty$) è necessario integrare la (5) separatamente nei due intervalli $\mathcal{D}_1 \equiv [0, \alpha)$, $\mathcal{D}_2 \equiv (\alpha, 3\alpha]$ in modo da spostare la singolarità sul contorno. Le condizioni ai limiti in A e B (geometriche) si scrivono

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(3\alpha) = 0 \quad (13)$$



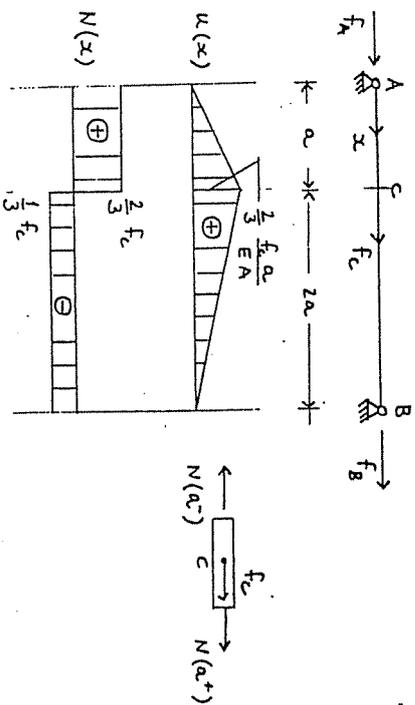


Fig. 9

Le condizioni in C (miste) esprimono la congruenza e l'equilibrio

$$u_1(a) = u_2(a) \tag{14}$$

$$N(a^+) - N(a^-) + F_c = 0$$

La (14), in termini di spostamento, diventa:

$$EA [u_2'(a) - u_1'(a)] + F_c = 0 \tag{15}$$

La soluzione generale della (5₁) e'

$$u_1(x) = c_1 x + c_2 \tag{16}$$

$$u_2(x) = c_3 x + c_4$$

Dalle (13), (14₁), (15) si ottiene:

$$c_1 = \frac{2}{3} \frac{F_c}{EA}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{F_c}{3EA}, \quad c_4 = \frac{F_c a}{EA} \tag{17}$$

per cui le (16) si scrivono:

$$u_1(x) = \frac{2}{3} \frac{F_c}{EA} x \tag{18}$$

$$u_2(x) = \frac{F_c}{3EA} (3a - x)$$

e le tensioni corrispondenti risultano

$$N_1(x) = \frac{2}{3} F_c \tag{19}$$

$$N_2(x) = -\frac{1}{3} F_c$$

Le reazioni vincolari valgono:

$$F_A = -N_1(0) = -\frac{2}{3} F_c \tag{20}$$

$$F_B = N_2(3a) = -\frac{1}{3} F_c$$

Si osservi che la funzione $u(x)$ e' continua (per la congruenza) ma la derivata prima e' discontinua (tensioni discontinue in C per effetto della singolarita').

3.2.2 Formulazioni integrale e variazionale

Il teorema dei lavori virtuali (1.21) per il continuo monodimensionale si scrive:

$$\int_0^l N \delta \epsilon dx = \int_0^l p \delta u dx + F_A \delta u_A + F_B \delta u_B \tag{21}$$

Esprimendo le deformazioni virtuali in termini di spostamento virtuale e le tensioni effettive in termini di spostamento effettivo:

$$\delta \epsilon = \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta u) \tag{22}$$



$$N = EA \frac{du}{dx} \quad (22)$$

Si ottiene:

$$\int_0^l EA \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} (\delta u) dx = \int_0^l P \delta u dx + f_A \delta u_A + f_B \delta u_B \quad (23)$$

Nella (23) vanno inoltre imposte le condizioni di compatibilita' $\delta u = 0$ su $\partial \mathcal{B}_u$ (condizioni geometriche).

Integrando per parti il termine a primo membro si ha:

$$\int_0^l - \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + P \right) \delta u dx - \left(EA \frac{du}{dx} \Big|_A + f_A \right) \delta u_A + \left(EA \frac{du}{dx} \Big|_B - f_B \right) \delta u_B = 0, \quad \forall \delta u \quad (24)$$

da cui:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + P = 0$$

$$\left(EA \frac{du}{dx} \Big|_A + f_A \right) \delta u_A = 0 \quad (25)$$

$$\left(EA \frac{du}{dx} \Big|_B - f_B \right) \delta u_B = 0$$

La (25) e' l'equazione differenziale di equilibrio in termini di spostamento; dalle (25,2,3), imposte le condizioni geometriche, si ricavano le condizioni meccaniche, anch'esse gia' espresse in termini di spostamento.

Ad esempio, per il sistema di fig. 8 si ha la sola condizione geometrica $u_A = 0$; e' percio' $\delta u_A = 0$, $\delta u_B = \gamma$;

quindi la (25,2) e' soddisfatta e la (25,3) fornisce la condizione meccanica

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_B - f_B = 0 \quad (26)$$

coincidente con la (9).
Per il sistema di fig. 9 l'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^a EA u_1' \delta u_1' dx + \int_a^{3a} EA u_2' \delta u_2' dx = f_A \delta u_{1A} + f_B \delta u_{2B} + f_C \delta u_{1C} \quad (27)$$

dove l'ultimo termine puo' anche essere scritto $f_C \delta u_{2C}$.
Integrando per parti si ha:

$$- \int_0^a EA u_1'' \delta u_1 dx - \int_a^{3a} EA u_2'' \delta u_2 dx + [EA u_1' \delta u_1]_0^a + [EA u_2' \delta u_2]_a^{3a} - f_A \delta u_{1A} - f_B \delta u_{2B} - f_C \delta u_{1C} = 0 \quad (28)$$

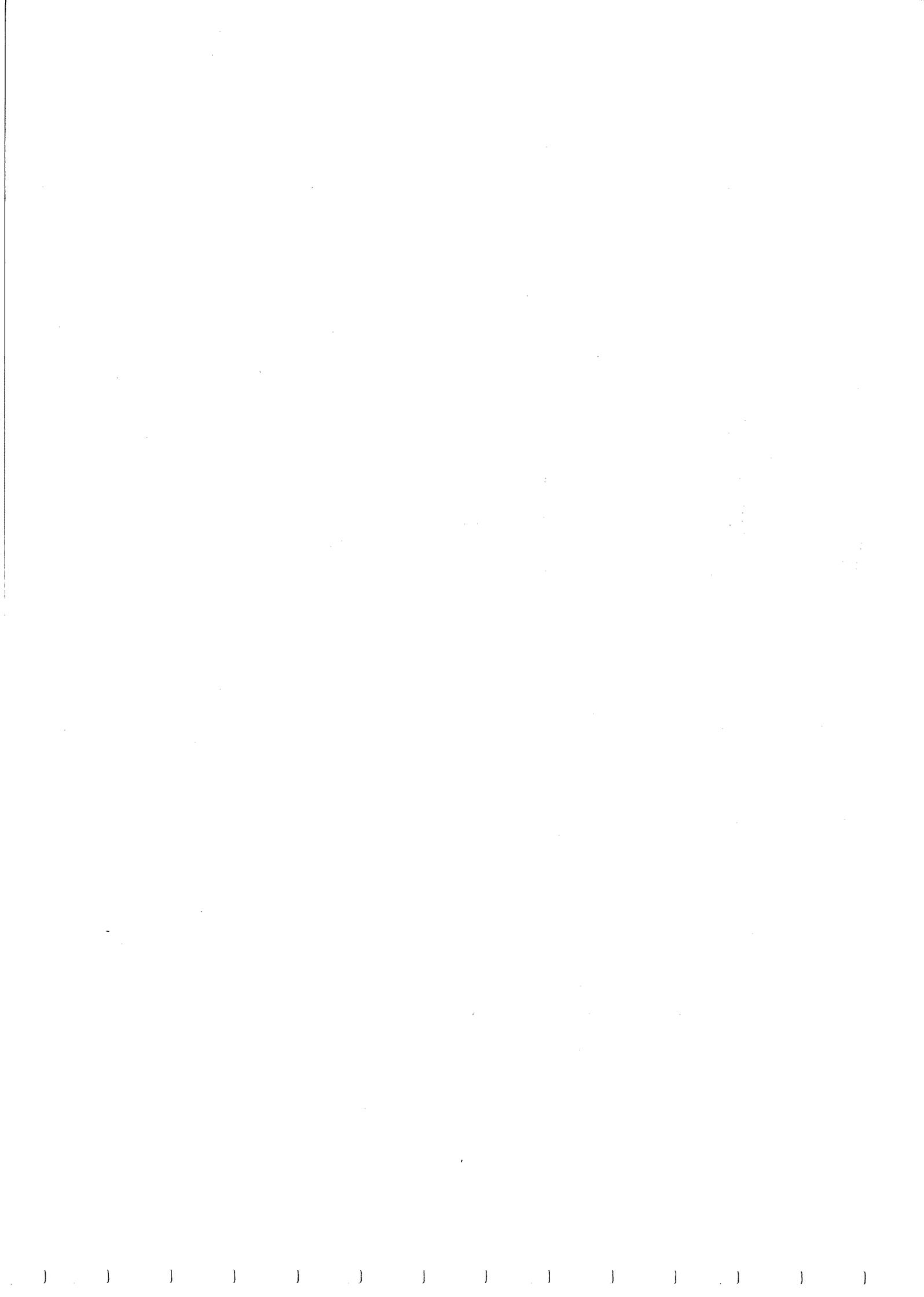
dalla quale si ottengono le due equazioni differenziali in $u_1(x)$, $u_2(x)$ e, imposte le condizioni geometriche $\delta u_{1A} = \delta u_{2B} = 0$ e $\delta u_{1C} = \delta u_{2C} = \gamma$, l'unica condizione meccanica (15).

Se si segue l'approccio variazionale e' necessario

scrivere l'energia potenziale totale:

$$V = \int_0^l ER u'^2 dx - \int_0^l P u dx - f_A u_A - f_B u_B \quad (29)$$

dove i termini al contorno vanno omissi se gli spostamenti sono assegnati. Imponendo la stazionarieta' del funzionale



$$SV = \int_0^l EA u' \delta u' dx - \int_0^l p \delta u dx - f_n \delta u_n - f_B \delta u_B = 0 \quad (30)$$

si riottiene l'equazione dei lavori virtuali (23) e l'analisi segue quella già illustrata.

3.3 Metodo delle forze

Come già detto nel paragrafo 1.9 il metodo è applicabile ai soli sistemi iperstatici. Si farà pertanto riferimento ad un'asta vincolata ad entrambi gli estremi.

3.3.1 Formulazione diretta

L'equazione di equilibrio (24) ammette ∞ soluzioni in quanto non sono presenti condizioni al contorno su $\partial \mathcal{F}$. Integrando l'equazione tra limiti definiti si ha:

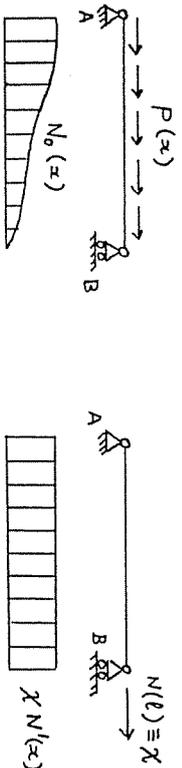
$$N(x) = - \int_0^x P(x) dx + N(0) \quad (31)$$

dove $N(0)$ è arbitrario. La (31) è del tipo (1.15), in cui (++)

$$S_0 = \int_0^l P(x) dx, \quad S \equiv 1, \quad \chi \equiv N(0) \quad (32)$$

(+) Qui però χ è una costante ed S un operatore algebrico, come già detto nel paragrafo 1.9.

La tensione $N(x)$ è pertanto somma di una soluzione particolare del problema non omogeneo (fig.10a) e della soluzione generale $S\chi = N(0)$ del problema omogeneo (fig.10b).



Il sistema principale è ottenuto da quello effettivo sopprimendo il vincolo in B; $N(0)$ assume il significato di incognita iperstatica ed $S(\chi)$ è una funzione che rappresenta la tensione in x corrispondente ad un valore unitario dell'incognita iperstatica. Con le posizioni $N_0(x) = S_0(x)$, $N'(x) = S(\chi)$, $\chi \equiv N(0)$ si ha perciò:

$$N(x) = N_0(x) + \chi N'(x) \quad (33)$$

Allo stato di tensione (33) corrisponde lo stato di deformazione

$$E(x) = \frac{N_0(x)}{EA} + \chi \frac{N'(x)}{EA} \quad (34)$$

in generale non congruente. Per determinare χ è necessario imporre una condizione (esplicita) di congruenza come di seguito illustrato.

Si supponga per generalità che in A e B siano assegnati i cedimenti vincolari

$$u(0) = \bar{u}_A, \quad u(l) = \bar{u}_B \quad (35)$$

Il problema cinematico (1) in generale non ammette soluzione. Infatti la sua soluzione e'

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx + u(0) \quad (36)$$

La condizione (35₁) implica $u(0) = \bar{u}_A$; la condizione (35₂) in generale non e' soddisfatta a meno che non sia

$$\int_0^l \varepsilon(x) dx = \bar{u}_B - \bar{u}_A \quad (37)$$

che esprime il fatto che l'allungamento totale dell'asta deve essere uguale alla differenza tra i cedimenti vincolari. La (37) costituisce l'equazione di congruenza cercata.

Un metodo alternativo per ricavarla e' quello di utilizzare la formula generale dello spostamento (TLV). Considerando come sistema di forze virtuali una forza unitaria applicata in B in equilibrio con le tensioni $\varepsilon'(x) \equiv N'(x)$ e come campo di spostamenti e deformazioni quello effettivo si ha:

$$1 \cdot u_B + f'_A \bar{u}_A = \int_0^l N'(x) \varepsilon(x) dx \quad (38)$$

in cui $f'_A = -1$ e' la reazione vincolare dovuta alla forza virtuale unitaria. Ricavando u_B dalla (38) ed imponendo che sia uguale a \bar{u}_B (condizione di congruenza) si ottiene

$$\int_0^l N'(x) \varepsilon(x) dx = \bar{u}_B - \bar{u}_A \quad (39)$$

cioe' la (37), essendo $N'(x) = 1$.

Si noti che la condizione di congruenza appare in forma integrale. Cio' e' in accordo con quanto detto nel paragrafo 1.9 circa i sistemi localmente isostatici. L'equazione (39) puo' essere ottenuta direttamente dalla (1.44) ricordando che $\delta(x) = 1$, $N = \pm 1$ e che $\delta \mathcal{A}u$ si riduce ai due punti di estremita' A e B.

Tornando alla soluzione del problema, l'incognita iperstatica X si determina sostituendo la (34) nella equazione di congruenza che scriveremo nella forma (39) (per mantenere un'analogia formale con problemi piu' complessi in cui $N'(x) \neq 1$) (+):

$$\int_0^l N_0 N' \frac{dx}{EA} + X \int_0^l N'^2 \frac{dx}{EA} = \bar{u}_B - \bar{u}_A$$

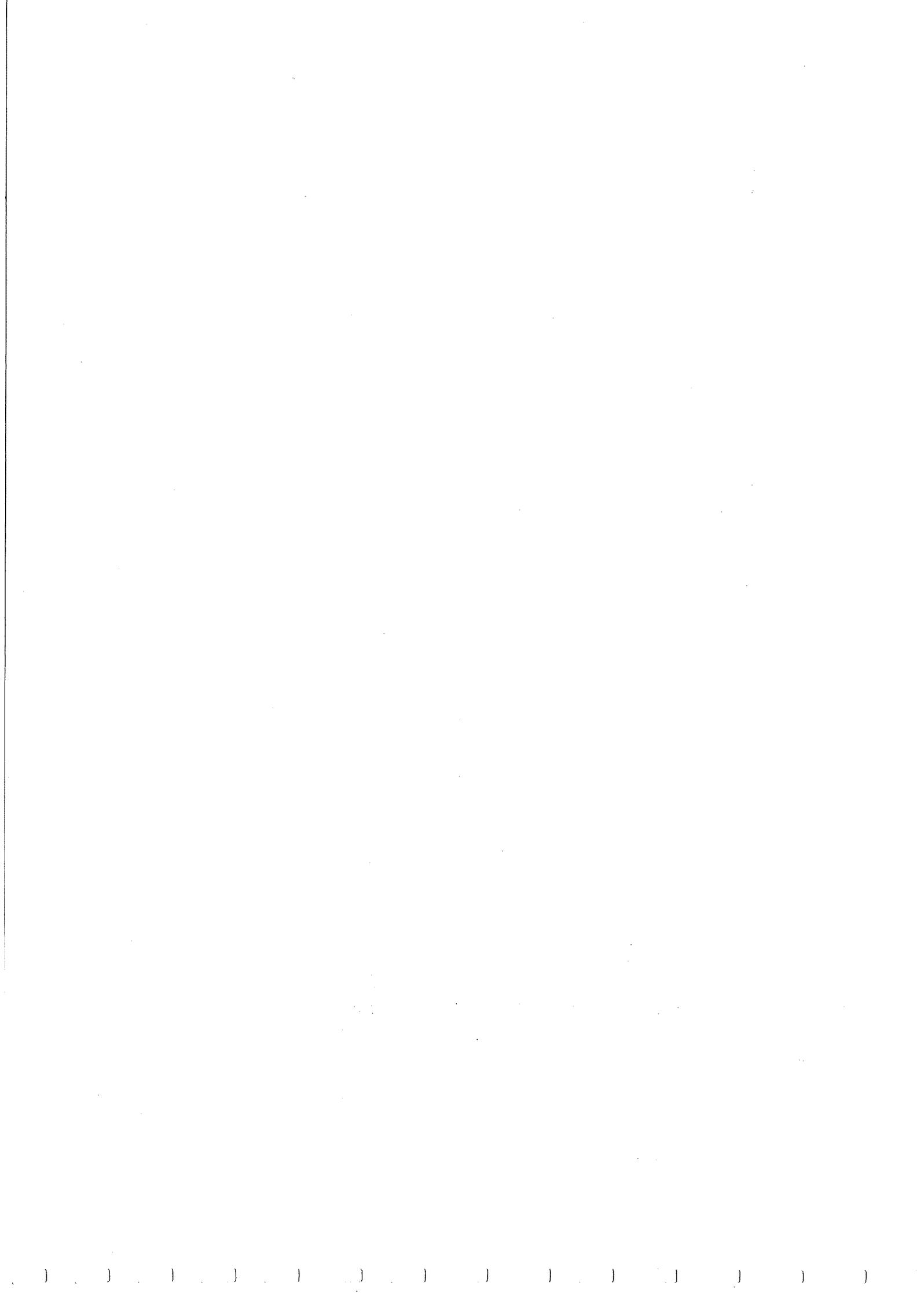
Dalla (40) si ricava X che sostituita nella (33) fornisce $N(x)$ e nella (34) $\varepsilon(x)$; il campo di spostamenti e' dato dalla (36).

A titolo di esempio si consideri il problema in fig. 9, gia' risolto con il metodo degli spostamenti. Lo stato di tensione (soluzione particolare, fig. 10a) e' dato da:

$$N_0(x) = \begin{cases} F_c & 0 \leq x < a \\ 0 & a \leq x \leq 3a \end{cases} \quad (41)$$

E' inoltre $N'(x) = 1$, $\bar{u}_A = \bar{u}_B = 0$. La (40) si scrive:

(+) Naturalmente la (40) poteva essere ricavata direttamente dalla (1.41') ponendo $\delta = N'$, $C = EA$, $\mathcal{A} = N_0$, $[N] = [x]j$.



$$\frac{f_c a}{EA} + \chi \frac{3a}{EA} = 0 \quad (42)$$

e fornisce il valore dell'incognita iperstatica

$$\chi = N(0) = -\frac{1}{3} f_c \quad (43)$$

che coincide con quello dato dalla (202). Lo stato di tensione (33) e' perciò:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} f_c & 0 \leq x < a \\ -\frac{1}{3} f_c & a < x \leq 3a \end{cases} \quad (44)$$

come gia' trovato (eq.(19)). Infine il campo di spostamenti (36) e':

$$u(x) = \int_0^x \frac{2}{3} \frac{f_c}{EA} dx = \frac{2}{3} \frac{f_c}{EA} x, \quad 0 \leq x < a \quad (45)$$

$$u(x) = \int_0^a \frac{2}{3} \frac{f_c}{EA} dx + \int_a^x -\frac{1}{3} \frac{f_c}{EA} dx = \frac{f_c}{EA} \left(a - \frac{x}{3} \right), \quad a < x \leq 3a$$

in accordo alle (18).

3.3.2 Formulazioni integrale e variazionale

La formulazione integrale dell'equazione di congruenza in termini di tensione segue il procedimento gia' illustrato nel paragrafo 1.7.2. Il TLV complementare si scrive:

$$\int_0^l \varepsilon \delta N dx = \bar{u}_A \delta F_A + \bar{u}_B \delta F_B \quad (46)$$

dove, per le condizioni di equilibrio e' $\delta N = N' \delta X$,
 $\delta F_A = -\delta N(0) = -\delta X$, $\delta F_B = \delta N(0) = \delta X$; la deformazione ε e' inoltre data dalla (34). Si ha pertanto:

$$\int_0^l \left(\frac{N_0}{EA} + \chi \frac{N'}{EA} \right) N' dx + (\bar{u}_A - \bar{u}_B) \delta X = 0, \quad \forall \delta X \quad (47)$$

da cui la (40).

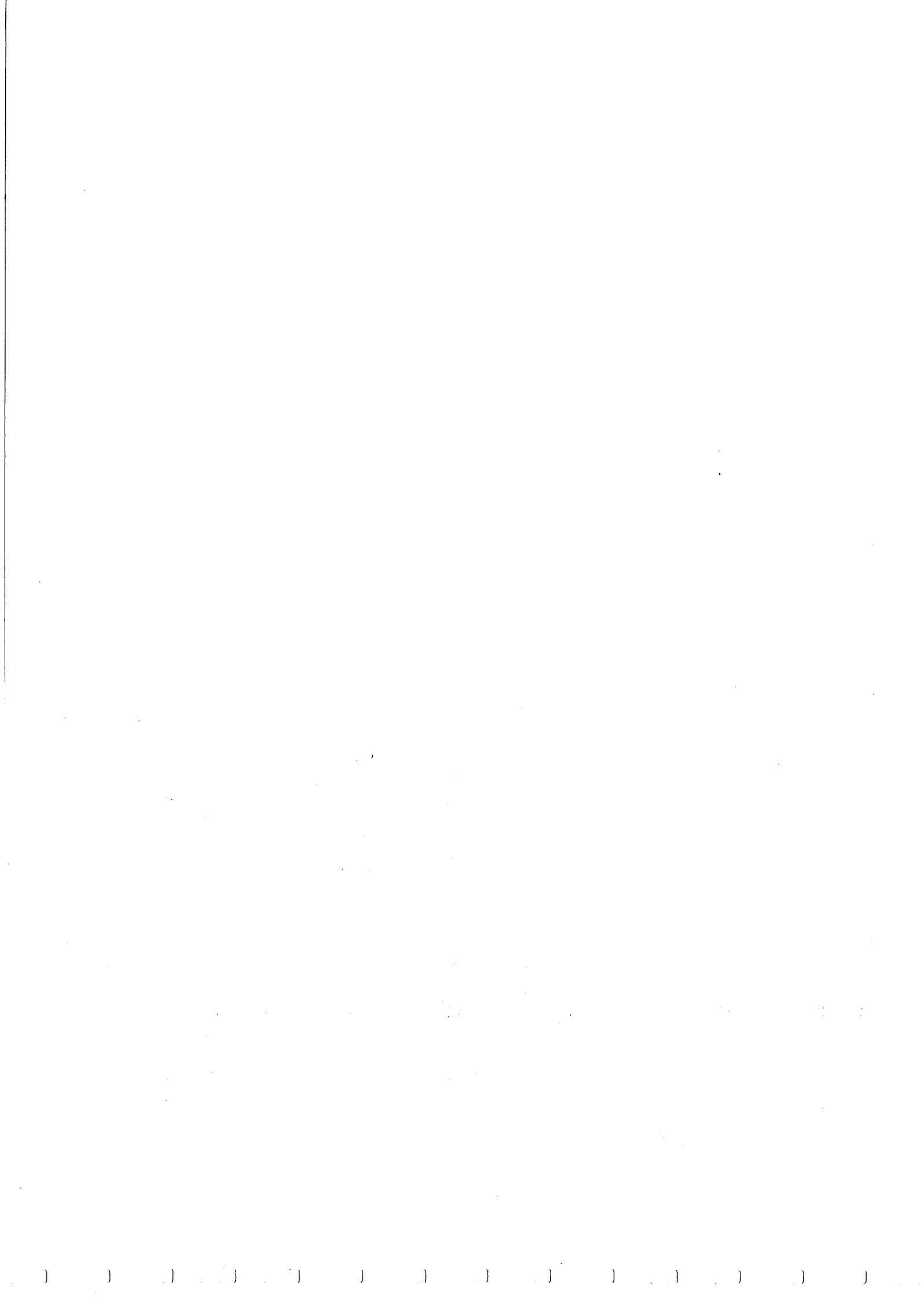
L'energia complementare totale si scrive:

$$\begin{aligned} V_L(\chi) &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N'^2}{EA} dx - f_A \bar{u}_A - f_B \bar{u}_B = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (N_0 + \chi N')^2 \frac{dx}{EA} + \chi (\bar{u}_A - \bar{u}_B) \end{aligned} \quad (48)$$

avendo espresso N , f_A ed f_B in funzione dell'incognita iperstatica χ . Imponendo che sia

$$\delta V_L(\chi) = \frac{\partial V_L}{\partial \chi} \delta X = 0, \quad \forall \delta X \quad (49)$$

si riottiene la (47).



4. CONTINUO BIDIMENSIONALE: LASTRA PIANA

4.1 Equazioni fondamentali

Si consideri una lastra piana che occupa, nella configurazione indeformata, un dominio \mathcal{D} del piano x, y ; siano $b_x(x, y)$ e $b_y(x, y)$ le forze di volume agenti in \mathcal{D} ; $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ le forze di superficie applicate su $\partial\mathcal{D}_f$; $\bar{u}(x, y)$, $\bar{v}(x, y)$ gli spostamenti assegnati su $\partial\mathcal{D}_u$ (fig. 11).

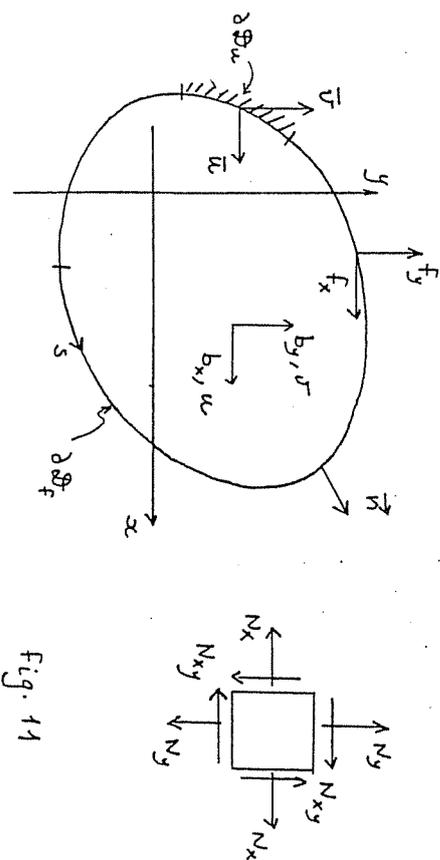


Fig. 11

Le equazioni fondamentali del problema elastico si deducono da quelle relative al continuo tridimensionale particularizzandolo al caso in esame.

a) Problema cinematico

Le variabili di configurazione sono rappresentate dalle funzioni spostamento $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$u = \begin{Bmatrix} u & v \end{Bmatrix}^T$$

Il campo di deformazione e' misurato dalle dilatazioni specifiche $\epsilon_x(x, y)$, $\epsilon_y(x, y)$ e dallo scorrimento angolare $\delta_{xy}(x, y)$:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \delta_{xy} \end{Bmatrix}^T$$

Le equazioni implicite di congruenza sono:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \delta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (1)$$

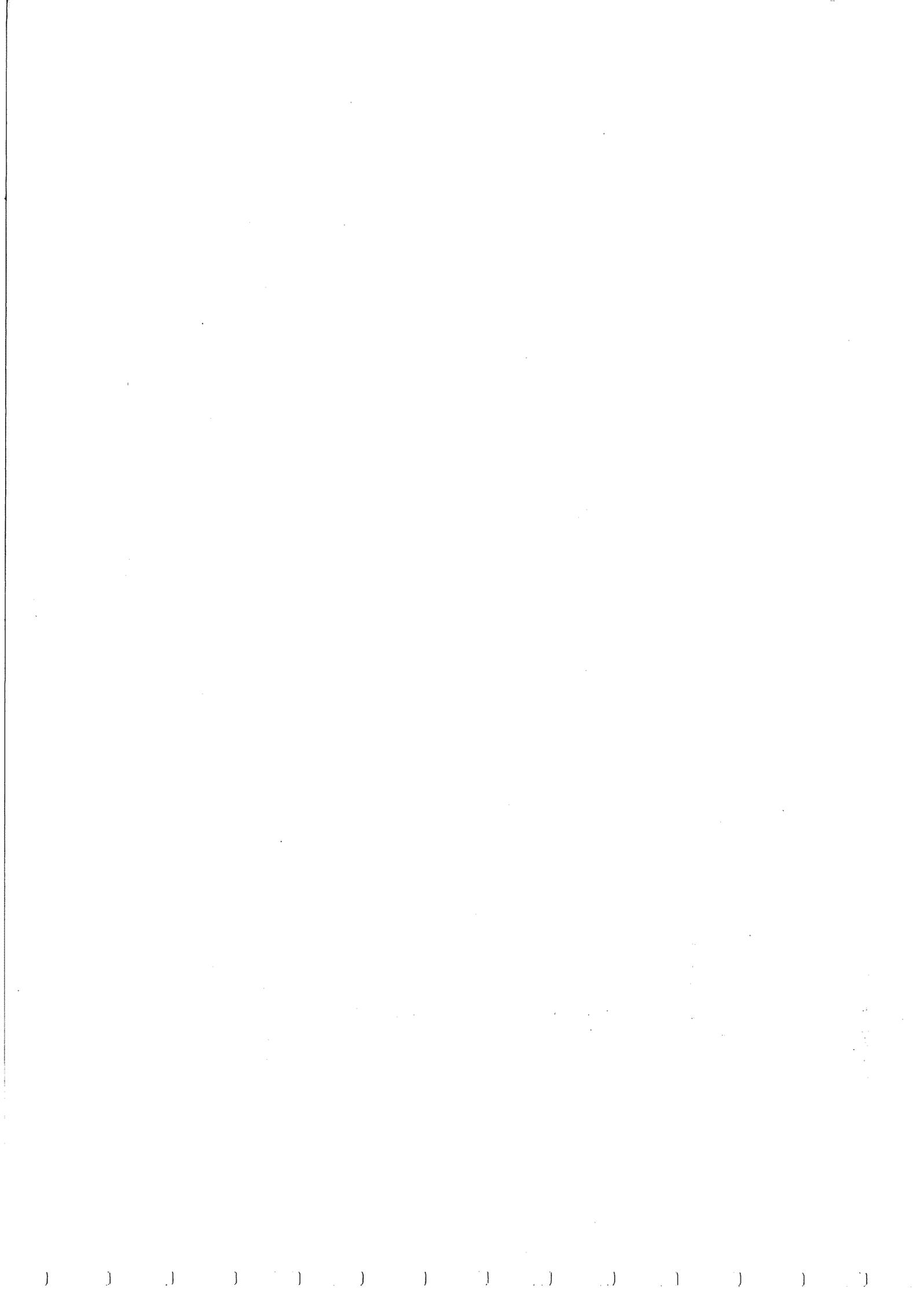
e definiscono l'operatore cinematico:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Al contorno deve essere:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad \text{su } \partial\mathcal{D}_u \quad (3)$$

Le equazioni implicite di congruenza costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali nelle due funzioni spostamento. Assegnato ad arbitrio il campo di deformazioni



non e' possibile in generale determinare un campo di spostamento regolare che le soddisfi. Il continuo bidimensionale e' pertanto cinematicamente impossibile, a prescindere dalle condizioni di vincolo eventualmente presenti sulla frontiera.

La condizione di integrabilita' delle equazioni costituisce l'equazione esplicita di congruenza del problema:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \delta_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

che, posta nella forma (1.14'), definisce l'operatore differenziale

$$S^* = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] \quad (5)$$

Se sul contorno sono imposte condizioni sugli spostamenti, le deformazioni devono soddisfare delle condizioni supplementari che non vengono qui esaminate.

b) Problema statico

Lo stato di sollecitazione e' descritto dagli sforzi (fig.11) [FL-1]

$$\sigma = \begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{Bmatrix}$$

Le condizioni di equilibrio alla traslazione si scrivono (quella di equilibrio alla rotazione e' identicamente soddisfatta):

Le (6) definiscono l'operatore d'equilibrio come aggiunto di quello cinematico:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (6)$$

$$D^* = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \quad (7)$$

Il problema di equilibrio (6) e' governato da due equazioni nelle tre funzioni incognite N_x , N_y , N_{xy} : il continuo bidimensionale e' percio' staticamente indeterminato, indipendentemente dalle condizioni al contorno.

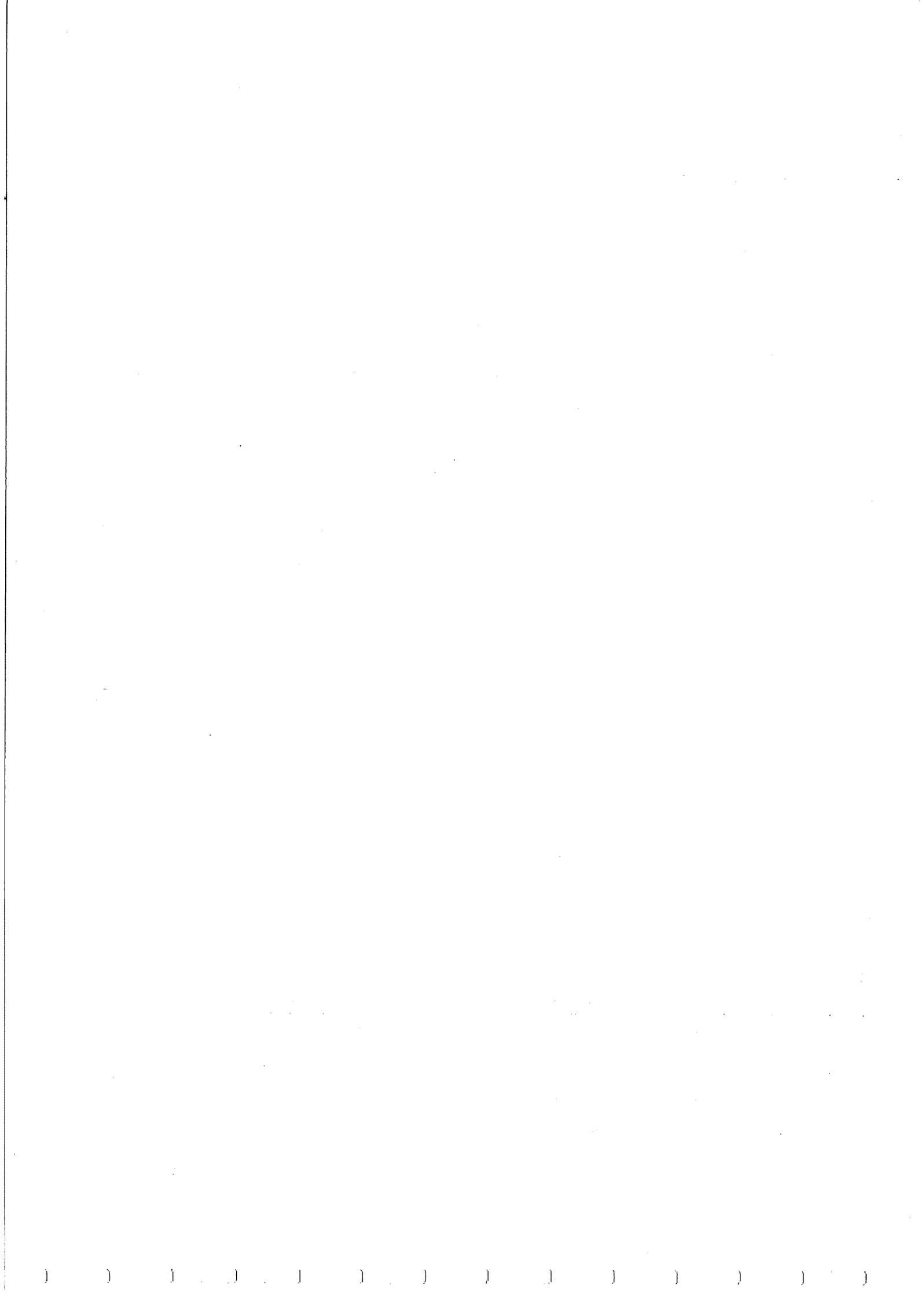
Le condizioni di equilibrio su $\partial \mathcal{D}_f$ si scrivono (teorema di Cauchy):

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (8)$$

dove n_x , n_y sono i coseni direttori della normale uscente. La (8) definisce l'operatore algebrico N.

c) Legame costitutivo

Il legame sforzi-deformazioni puo' essere dedotto dal modello di continuo tridimensionale. Assumendo che la lastra



sia di spessore sottile h , si può ritenere che $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ in tutto il corpo, e che $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ siano funzioni solo di x ed y , cioè che la lastra sia sottoposta ad uno stato piano di tensione (+). In tal caso, dalla legge di Hooke, si ha:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

dove E e' il modulo elastico e ν il fattore di Poisson.

Invertendo il legame si ottiene l'operatore elastico:

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

(+) Nella Teoria dell'Elasticita' si dimostra che lo stato piano di tensione sussiste rigorosamente solo per particolari distribuzioni di forze di volume e di superficie. Tuttavia, le equazioni del continuo elastico possono essere soddisfatte in media se si fa riferimento a tensioni generalizzate, definite come tensioni medie sullo spessore. Ad esempio:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz$$

Conseguentemente e'

$$N_x = \bar{\sigma}_x h$$

4.2 Metodo degli spostamenti

4.2.1 Formulazione diretta

Sostituendo le equazioni di compatibilita' cinematica (1) nel legame costitutivo si ottiene la relazione sforzo-spostamento, $\sigma = CDu$:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ v \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ovvero:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (11')$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Le equazioni di equilibrio (6), in termini di spostamento, si scrivono:

$$-\frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (12)$$



in cui appare l'operatore differenziale di rigidezza (1.20), $L = D^*CD$. Le (12) possono essere poste nella forma equivalente

$$-\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\nabla^2 u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = b_x \quad (13)$$

$$-\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\nabla^2 v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = b_y$$

in cui $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e' l'operatore di Laplace.

Le condizioni al contorno (8), espresse le tensioni tramite le (11'), diventano

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} & n_x \nu \frac{\partial}{\partial y} + n_y \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ n_x \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} + n_y \nu \frac{\partial}{\partial y} & n_x \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ovvero

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y = f_x \quad (15)$$

$$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_y = f_y$$

Le (13) definiscono l'operatore di rigidezza al contorno (1.20) $B = NCD$.

Le equazioni differenziali (13) sono dette equazioni di Navier. Insieme alle condizioni meccaniche (15) e a quelle

geometriche (3) costituiscono la formulazione del problema elastico della lastra in termini di spostamento.

4.2.2 Formulazioni integrale e variazionale

L'equazione dei lavori virtuali (1.4), nel caso in esame, si scrive:

$$\int_{\mathcal{D}} (N_x \delta \epsilon_x + N_y \delta \epsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy = \int_{\mathcal{D}} (b_x \delta u + b_y \delta v) dx dy + \int_{\partial \mathcal{D}_f} (f_x \delta u + f_y \delta v) ds \quad (16)$$

dove S e' un'ascissa curvilinea definita su $\partial \mathcal{D}$. Esprimendo gli sforzi in funzione degli spostamenti tramite le (11) e le deformazioni virtuali in funzione degli spostamenti virtuali tramite le equazioni di compatibilita' (1) si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{\mathcal{D}} \{ (u_{,x} + \nu v_{,y}) \delta u_{,x} + (v_{,y} + \nu u_{,x}) \delta v_{,y} + \\ & + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y} + v_{,x}) (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) \} dx dy = \\ & = \int_{\mathcal{D}} (b_x \delta u + b_y \delta v) dx dy + \int_{\partial \mathcal{D}_f} (f_x \delta u + f_y \delta v) ds \quad (17) \end{aligned}$$

dove la virgola indica derivazione rispetto alla variabile che segue. Integrando per parti la (17) si ottiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{\mathcal{S}} \left\{ [u_{,xx} + \nu u_{,xy} + \frac{1-\nu^2}{2} (u_{,yy} + v_{,xy})] \delta u + \right. \\
& \left. + [v_{,yy} + \nu u_{,xy} + \frac{1-\nu^2}{2} (u_{,xy} + v_{,xx})] \delta v \right\} dx dy + \\
& + \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{\partial\mathcal{S}} \left\{ [(u_{,x} + \nu v_{,y}) n_x + \frac{1-\nu^2}{2} (u_{,y} + v_{,x}) n_y] \delta u + \right. \\
& \left. + [(v_{,y} + \nu u_{,x}) n_y + \frac{1-\nu^2}{2} (u_{,y} + v_{,x}) n_x] \delta v \right\} ds = \\
& = \int_{\mathcal{S}} (b_x \delta u + b_y \delta v) dx dy + \int_{\partial\mathcal{S}} (f_x \delta u + f_y \delta v) ds \quad (18)
\end{aligned}$$

Imponendo che la (18) sia soddisfatta per ogni δu , δv cinematicamente ammissibile si ottengono le equazioni (13) e le condizioni al contorno (15), valide su $\partial\mathcal{S}$. La (18) costituisce la formulazione integrale del problema della lastra.

Se si segue la formulazione variazionale e' necessario scrivere l'energia potenziale totale (1.12) che nel caso in esame risulta:

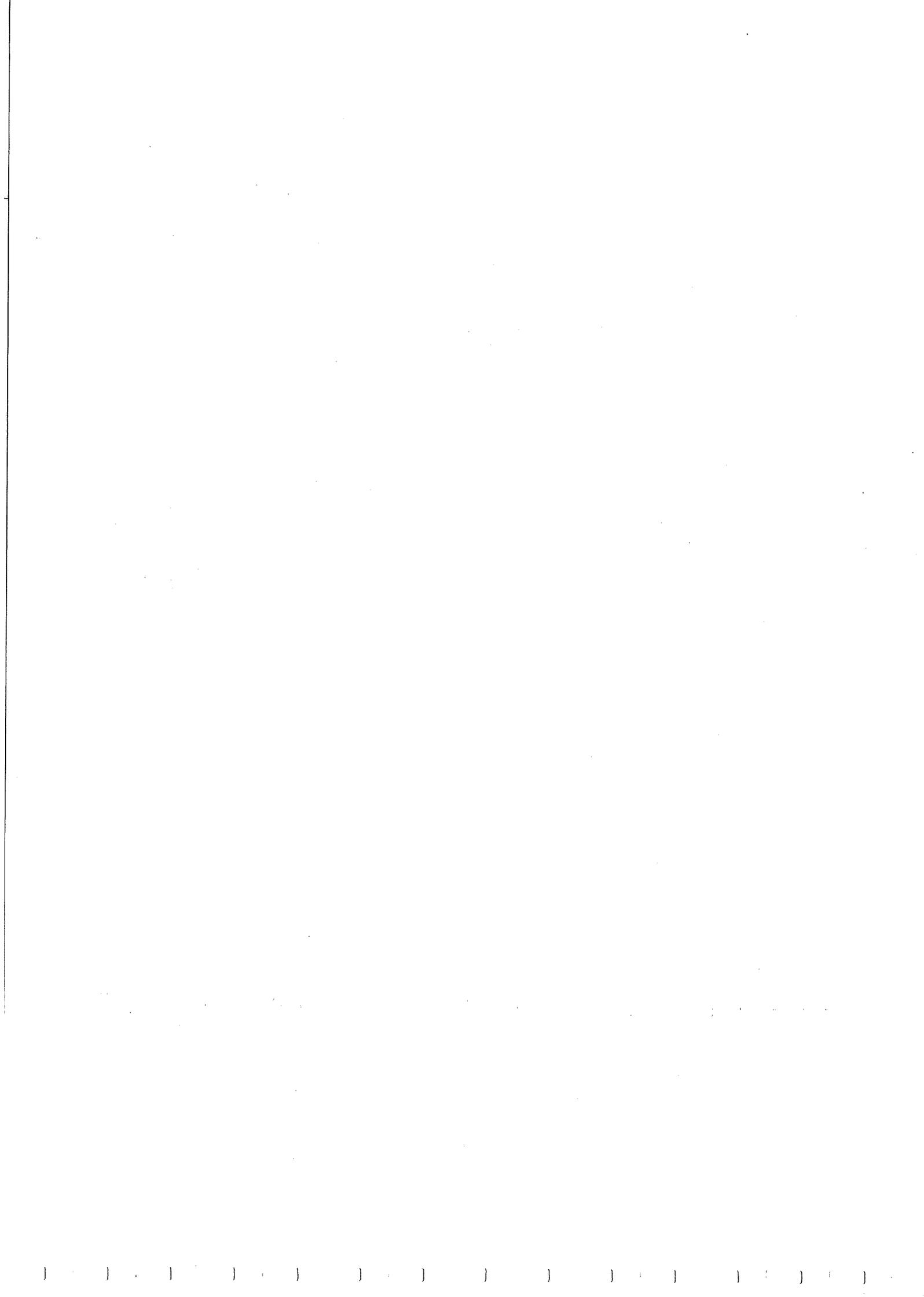
$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{\mathcal{S}} [(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y) + \frac{1-\nu^2}{2} \gamma_{xy}^2] dx dy + \\
& - \int_{\partial\mathcal{S}} (b_x u + b_y v) ds - \int_{\partial\mathcal{S}} (f_x u + f_y v) ds \quad (19)
\end{aligned}$$

Esprimendo le deformazioni in funzione degli spostamenti ed imponendo la condizione di stazionarieta' $\delta V = 0$ si riottiene la (18), da cui le equazioni di Navier con le condizioni al contorno.

4.2.3 Metodi di soluzione. Principio di De Saint Venant

Le equazioni di Navier (13) costituiscono un sistema differenziale alle derivate parziali molto difficilmente integrabile, anche se la geometria e il carico sono abbastanza regolari. Nella maggior parte dei casi risulta pertanto necessario risolvere il problema ricorrendo a metodi numerici, o comunque approssimati. Tra questi il metodo delle differenze finite, trattato nei corsi di Analisi Numerica, e il metodo degli elementi finiti, di cui si dara' un cenno in seguito (cap.8).

In questa sede si vogliono brevemente illustrare due metodi analitici approssimati basati su sviluppi della soluzione incognita in serie di Taylor e di Fourier. Entrambi i metodi permettono, in casi semplici, di ottenere soluzioni che soddisfano le equazioni differenziali con un certo grado di accuratezza. Difficilmente permettono pero' di soddisfare puntualmente le condizioni al contorno meccaniche che spesso possono essere soddisfatte soltanto in media. Fortunatamente l'esistenza di un importante principio, dovuto a De Saint Venant, assicura validita' a tali soluzioni in punti sufficientemente lontani da quelli di applicazione delle forze. Il principio puo' essere cosi'



formulato: se le forze superficiali agenti su una parte S_0 della superficie S_f sono sostituite da una distribuzione di forze staticamente equivalenti, gli effetti sul campo di tensione nel corpo sono trascurabili in punti la cui distanza da S_0 e' grande in rapporto alla massima dimensione lineare di S_0 . In altre parole la tensione in un punto non dipende dal modo con cui le forze sono distribuite su S_0 ma solo dalle caratteristiche globali della sollecitazione (forza e momento risultanti). Fa eccezione la regione del corpo adiacente a S_0 in cui si risentono gli effetti locali della sollecitazione. Conseguenza del principio di De Saint Venant e' che una distribuzione di forze staticamente equivalenti a zero (autoequilibrata) induce un campo di tensioni che si smorza rapidamente con la distanza. In virt'u' del principio, soluzioni approssimate che soddisfano le condizioni al contorno anche solo in media sono di interesse applicativo anche in relazione all'incertezza su come sono effettivamente applicati i carichi e realizzati i vincoli nelle applicazioni tecniche.

a) Sviluppo in serie di potenze

La soluzione delle (13) e' posta nella forma di serie di potenze delle variabili indipendenti:

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j \quad (20)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} x^i y^j$$

in cui a_{ij} e b_{ij} sono incogniti. Sviluppando anche le forze di volume in serie si ha:

$$b_x = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^{(x)} x^i y^j \quad (21)$$

$$b_y = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^{(y)} x^i y^j$$

dove $B_{ij}^{(x)}$ e $B_{ij}^{(y)}$ sono noti. Sostituendo le (20) e (21) nelle (12) si ottiene:

$$\sum_i \sum_j [a_{ij} \left(\frac{2}{1-\nu} x^{i-2} y^{j-2} + x^i y^{j-2} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} b_{ij} x^{i-1} y^{j-1} - B_{ij}^{(x)} x^i y^j] = 0 \quad (22)$$

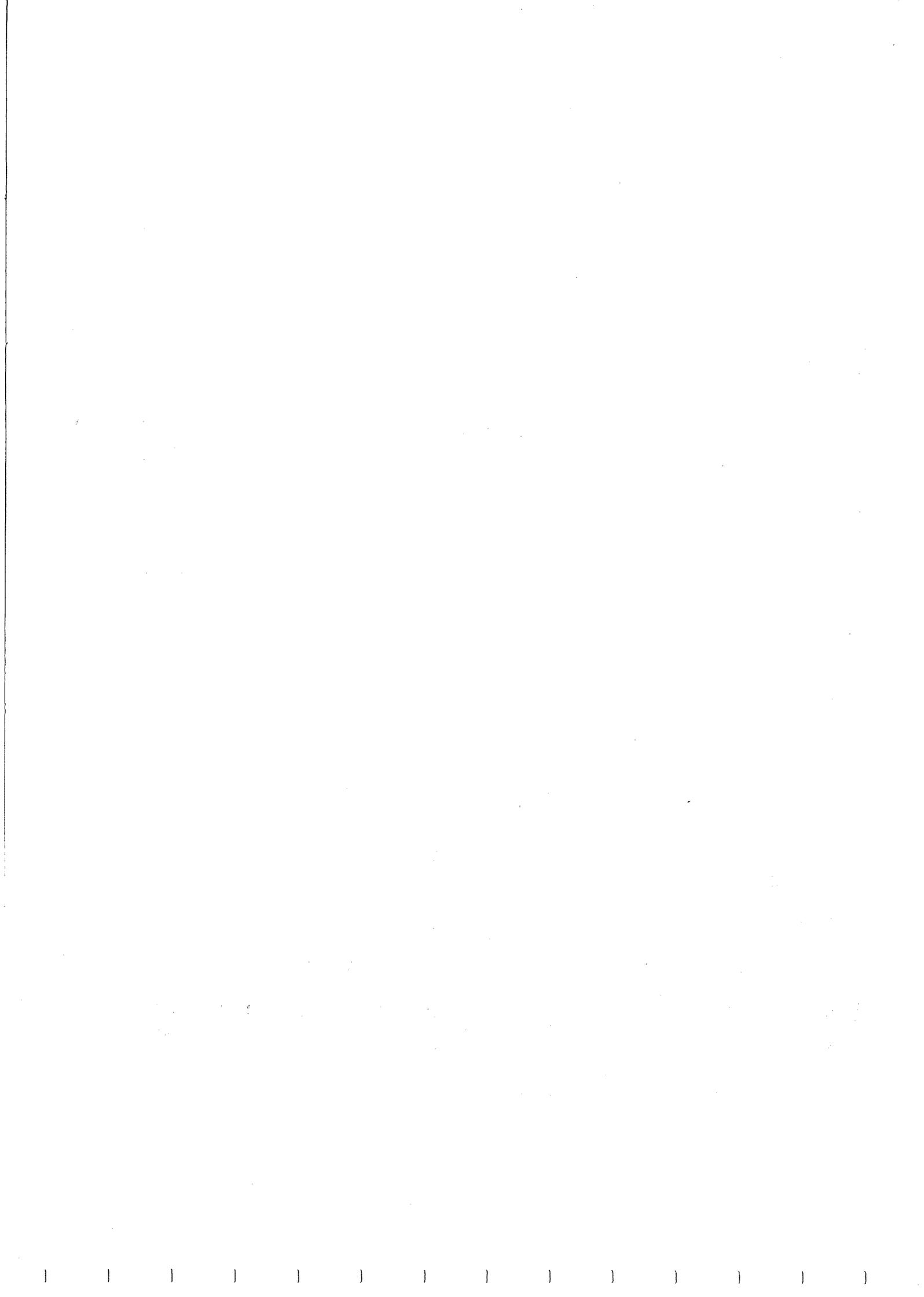
$$\sum_i \sum_j [b_{ij} \left(\frac{2}{1-\nu} x^i y^{j-2} + x^{i+2} y^j \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} a_{ij} x^{i+1} y^{j-1} - B_{ij}^{(y)} x^i y^j] = 0$$

Raccogliendo i termini con le stesse potenze e ponendoli separatamente a zero risulta:

$$\frac{2}{1-\nu} a_{i+2, j} + a_{i, j+2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} b_{i+1, j+1} = B_{ij}^{(x)} \quad (23)$$

$$\frac{2}{1-\nu} b_{i, j+2} + b_{i+2, j} + \frac{1+\nu}{1-\nu} a_{i+1, j+1} = B_{ij}^{(y)}$$

Le (23) costituiscono un sistema algebrico nei coefficienti a_{ij} , b_{ij} . Troncato lo sviluppo (20) ai termini di grado m , le (23) lasciano alcuni coefficienti indeterminati la



cui scelta va effettuata tentando di soddisfare (eventualmente in media) le condizioni al contorno. Per far ciò può essere necessario aumentare il grado m del polinomio.

A titolo di esempio si consideri la lastra rettangolare in figura 12, sottoposta all'azione di forze di volume nulle e forze di superficie staticamente equivalenti ad una cop-pia M .

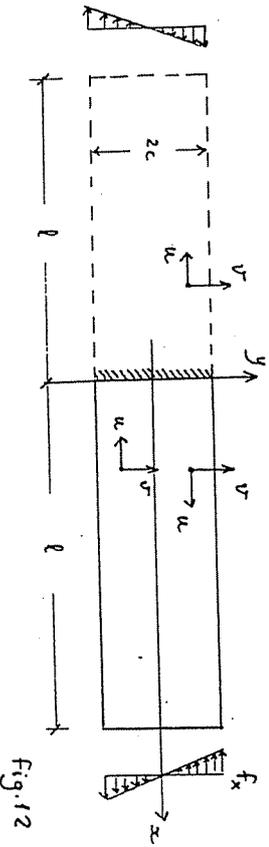


fig.12

Il sistema può essere considerato come la metà di una lastra di lunghezza $2l$ caricata simmetricamente. Ciò suggerisce alcune considerazioni di simmetria, utili per semplificare il problema. La soluzione deve essere simmetrica rispetto all'asse y e antisimmetrica rispetto all'asse x . Deve perciò essere (vedi figura):

$$\begin{aligned} u(-x, y) &= -u(x, y), & u(x, -y) &= -u(x, y) \\ v(-x, y) &= v(x, y), & v(x, -y) &= v(x, y) \end{aligned} \quad (24)$$

cioè u deve essere una funzione dispari e v pari, sia rispetto ad x che ad y . Lo sviluppo in serie (20) si scrive pertanto:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{03}y^3 + a_{30}x^3 + \dots \\ v(x, y) &= b_{02}y^2 + b_{20}x^2 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

dove la serie è stata troncata ai termini del terzo ordine ($m=3$). Sostituendo le (25) nelle equazioni di Navier si ottiene:

$$\frac{12}{1-\nu} a_{30}x + 6a_{03}y = 0 \quad (26)$$

$$\frac{4}{1-\nu} b_{02} + 2b_{20} + \frac{1+\nu}{1-\nu} a_{11} = 0 \quad (26_2)$$

ed eguagliando separatamente a zero i termini con le stesse potenze si ha

$$a_{30} = a_{03} = 0 \quad (27)$$

più la (26₂). Le condizioni al contorno sui lati $y = \pm c$, dove risulta $n_x = 0$, $n_y = \pm 1$, si scrivono

$$[u_y + \nu'x]_{y=\pm c} = 0 \quad (28)$$

$$[v_y + \nu' u_x]_{y=\pm c} = 0$$

ovvero, tenuto conto delle (25) e (27):

$$a_{01} + (a_{11} + 2b_{20})x = 0 \quad (29)$$

$$\nu' a_{10} \pm (2b_{02} + \nu' a_{11})c = 0$$

Dovendo la (29) valere per ogni x deve essere:

$$a_{01} = 0, \quad a_{11} + 2b_{20} = 0 \quad (30)$$

ed inoltre dalla (29₂) si ricava

$$a_{10} = 0, \quad 2b_{02} + \nu' a_{11} = 0 \quad (31)$$

Si noti che con le (30₂) e (31₂) la (26₂) è identicamente soddisfatta.

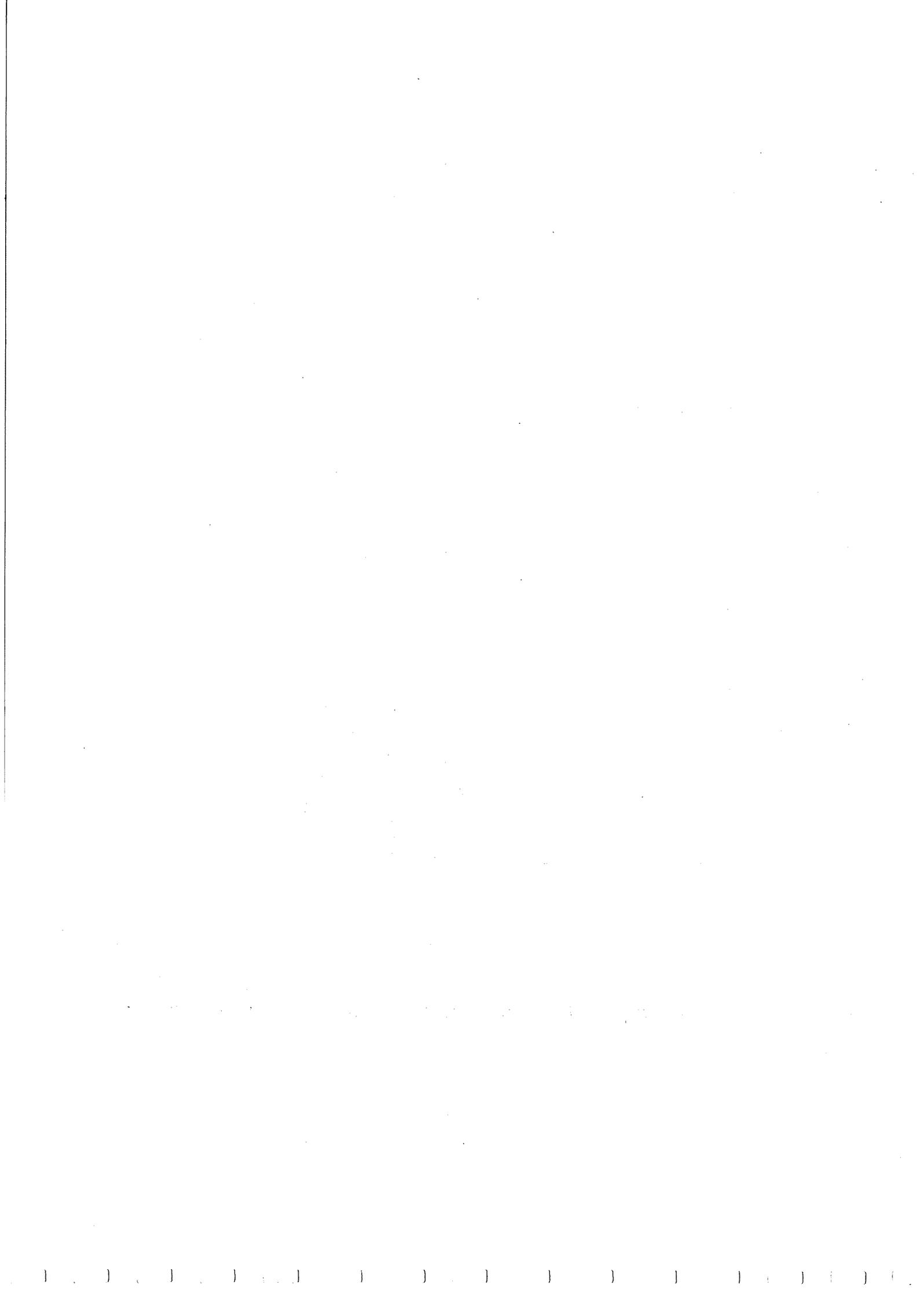
Le condizioni sul lato $x=l$ ($n_x=1$, $n_y=0$) sono:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} [a_{10} + (a_{11} + 2\nu' b_{02})y] = f_x \quad (32)$$

$$(a_{11} + 2b_{20})l = 0$$

dove si è tenuto conto dei risultati acquisiti; la (31₂) è identica alla (30₂); la (31₁) può essere soddisfatta solo se f_x varia con legge lineare, in caso contrario è necessario aumentare il grado del polinomio (25). Assunta per f_x la legge:

$$f_x = -\frac{Mh}{I} y$$



dove $I = (2c)^3 h/12$ e' il momento d'inerzia baricentrico della sezione trasversale della lastra, dalla (51) si ricava:

$$a_{10} = 0, \quad a_{11} + 2\gamma b_{02} = -\frac{M}{I}(1-\gamma^2) \quad (33)$$

Risolviendo il sistema (30₂), (31₂), (33₂) nelle incognite a_{11} , b_{20} , b_{20} , si trova:

$$a_{11} = -\frac{M}{EI}, \quad b_{02} = \frac{\gamma}{2} \frac{M}{EI}, \quad b_{20} = \frac{M}{2EI} \quad (34)$$

Il campo di spostamenti equilibrato risulta pertanto

$$u(x, y) = -\frac{M}{EI} xy \quad (35)$$

$$v(x, y) = \frac{M}{2EI} (x^2 + \gamma y^2)$$

Si noti che in $x=0$ risulta $u=0$, $v \neq 0$. Alle (35) corrisponde, tramite le (11), lo stato di tensione:

$$N_x = -\frac{Mh}{I} y, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (36)$$

cioe' lo stato di flessione pura noto dalla teoria della trave.

In conclusione va osservato che la soluzione del problema elastico (35)-(36) cosi' determinata e' la soluzione esatta solo se il vincolo in $x=0$ consente la dilatazione laterale per effetto Poisson e le forze superficiali in $x=0$ sono distribuite con legge lineare. In caso contrario al campo di tensioni (36) va sommato quello che deriva dall'applicazione di forze superficiali autoequilibrate su ciascun lato della lastra che, per il principio di De Saint Venant, decade rapidamente con la distanza. Se la piastra e' allungata ($l \gg 2c$) la soluzione puo' ritenersi valida praticamente in tutto il dominio.

b) Sviluppo in serie di Fourier

Le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono assunte periodiche in x di periodo $2l$ e sviluppate in serie di Fourier:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [V_{1k}(y) \cos \alpha_k x + V_{2k}(y) \sin \alpha_k x] \\ v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [V_{1k}(y) \sin \alpha_k x + V_{2k}(y) \cos \alpha_k x] \quad (37)$$

dove le funzioni $V(y)$ e $V'(y)$ sono incognite ed inoltre e' $\alpha_k = k\pi/l$. Sostituendo la (37) nelle equazioni (13) ed eguagliando separatamente a zero i termini in $\sin \alpha_k x$, $\cos \alpha_k x$ si ottiene un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite in cui i termini relativi a diverse armoniche sono disaccoppiati. Per la k -esima armonica si ha:

$$V'' - \alpha^2 (1+\gamma) V \pm \xi \alpha V' = 0 \\ (1+\gamma) V'' - \alpha^2 V \mp \xi \alpha V' = 0 \quad (38)$$

in cui $\xi = (1+\gamma)/(1-\gamma)$, $\alpha = \alpha_k$, $V = V_k$, $V' = V'_k$ dove il segno superiore si riferisce alle incognite di indice 1 e il segno inferiore a quello di indice 2. Nelle (38) si e' assunto per semplicita' $b_x = b_y = 0$. In caso contrario anche le forze di volume vanno sviluppate in serie.

Il sistema (38) e' costituito da equazioni differenziali ordinarie. Posta la soluzione del tipo:

$$V(y) = a e^{\lambda y} \\ V(y) = b e^{\lambda y} \quad (39)$$

dalle (38) si ricava:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \alpha^2(1+\gamma) & \pm \xi \alpha \lambda \\ \mp \xi \alpha \lambda & \lambda^2 - \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Imponendo che la (40) ammetta soluzione non banale si ottiene l'equazione caratteristica in λ :



$$\lambda^4 - 2\lambda^2\alpha^2 + \alpha^4 = 0 \quad (41)$$

che fornisce le quattro radici

$$\lambda_{1,2} = \alpha, \quad \lambda_{3,4} = -\alpha \quad (42)$$

Corrispondentemente dal sistema (40) si ha

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{1,2} = \pm 1, \quad \left(\frac{B}{B}\right)_{3,4} = \mp 1 \quad (43)$$

La soluzione generale delle (38) e' percio':

$$V(y) = \pm (c_1^{(j)} e^{\alpha y} - c_2^{(j)} e^{-\alpha y} + c_3^{(j)} y e^{\alpha y} - c_4^{(j)} y e^{-\alpha y}) \quad (44)$$

$$V(y) = c_1^{(j)} e^{\alpha y} + c_2^{(j)} e^{-\alpha y} + c_3^{(j)} y e^{\alpha y} + c_4^{(j)} y e^{-\alpha y}$$

dove le costanti $c_k^{(j)}$ ($i=1, \dots, 4$, $j=1, 2$ cioè complessivamente otto per ciascuna armonica k) sono arbitrarie e vanno determinate imponendo le condizioni al contorno.

Quale esempio di applicazione si consideri una lastra che occupa il semipiano $y \geq 0$, sulla cui frontiera siano assegnati degli spostamenti (fig. 13).

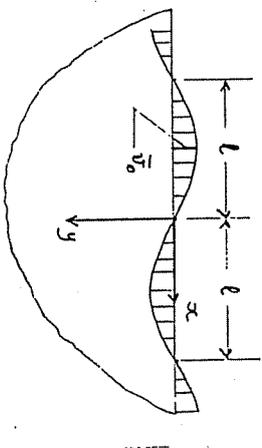


fig. 13

La condizione al contorno geometrica e':

$$v(x, 0) = \bar{v}_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (45)$$

e quella meccanica esprime l'annullamento delle tensioni tangenziali $N_{xy}(x, 0)$:

$$[u_{,y} + v_{,x}]_{y=0} = 0 \quad (46)$$

Stante la periodicità e' sufficiente studiare la soluzione nell'intervallo $-\ell < x \leq \ell$. Posto $\alpha = \pi/\ell$ la soluzione delle equazioni di Navier e'

$$u(x, y) = V(y) \cos \alpha x \quad (47)$$

$$v(x, y) = \bar{V}(y) \sin \alpha x$$

cioe' consta della sola armonica $k=1$, in cui inoltre i termini di indice 2 sono stati posti uguali a zero in virtú della condizione al contorno (45). Le funzioni $V(y)$, $\bar{V}(y)$ sono date dalla (44) dove va assunto il segno superiore. Le quattro costanti arbitrarie vanno determinate con le condizioni (45), (46) alle quali si aggiungono:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0 \quad (48)$$

Stante la (47) deve essere:

$$V(0) = \bar{v}_0, \quad V'(0) + \alpha V(0) = 0 \quad (49)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} V(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{V}(y) = 0$$

Le due condizioni in $y = \infty$ forniscono immediatamente

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0 \quad (50)$$

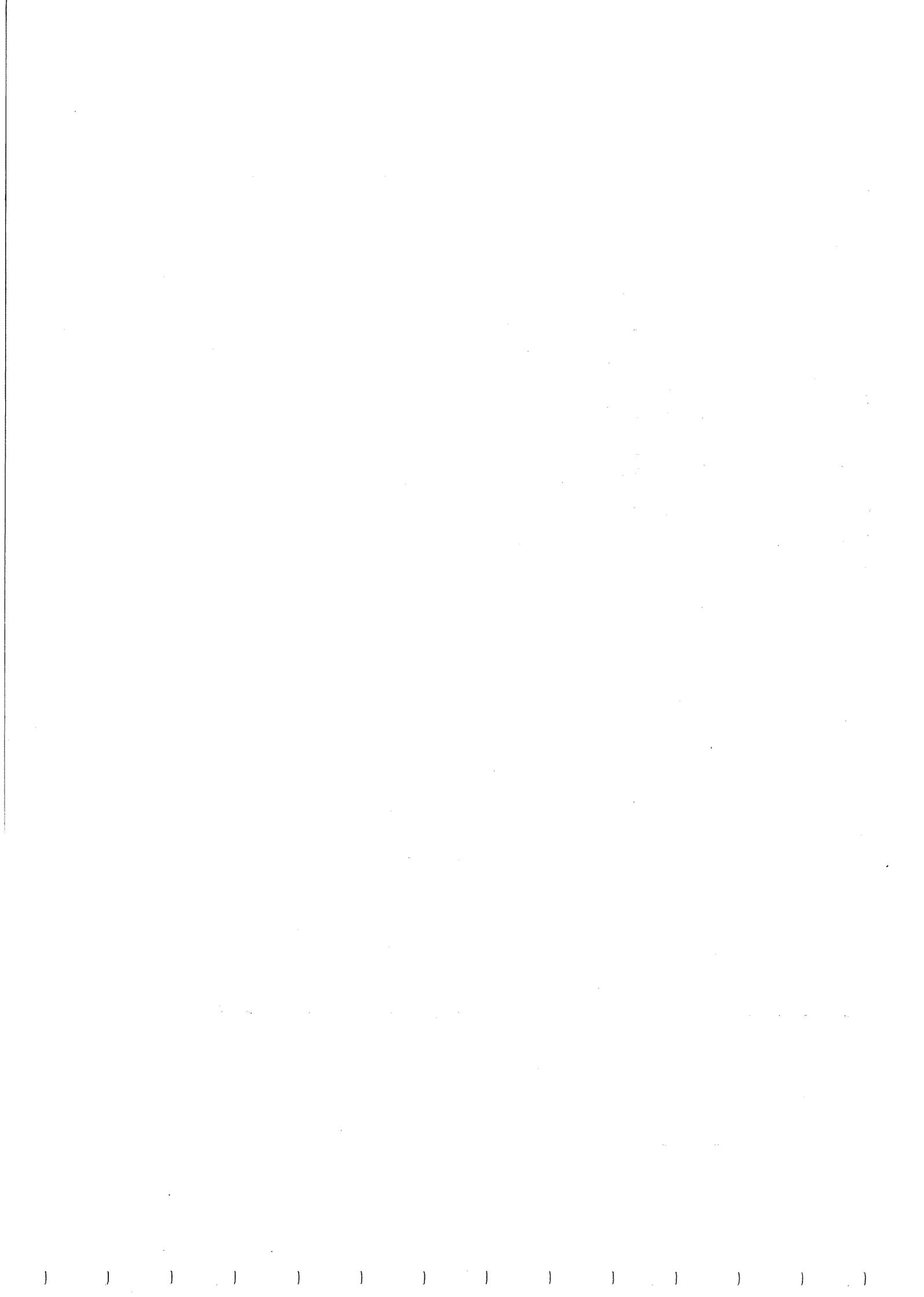
e quelle in $y=0$ danno:

$$c_2 = \bar{v}_0, \quad c_4 = 2\alpha \bar{v}_0 \quad (51)$$

Il campo di spostamenti equilibrato e' pertanto:

$$u(x, y) = -\bar{v}_0 \left(1 + 2\frac{\pi}{l} y\right) e^{-\frac{\pi}{l} y} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (52)$$

$$v(x, y) = \bar{v}_0 \left(1 + 2\frac{\pi}{l} y\right) e^{-\frac{\pi}{l} y} \sin \frac{\pi x}{l}$$



dal quale e' possibile, per derivazione, ricavare lo stato di tensione. In particolare $N_y(x, 0)$ fornisce le forze di trazione e compressione che e' necessario applicare alla lastra per ottenere il campo di spostamenti (52).

La soluzione cosi' determinata e' esatta, in quanto soddisfa esattamente le equazioni di Navier e le condizioni al contorno. Il problema rappresentato in fig.14, invece, non puo' essere risolto esattamente. E' necessario dapprima estendere periodicamente la funzione carico f_y e quindi svilupparla in serie nel periodo $2l$. La soluzione approssimata che si determina sovrapponendo piu' armoniche e' quella relativa al carico esteso; se pero' l e' sufficientemente grande lo stato di tensione nell'intervallo $-l < x < l$ risente poco dell'effetto dei carichi che agiscono esternamente ad esso.

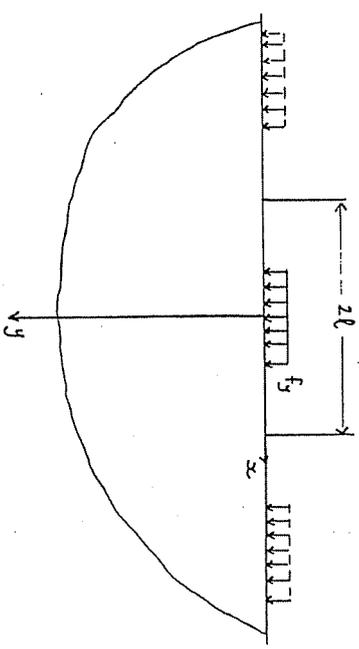


Fig. 14

4.3 Metodo delle forze

4.3.1 Formulazione diretta

Nello spirito del metodo delle forze si determini il generico stato di tensione equilibrato risolvendo le equazioni della statica (6). Facendo riferimento dapprima all'equazione omogenea ($b_x = b_y = 0$) si ottiene la soluzione

$$N_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad (53)$$

dove $\chi(x, y)$ e' una funzione arbitraria di classe C^1 , detta funzione di tensione di Airy. Posta la soluzione nella forma $\sigma_x = S' \chi$, dalle (53) si rileva che l'operatore differenziale

$$S' = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (54)$$

e' l'aggiunto dell'operatore cinematico S^* (5), in accordo alla teoria generale. Allo stato di tensione (53) va sommato un integrale particolare che dipende dalle forze di volume.

Nel caso di forze di gravita' dirette secondo il verso negativo di y e' $b_x = 0$, $b_y = -\rho g$, dove ρ e' la densita' superficiale (di dimensioni fisiche ML^{-2}) e g l'accelerazione di gravita'. Le equazioni della statica sono soddisfatte dalla soluzione particolare

$$N_x^0 = 0, \quad N_y^0 = \rho g y, \quad N_{xy}^0 = 0 \quad (55)$$

Nel seguito si fara' riferimento a forze di volume nulle.

Allo stato di tensione (53) corrisponde lo stato di

deformazione $\epsilon = C^{-1} \sigma$:

$$\begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{ \chi \} \quad (56)$$

ovvero



$$\epsilon_x = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) \quad (56')$$

$$\theta_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

che in generale non e' congruente per una scelta arbitraria di χ . Sostituendo le (56) nell'equazione esplicita di congruenza (4) si ottiene

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} = 0 \quad (57)$$

o anche

$$\nabla^4 \chi = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (57')$$

La funzione di Airy deve pertanto essere una funzione biarmonica. L'operatore di flessibilita' (1.30) e' $F = \nabla^4$.

La funzione incognita deve inoltre soddisfare su $\partial \mathcal{D}_f$ le condizioni meccaniche (8) espresse in termini di χ .

Tenuto conto delle (53) si ha:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{ \chi \} = \begin{cases} f_x \\ f_y \end{cases} \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (58)$$

oppure, dal momento che $n_x = \frac{dy}{ds}$ e $n_y = -\frac{dx}{ds}$,

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ f_y &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (58')$$

Le (58') possono essere integrate lungo il contorno per dare:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = - \int_{\mathcal{D}_f} f_x ds + c_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \int_{\mathcal{D}_f} f_y ds + c_2 \quad (59)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. Calcolando quindi $\partial \chi / \partial s$ dalle (59) e integrando su $\partial \mathcal{D}_f$ si ottiene il valore di χ al contorno a meno di una terza costante arbitraria:

$$\chi = \int_{\partial \mathcal{D}_f} \left(-n_y \frac{\partial \chi}{\partial x} + n_x \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) ds + c_3 \quad (60)$$

La (59), (60) mostrano che $\chi(x, y)$ e' definita a meno di una arbitraria funzione lineare $c_1 x + c_2 y + c_3$ che non influenza la distribuzione delle tensioni (53).

Risolto il problema (57') le (53) forniscono lo stato di tensione, le (56) quello di deformazione. Per determinare il campo di spostamenti e' necessario integrare le equazioni implicite di congruenza (1).

Il metodo delle forze viene generalmente applicato quando le condizioni al contorno sono tutte di tipo meccanico, per la difficolta' di esprimere gli spostamenti in termini di tensioni. Se tuttavia sono presenti condizioni geometriche si puo' determinare la soluzione a meno di



qualche funzione arbitraria, risalire agli spostamenti per integrazione, e determinare le funzioni arbitrarie imponendo il soddisfacimento delle condizioni geometriche.

4.3.2 Formulazione integrale e variazionale

Il teorema dei lavori virtuali complementare si scrive:

$$\int_{\mathcal{B}} (\epsilon_x \delta N_x + \epsilon_y \delta N_y + \delta \gamma_{xy} \delta N_{xy}) dx dy - \int_{\partial \mathcal{B}_u} (\bar{u} \delta f_x + \bar{v} \delta f_y) ds = 0 \quad (61)$$

Esprimendo le tensioni virtuali tramite le (53) e le deformazioni effettive tramite le (56) si ha:

$$\frac{1}{Eh} \int_{\mathcal{B}} [(x_{xyy} - \nu x_{xx}) \delta x_{yy} + (x_{yxx} - \nu x_{yy}) \delta x_{xx} + 2(1+\nu) x_{xy} \delta x_{xy}] dx dy - \int_{\partial \mathcal{B}_u} (\dots) ds = 0 \quad (62)$$

Integrando per parti:

$$\frac{1}{Eh} \int_{\mathcal{B}} \nabla^4 x \delta x dx dy + \int_{\partial \mathcal{B}_u} (\dots) ds = 0, \quad \forall \delta x$$

da cui la (57').

L'energia complementare totale si scrive:

$$V_c = \frac{1}{Eh} \int_{\mathcal{B}} [N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1+\nu) N_{xy}^2] dx dy - \int_{\partial \mathcal{B}_u} (\bar{u} f_x + \bar{v} f_y) ds \quad (63)$$

Introducendo la funzione di Airy ed imponendo che sia $\delta V_c = 0$ si riottiene l'equazione biarmonica.

4.3.3 Metodi di soluzione

Circa i metodi di soluzione dell'equazione biarmonica (57') valgono le considerazioni fatte nel paragrafo 5.2.3 a proposito delle equazioni di Navier. Nel seguito si presentano delle semplici applicazioni del metodo delle serie di Taylor e di Fourier.

a) Sviluppo in serie di potenze

Assunta una soluzione del tipo

$$x(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j \quad (64)$$

in cui i coefficienti a_{ij} sono incogniti (+), l'equazione biarmonica fornisce:

$$\sum_i \sum_j [i(i-1)(i-2)(i-3) a_{ij} x^{i-4} y^j + i j(i-1)(j-1) a_{ij} x^{i-2} y^{j-2} + j(j-1)(j-2)(j-3) a_{ij} x^i y^{j-4}] = 0 \quad (65)$$

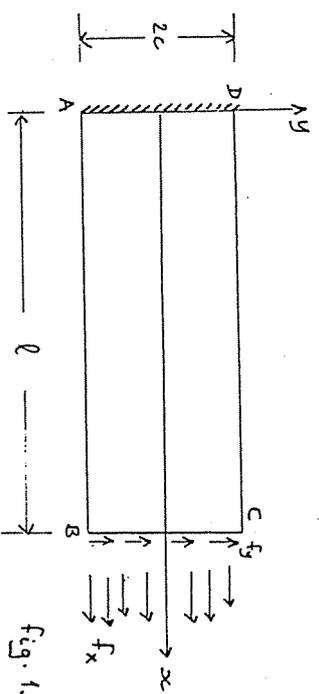
Annullando separatamente i termini con le stesse potenze si ottiene un sistema di equazioni algebriche nei coefficienti.

(+) I coefficienti a_{00} , a_{10} , a_{01} sono arbitrari e possono essere posti uguali a zero.



Troncato lo sviluppo (64) ad un certo grado m , i coefficienti che restano indeterminati possono essere utilizzati per soddisfare le condizioni al contorno.

Alcune soluzioni speciali sono state determinate in letteratura secondo il cosiddetto metodo inverso, che consiste nell'assegnare la funzione di Airy in modo da soddisfare la (57') e nel trovare poi la distribuzione di forze superficiali che soddisfa le condizioni al contorno. Queste soluzioni speciali possono poi essere combinate linearmente per ottenere condizioni di carico più complesse. Con riferimento alla fig. 15 si considerino alcuni casi notevoli.



I polinomi di secondo e terzo grado soddisfano identicamente l'equazione biarmonica. Si assuma allora:

$$\chi(x, y) = \alpha_{02} y^2 \quad (66)$$

Lo stato di tensione e' dato dalle (53):

$$N_x = 2 \alpha_{02} \cos t, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (67)$$

e corrisponde ad uno stato monoassiale uniforme. Le (67) sono soluzione del problema elastico solo se le forze sul contorno BC sono $f_y \neq 0$, $f_x = \cos t$. Se le forze f_x sono staticamente equivalenti ad una forza baricentrica, grazie al principio di De Saint Venant la soluzione (67) puo' essere assunta valida sufficientemente lontano dal contorno CB. Si ottiene la soluzione di trazione o compressione semplice della teoria della trave.

Come secondo esempio si consideri la funzione di Airy

$$\chi(x, y) = \alpha_{11} xy \quad (68)$$

a cui corrisponde lo stato di tensione

$$N_x = 0, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = -\alpha_{11} = \cos t \quad (69)$$

detto di taglio puro. Questa soluzione e' valida solo se le forze superficiali sono uniformemente distribuite tangenzialmente a tutto il contorno, compreso quindi i lati lunghi della lastra.

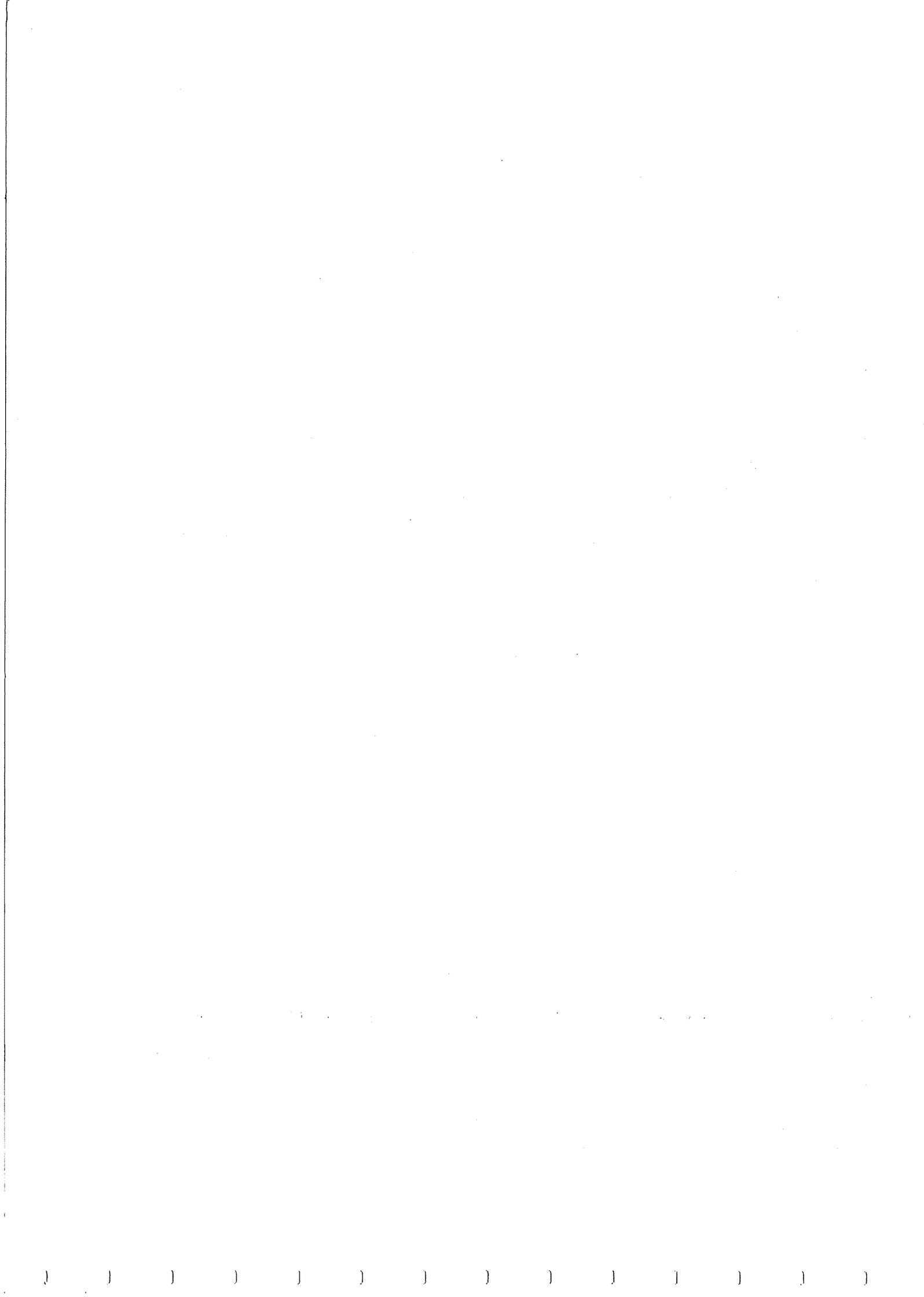
Come terzo caso particolare si assuma

$$\chi(x, y) = \alpha_{03} y^3 \quad (70)$$

e conseguentemente:

$$N_x = 6 \alpha_{03} y, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (71)$$

Lo stato di tensione e' monoassiale ma la tensione cresce linearmente con la distanza dall'asse x (asse neutro). Le tensioni sono equilibrate con forze superficiali f_x appli-



cate a BC distribuite con la legge (32), staticamente equi-
valenti ad una coppia M. Si ritrova lo stato di flessione
semplice della teoria della trave, già incontrato risolvendo le equazioni di Navier.

Si voglia ora risolvere il caso specifico della lastra sottoposta a forze tangenziali f_y applicate al solo contorno BC. Applicando il metodo generale si sviluppi χ come tentativo, sino ai termini di quarto grado. Posti uguali a zero $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{40}$, e lasciati arbitrari i coefficienti dei termini quadratici e cubici, si consideri un polinomio di quarto grado:

$$\chi = \alpha_{40} x^4 + \alpha_{31} x^3 y + \alpha_{22} x^2 y^2 + \alpha_{13} x y^3 + \alpha_{04} y^4 \quad (72)$$

L'equazione biarmonica fornisce un'unica condizione

$$3 \alpha_{40} + \alpha_{22} + 3 \alpha_{04} = 0 \quad (73)$$

Lo stato di tensione e' :

$$N_x = 2 \alpha_{22} x^2 + 6 \alpha_{13} x y + 12 \alpha_{04} y^2$$

$$N_y = 12 \alpha_{40} x^2 + 6 \alpha_{31} x y + 2 \alpha_{22} y^2 \quad (74)$$

$$N_{xy} = -3 \alpha_{31} x^2 - 4 \alpha_{22} x y - 3 \alpha_{13} y^2$$

Le condizioni al contorno sui lati AB e CD richiedono che sia $N_y \equiv 0$, $N_{xy} \equiv 0$, quelle sul lato BC che sia $N_x = 0$, $N_{xy} \neq 0$. La (74) non puo' soddisfare le condizioni richieste. Infatti posto $\alpha_{31} = \alpha_{22} = 0$ resta una tensione costante $N_{xy} = -3 \alpha_{13} c^2$ lungo i lati AB e CD. Sovrapponendo allora allo stato (74) lo stato di taglio puro (69) e' possibile rimuovere queste tensioni scegliendo $\alpha_{41} = -3 \alpha_{13} c^2$. Ponendo poi $\alpha_{40} = \alpha_{31} = \alpha_{22} = 0$ si soddisfa la condizione $N_y = 0$ sui lati lunghi; la (73) fornisce allora $\alpha_{04} = 0$. Per imporre la condizione $N_x = 0$ in $x = \ell$, non potendosi assumere $\alpha_{13} = 0$ (soluzione banale) e' necessario sovrapporre anche lo stato di tensione (67), di flessione semplice, scegliendo $\alpha_{03} = -\alpha_{13} \ell$. In definitiva la funzione di Airy risulta:

$$\chi = [-3c^2 x y + y^3 (x - \ell)] \cdot \alpha_{13} \quad (75)$$

e lo stato di tensione:

$$N_x = 6y (x - \ell) \alpha_{13}, \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = -3(y^2 - c^2) \alpha_{13} \quad (76)$$

Le forze f_y devono perciò essere distribuite con legge parabolica. Posta uguale a T la loro risultante si ha:

$$T = \int_{-c}^{+c} N_{xy} ds = 4 c^3 \alpha_{13} \quad (77)$$

da cui $\alpha_{13} = -T/4c^3$. Lo stato di tensione e' perciò:

$$N_x = -\frac{3}{2} \frac{T}{c^3} (\ell - x) y \quad (78)$$

$$N_y = 0$$

$$N_{xy} = \frac{3}{4} \frac{T}{c^3} (c^2 - y^2)$$

e risulta in accordo con i risultati della teoria della trave (fig. 16): la sollecitazione e' detta di flessione e taglio. La soluzione cosi' determinata e' esatta solo se le forze f_y sono distribuite parabolicamente e il vincolo lungo AD consente gli spostamenti che si ottengono a partire dalle (2.28).

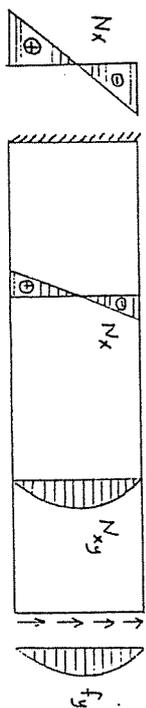
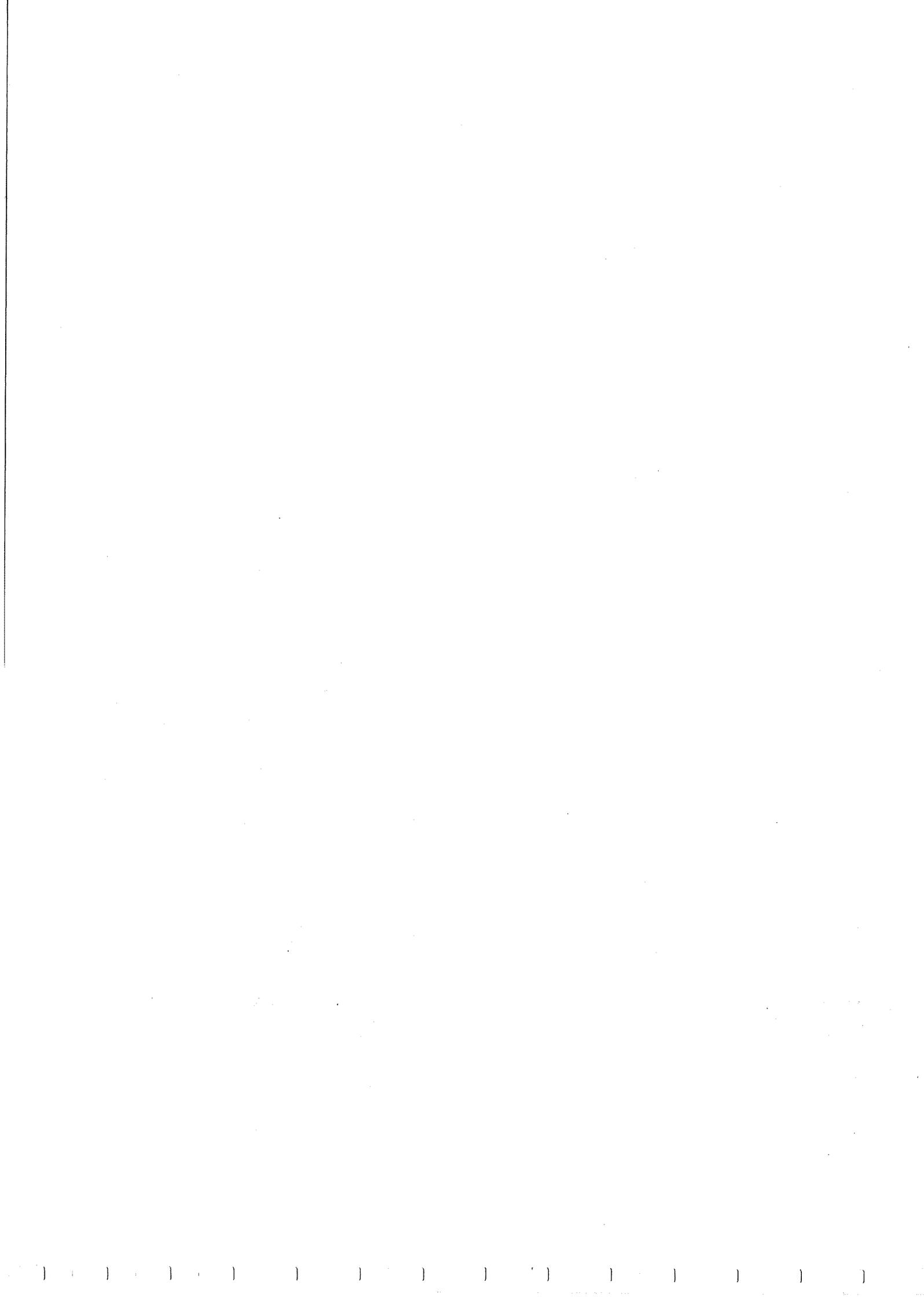


Fig. 16

Quale esempio di applicazione del calcolo degli spostamenti si consideri nuovamente lo stato di flessione semplice (71), coincidente con quello determinato con il metodo degli spostamenti (eq.(36)). Dal legame costitutivo (9), tenuto conto delle equazioni implicite di congruenza (1) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{M}{EI} y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \gamma \frac{M}{EI} y \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$



Integrando le prime due equazioni si ottiene:

$$u = -\frac{H}{EI} xy + f(y) \quad (80)$$

$$v = -\nu \frac{H}{EI} \frac{y^2}{2} + g(x)$$

Sostituendo le (80) nella (79):

$$-\frac{H}{EI} x + g'(x) = -f'(y) \quad (81)$$

Il primo membro della (81) e' funzione della sola x , il secondo della sola y ; i due membri devono perciò essere uguali ad una costante C_4 . Integrando nuovamente si ha:

$$f(y) = -C_4 y + C_2 \quad (82)$$

$$g(x) = \frac{H}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_3$$

Sostituendo infine nella (80) si ottengono gli spostamenti:

$$u = -\frac{H}{EI} xy - C_4 y + C_2 \quad (83)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{H}{EI} (x^2 + \nu y^2) + C_1 x + C_3$$

che coincide con quello prima determinato (eq.(35)) a meno di uno spostamento rigido. Le costanti arbitrarie C_2 possono essere determinate una volta che vengano specificate le condizioni di vincolo.

b) Sviluppo in serie di Fourier

La funzione di Airy e' assunta periodica in x di periodo 2ℓ e sviluppata in serie di Fourier:

$$\chi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [X_{1k}(y) \sin \alpha_k x + X_{2k}(y) \cos \alpha_k x] \quad (84)$$

dove $X_{1k}(y)$, $X_{2k}(y)$ sono incognite e $\alpha_k = k\pi/\ell$. Sostituendo la (84) nell'equazione biarmonica (57') ed eguagliando a zero i termini in $\sin \alpha_k x$, $\cos \alpha_k x$, si ottiene:

$$X_{1k}^{(III)}(y) - 2\alpha_k^2 X_{1k}''(y) + \alpha_k^4 X_{1k}(y) = 0 \quad (85)$$

dove $X \equiv X_{1k, 2k}$, $\alpha = \alpha_k$. La (85) e' un'equazione ordinaria a coefficienti costanti che ammette l'integrale particolare $X(y) = e^{\lambda y}$. Sostituendo nella (85) si ottiene l'equazione caratteristica:

$$\lambda^4 - 2\alpha^2 \lambda^2 + \alpha^4 = 0 \quad (86)$$

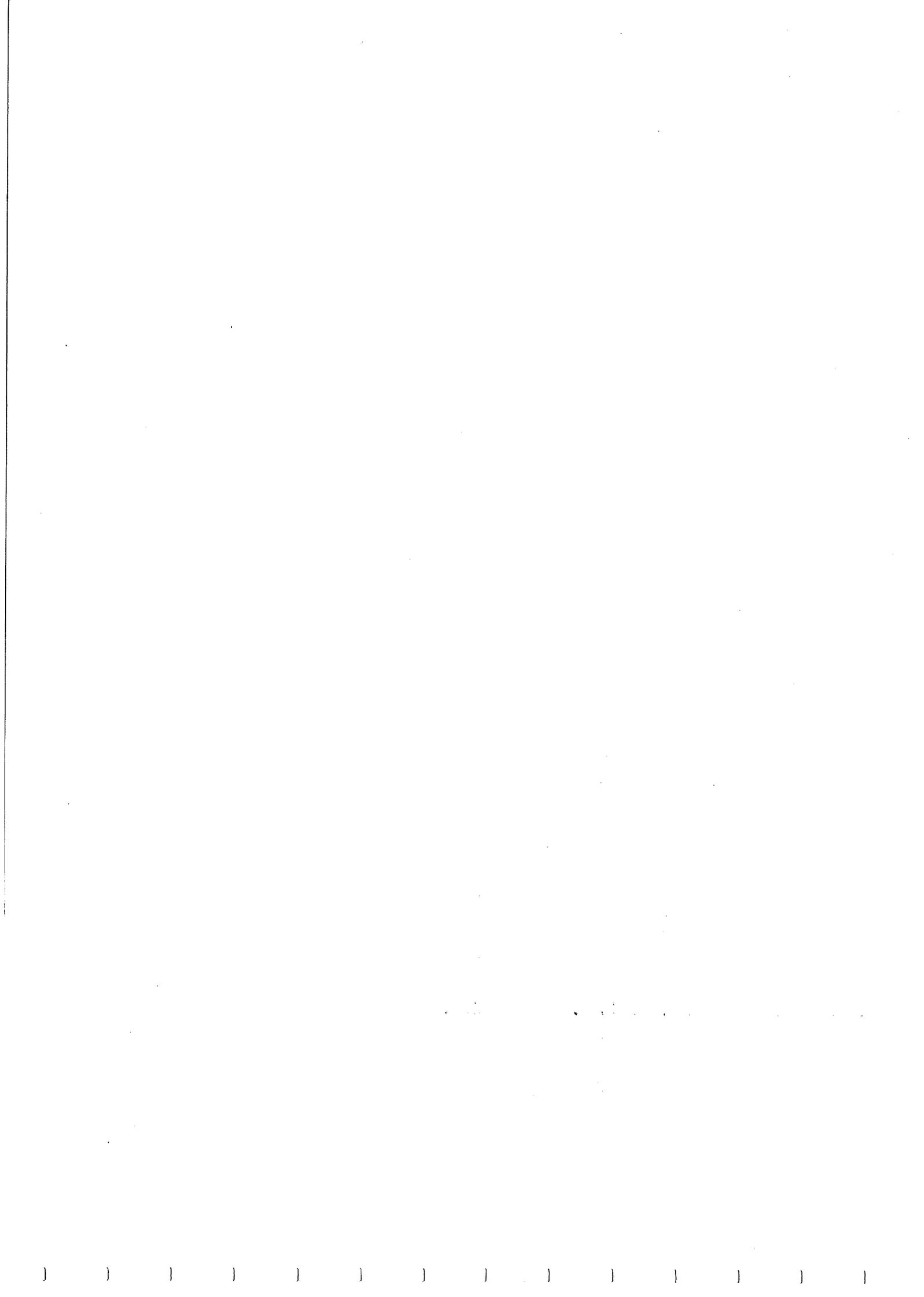
Si noti che la (86) coincide con la (41) ottenuta con il metodo degli spostamenti. L'integrale generale della (85) puo' porsi nella forma

$$X(y) = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y} + C_3 y e^{\alpha y} + C_4 y e^{-\alpha y} \quad (87)$$

o indifferentemente

$$X(y) = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 y \sinh \alpha y + C_4 y \cosh \alpha y \quad (88)$$

Le costanti arbitrarie vanno determinate imponendo le condizioni al contorno.



Quale applicazione si consideri ancora il problema di fig.13 in cui, in luogo degli spostamenti, sia assegnato un carico al contorno $f_y = P_0 \sin \pi x / \ell$. Posto $\alpha = \pi / \ell$, si assume:

$$\chi(y) = X(y) \sin \alpha x = (c_2 + c_4 y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \quad (89)$$

in cui si e' gia' tenuto conto delle condizioni in $y = \infty$. Il campo di tensione corrispondente risulta:

$$N_x = [c_2 \alpha^2 + c_4 (\alpha^2 y - 2\alpha)] e^{-\alpha y} \sin \alpha x$$

$$N_y = -(c_2 + c_4 y) e^{-\alpha y} \alpha^2 \sin \alpha x \quad (90)$$

$$N_{xy} = \alpha [c_2 \alpha - c_4 (1 - \alpha y)] e^{-\alpha y} \cos \alpha x$$

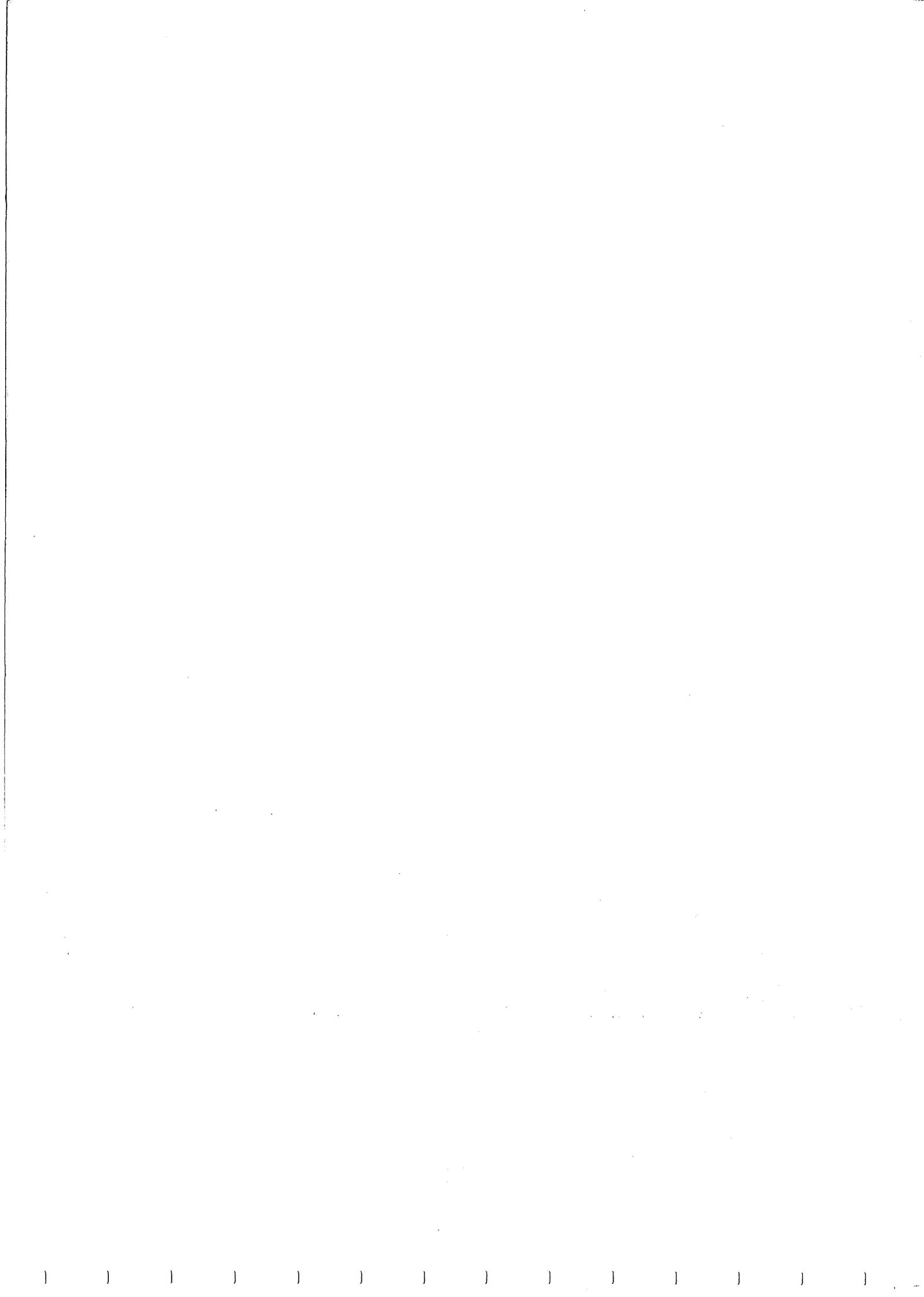
Imponendo la condizione $N_{xy}(x, 0) = 0$ si ottiene $c_4 = c_2 \alpha$; imponendo che sia $N_y(x, 0) = P_0 \sin \alpha x$ si ottiene $c_2 = -P_0$. La soluzione e' pertanto:

$$N_x = -P_0 \alpha^2 (\alpha y - 1) e^{-\alpha y} \sin \alpha x$$

$$N_y = -P_0 \alpha^2 (\alpha y + 1) e^{-\alpha y} \sin \alpha x \quad (91)$$

$$N_{xy} = -P_0 \alpha^2 y e^{-\alpha y} \cos \alpha x$$

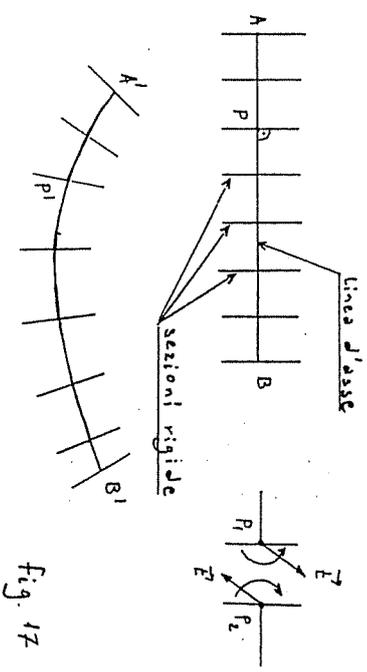
Se in luogo del carico e' assegnato lo spostamento (45), occorre risalire dalle (90) agli spostamenti ed imporre la condizione geometrica al contorno.



5 CONTINUO POLARE MONODIMENSIONALE: TRAVE RETTILINEA

5.1 Equazioni fondamentali

Si consideri la trave rettilinea come un oggetto costituito da una linea d'asse e da sezioni trasversali rigide, inizialmente ortogonali all'asse (fig.17). Il sistema puo' essere assimilato ad un continuo monodimensionale polare, costituito cioe' da punti materiali dotati di orientazione che si scambiano coppie di contatto, oltre che forze. L'orientazione e' individuata da direttori solidali ai punti materiali, inizialmente ortogonali alla retta. La posizione dei punti del continuo individua la posizione della linea d'asse, l'orientazione dei direttori individua la giacitura delle sezioni trasversali; le azioni di contatto, forze e coppie, costituiscono le caratteristiche della sollecitazione.



Nel seguito si formula il problema elastico limitatamente al caso piano (sistema monodimensionale

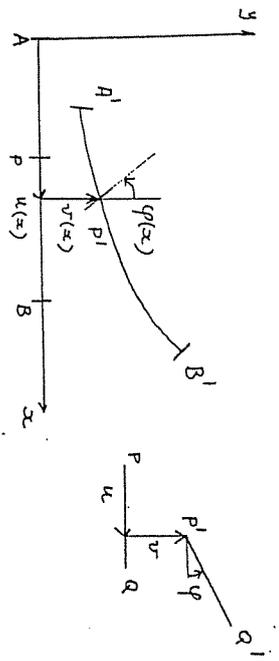
immerso in uno spazio bidimensionale); alla fine del capitolo si fornisce un cenno sul problema tridimensionale.

5.1 Cinematica

La generica configurazione della trave e' individuata dal vettore spostamento

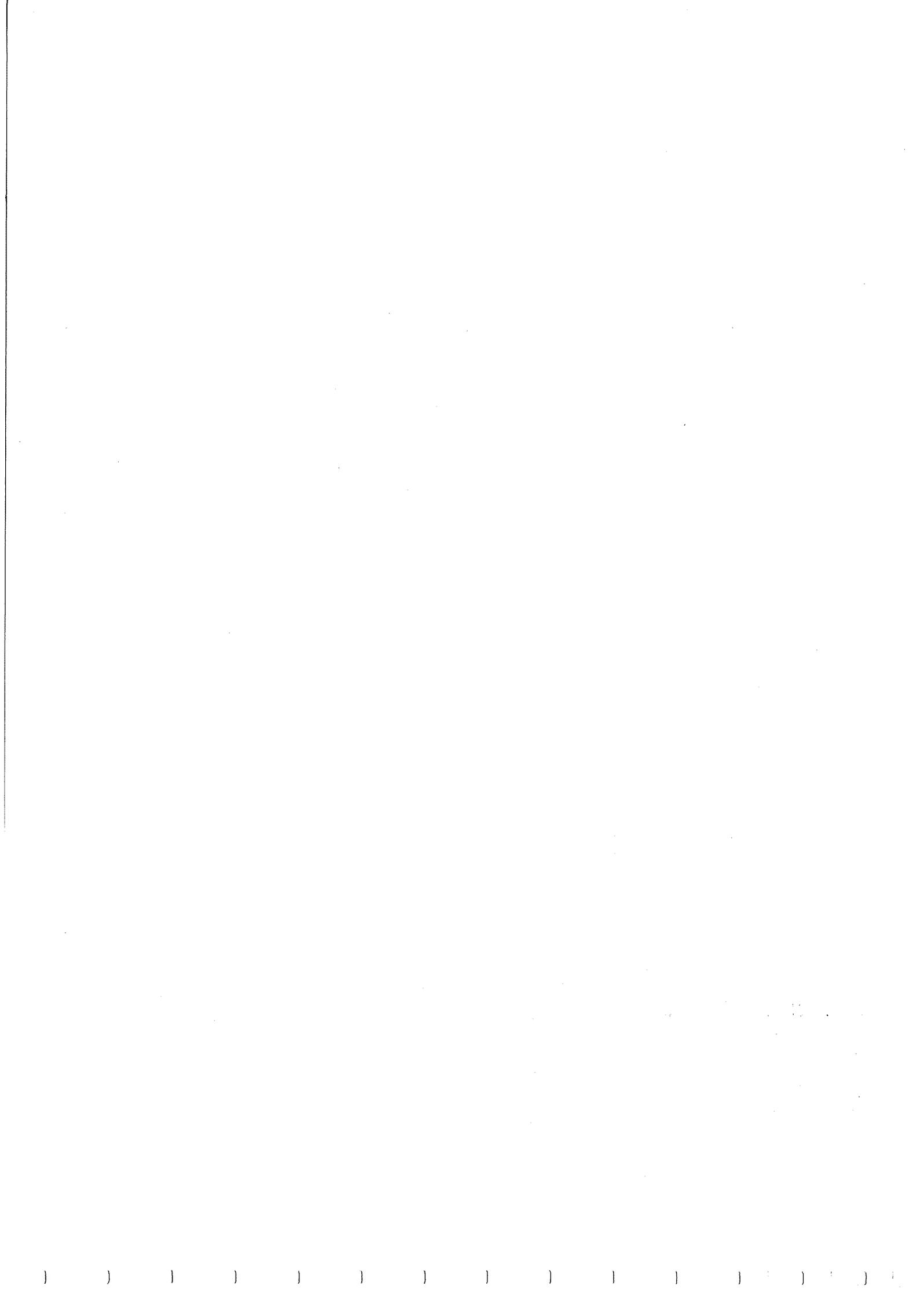
$$u = \{ u \quad v \quad \varphi \}^T \quad (1)$$

costituito dalle componenti di traslazione $u(x)$ e $v(x)$ e dalla rotazione $\varphi(x)$ del punto materiale P che inizialmente occupa la posizione x (fig.18).



Per determinare le grandezze di deformazione si consideri un elemento infinitesimo PQ di lunghezza dx . Detto $\{u\}$ lo spostamento di P , lo spostamento di Q e' $\{u_Q\} = \{u\} + \{du\}$, dove $\{du\}$ ha componenti scalari:

$$\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx} dx \\ dv &= \frac{dv}{dx} dx \\ d\varphi &= \frac{d\varphi}{dx} dx \end{aligned} \quad (2)$$



Le (2) descrivono il generico spostamento relativo tra i punti P e Q, in generale dovuto ad uno spostamento rigido e ad una deformazione pura. Nel caso particolare di spostamento rigido, dalla cinematica dei corpi rigidi si ha (fig.19)

$$u_Q = u$$

$$v_Q = v + \varphi dx$$

$$\varphi_Q = \varphi$$

e quindi

$$du = 0$$

$$dv = \varphi dx$$

$$d\varphi = 0$$

(3)

La deformazione pura puo' percio' ottenersi come differenza tra il generico spostamento (2) e lo spostamento rigido (3); si ottiene:

$$du = \epsilon dx$$

$$dv = \gamma dx$$

$$d\varphi = \chi dx$$

(4)

in cui si e' posto

$$\epsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \varphi$$

(5)

$$\chi = \frac{d\varphi}{dx}$$

Le (5) costituiscono le equazioni implicite di congruenza e definiscono l'operatore cinematico D:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

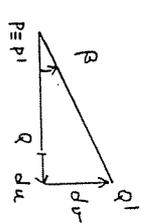
In esse ϵ , γ , χ sono le componenti scalari della deformazione; in particolare:

* ϵ e' detta deformazione assiale;

* γ e' detta deformazione a taglio, o scorrimento angolare;

* χ e' detta curvatura flessionale.

La deformazione ϵ coincide con quella gia' incontrata nello studio della cinematica dell'asta e misura l'allungamento specifico della linea d'asse. La deformazione γ esprime la differenza angolare (nella configurazione deformata) tra la normale alla linea d'asse e la giacitura della sezione, cioe' misura la variazione dell'angolo inizialmente retto tra sezione e linea d'asse (fig.20). Nel caso in cui e' $\gamma=0$ la sezione resta ortogonale alla linea d'asse anche dopo la deformazione.



$$\rho = \frac{dv}{dx + du} = \frac{v'}{1 + u'} \approx v'$$

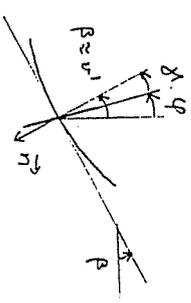


fig. 20



La curvatura χ esprime la "velocità" con cui varia la rotazione della sezione lungo l'asse, ovvero la rotazione relativa tra due sezioni infinitamente vicine. Va osservato in generale che χ non coincide con la curvatura della linea d'asse; per convincersene basta pensare al caso particolare in cui $e' \chi = \nu' \equiv 0$, $\varphi \neq 0$ nel quale si ha $\chi \neq 0$ anche se la linea d'asse resta rettilinea.

Le equazioni implicite di congruenza vanno corredate delle condizioni al contorno

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_u \quad (6)$$

che devono essere soddisfatte sulla parte della frontiera su cui sono assegnati gli spostamenti.

5.1.2 Equilibrio

La trave sia sottoposta a forze e coppie ripartite $P_x(x)$, $P_y(x)$, $m(x)$ e forze e coppie sul contorno $\partial \mathcal{B}_f$, f_x , f_y , μ (fig. 21a).

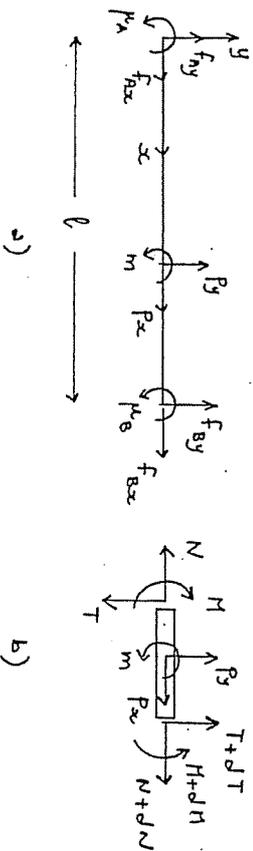


fig. 21

Lo stato di tensione nel generico punto x e' descritto dal vettore

$$\{g\} = \{N \quad T \quad M\}^T \quad (7)$$

in cui N e' lo sforzo normale, T il taglio ed M il momento flettente, assunti positivi come indicato in fig. 21b (+).

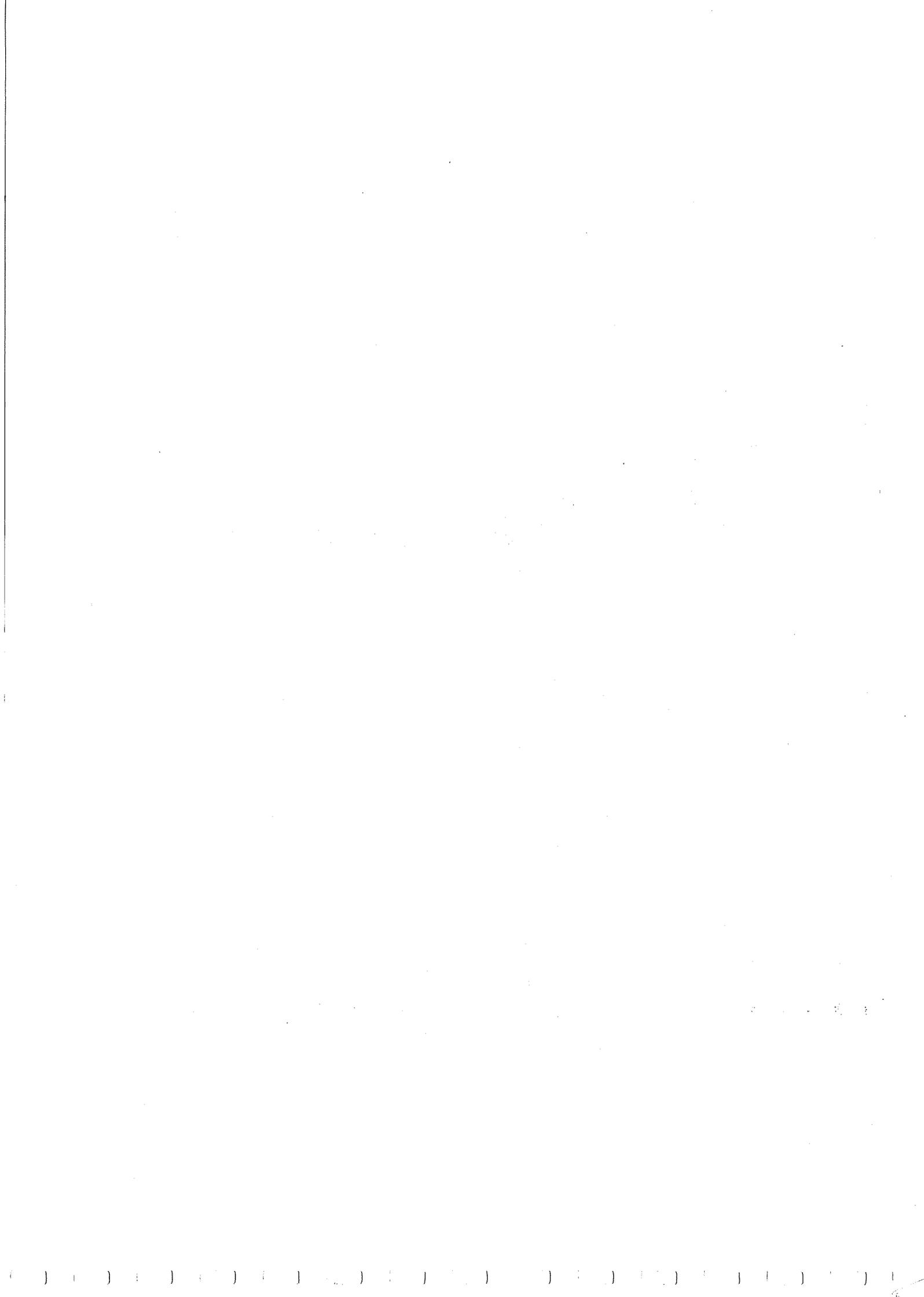
Le condizioni di equilibrio dell'elemento infinitesimo si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + P_x &= 0 \\ \frac{dT}{dx} + P_y &= 0 \\ \frac{dM}{dx} + T + m &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{Bmatrix} \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (8')$$

(+) Si noti che la convenzione coincide con quella assunta per le componenti S_{ij} del tensore della tensione nel continuo tridimensionale. Lo sforzo di taglio e' positivo se antiorario in contrasto con la convenzione tecnica.



Le condizioni di equilibrio (8') definiscono l'operatore d'equilibrio D^* , aggiunto dell'operatore cinematico D che appare nelle (5').

Il problema statico e' completato dalle condizioni di equilibrio al contorno che si scrivono:

$$N(0) = -f_{Ax} \quad N(l) = f_{Bx}$$

$$T(0) = -f_{Ay} \quad T(l) = f_{By} \quad (9)$$

$$H(0) = -\mu_A \quad H(l) = \mu_B$$

oppure nella forma matriciale $NG = f$:

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ \mu \end{Bmatrix} \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (9')$$

$$n = \begin{cases} -1 & \text{in } A \\ +1 & \text{in } B \end{cases}$$

5.1.3 Legame costitutivo

Si assume un legame sforzi-deformazioni di tipo diagonale:

$$\begin{Bmatrix} N \\ T \\ H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_L & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (10)$$

in cui:

- * EA e' la rigidezza assiale;
- * GA_L e' la rigidezza a taglio;
- * EI e' la rigidezza flessionale;

essendo E il modulo elastico di Young, G il modulo di elasticita' trasversale, A l'area della sezione trasversale, A_L l'area di taglio (frazione di A), I il momento d'inerzia baricentrico della sezione. Le costanti che appaiono nell'operatore elastico C , definito dalle (10), sono suggerite dalla teoria elementare della trave che considera il sistema come corpo tridimensionale (teoria di De Saint Venant, teoria tecnica della flessione e taglio).

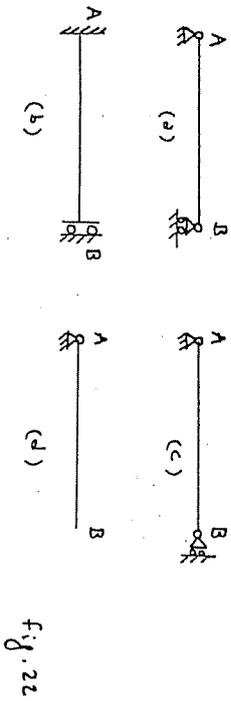
5.1.4 Condizioni al contorno

Le equazioni (5) e (8) mostrano che il continuo polare monodimensionale e' localmente isostatico e cinematicamente determinato in quanto sia il problema statico che quello cinematico sono governati da sistemi differenziali di tre equazioni in tre incognite. La soluzione in grande e' pero' unica solo se le condizioni al contorno sono opportune, se cioe' i vincoli (in numero di tre) impediscono i moti rigidi della trave. In tal caso le tre condizioni geometriche su $\partial \mathcal{D}_u$ e le rimanenti tre condizioni meccaniche su $\partial \mathcal{D}_f$ sono sufficienti a determinare rispettivamente le tre costanti arbitrarie che nascono dall'integrazione di ciascuno dei due problemi. Si noti inoltre che nelle (5) e (8) la prima equazione e' disaccoppiata dalle altre due e



coincide con quella relativa all'asta: e' necessario pertanto che delle sei condizioni una sia relativa allo spostamento w ed una allo sforzo N .

Si considerino ad esempio i sistemi in fig.22. Le rispettive condizioni al contorno sono riassunte in tabella.



SISTEMA	CONDIZ. GEOMETRICHE	CONDIZ. MECCANICHE
a)	$u_A = v_A = 0$ $v_B = 0$	$M_A = 0$ $N_B = T_B = 0$
b)	$u_A = v_A = \varphi_A = 0$ $u_B = v_B = \varphi_B = 0$	$T_B = 0$
c)	$u_A = v_A = 0$ $u_B = 0$	$M_A = 0$ $T_B = M_B = 0$
d)	$u_A = v_A = 0$	$M_A = 0$ $N_B = T_B = M_B = 0$

Il sistema a) e' cinematicamente/staticamente determinato: le tre condizioni geometriche (di cui una su u) e le tre meccaniche (di cui una su N) sono infatti sufficienti a determinare le costanti di integrazione; il sistema b) e' cinematicamente impossibile (cinque condizioni) e staticamente indeterminato (una sola condizione); e' percio' iperstatico di grado due; il sistema c) e' degenere perche'

nel problema cinematico sono presenti troppe condizioni su u (due) e troppo poche su v e φ (solo una), e nel problema statico troppe su M e T (tre) e nessuna su N ; il sistema d) e' labile di grado uno in quanto cinematicamente indeterminato (due sole condizioni) e staticamente impossibile (quattro condizioni).

Se si introduce il legame costitutivo, il sistema costituito dalle (5), (8) e (10) (problema elastico) fornisce una soluzione unica sia nel caso di sistema iperstatico che iperstatico; nel caso di sistema labile o degenere, se la soluzione esiste (il che avviene solo per particolari sistemi di forze) questa e' ancora unica in accordo al teorema di Kirchhoff in termini di tensioni e deformazioni ma e' indeterminata in termini di spostamento.

Nel seguito si affronta il problema elastico secondo i due metodi, degli spostamenti e delle forze.

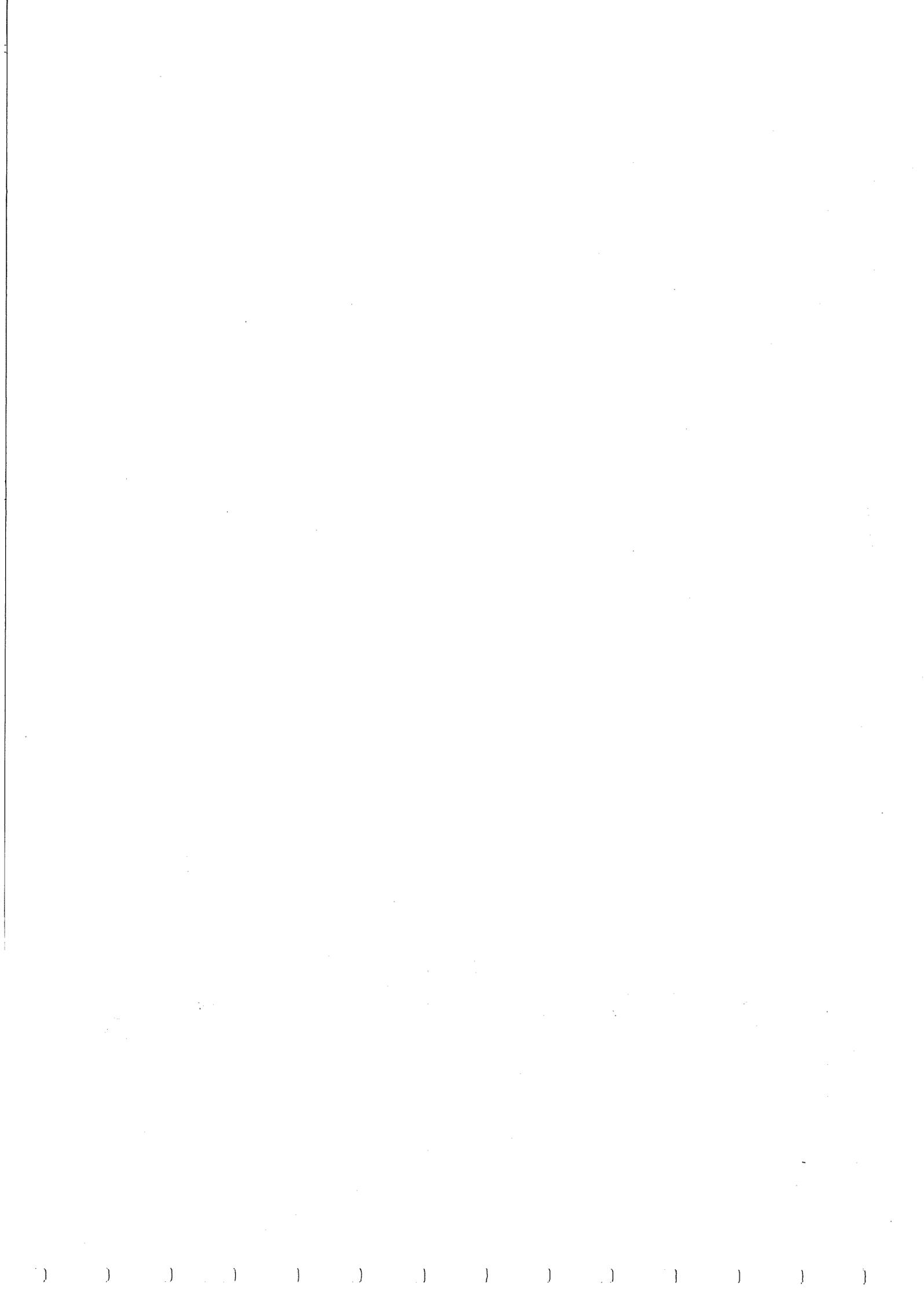
5.2 Metodo degli spostamenti

5.2.1 Formulazione diretta

Seguendo il procedimento illustrato nel paragrafo 1.6 si esprimono le tensioni G in funzione degli spostamenti w , ottenendo il legame $G = CDw$:

$$\begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (11)$$

oppure sviluppando i prodotti:



$$N = EA w'$$

$$T = GA_E (v' - \varphi)$$

$$M = EI \varphi'$$

dove l'apice indica derivazione rispetto ad x . Sostituendo le (11) nelle equazioni di equilibrio (8') si ha:

$$\begin{bmatrix} -EA \frac{d^2}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & -GA_E \frac{d^2}{dx^2} & GA_E \frac{d}{dx} \\ 0 & -GA_E \frac{d}{dx} & GA_E - EI \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ m \end{Bmatrix} \quad (12)$$

o anche:

$$-EA w'' = P_x$$

$$-GA_E (v' - \varphi)' = P_y \quad (12')$$

$$-GA_E (v' - \varphi) - EI \varphi'' = m$$

Le (12) definiscono l'operatore di rigidità L . Le condizioni al contorno (9'), valide su $\partial \mathcal{B}_f$, si esprimono in termini di spostamento tramite le (11):

$$\begin{bmatrix} nEA \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & nGA_E \frac{d}{dx} & -nGA_E \\ 0 & 0 & nEI \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ \mu \end{Bmatrix} \quad (13)$$

dove $n = \pm 1$. L'operatore a primo membro e' l'operatore di rigidezza al contorno B .

Le equazioni differenziali (12) con le condizioni al contorno (13) costituiscono la formulazione del problema elastico in termini di spostamento. Si noti che sia l'equazione di equilibrio in direzione longitudinale che la condizione al contorno (13₁) sono disaccoppiate dalle altre e coincidono con le equazioni dell'asta (cap. 3).

Quale esempio d'applicazione del metodo si consideri una trave appoggiata sottoposta ad un carico trasversale ripartito

$$P_y = P_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (14)$$

e a coppie distribuite $m(x) = 0$ (fig. 23).

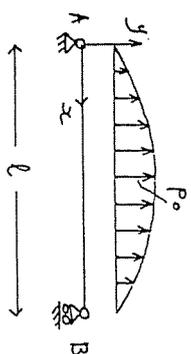


fig. 23

Poiche' la (12₁) e' omogenea e le condizioni al contorno in u sono pure omogenee e' $u(x) \equiv 0$; $N(x) \equiv 0$. Le condizioni al contorno negli spostamenti v e φ sono:

$$v(0) = v(l) = 0$$

(15)

$$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$$

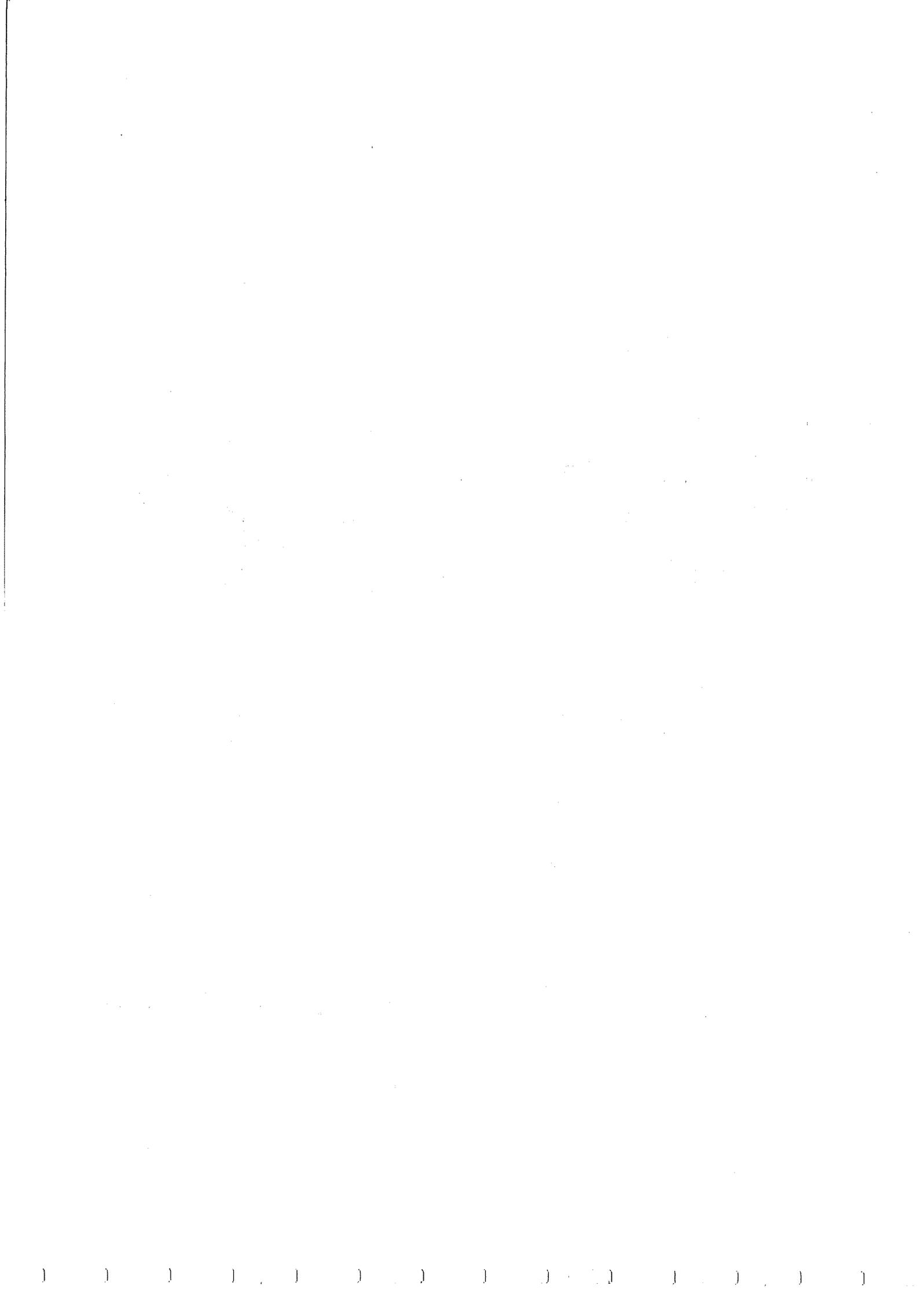
dove le ultime due equazioni esprimono la condizione di annullamento dei momenti di estremita'. Per ispezione delle (12'), (15) si vede che

$$v(x) = v_0 \sin \pi x / l$$

(16)

$$\varphi(x) = \varphi_0 \cos \pi x / l$$

e' una soluzione. Per determinare le ampiezze delle armoniche, v_0 e φ_0 , si sostituiscono le (16) nelle (12') e si ottiene:



$$G A_E (y_0 - \frac{\pi}{\ell} v_0) = -P_0 \frac{\ell}{\pi} \quad (17)$$

$$G A_E (y_0 - \frac{\pi}{\ell} v_0) + E I y_0 \frac{\pi^2}{\ell^2} = 0$$

Dalla (17) si ricava il legame rotazione-spostamento:

$$y_0 = \alpha \frac{\pi}{\ell} v_0 \quad (18)$$

dove α e' un parametro adimensionale:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{E I}{G A_E} \frac{\pi^2}{\ell^2}} \quad (19)$$

Risolviendo il sistema (17) si trova:

$$v_0 = \frac{P_0 \ell^4}{\pi^4 \alpha E I} \quad , \quad y_0 = \frac{P_0 \ell^3}{\pi^3 E I} \quad (20)$$

Sostituendo nelle (16) e poi nelle (11') si determinano le sollecitazioni:

$$T(x) = G A_E \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{P_0 \ell^3}{\pi^3 E I} \cos \frac{\pi x}{\ell}$$

$$M(x) = -\frac{P_0 \ell^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (21)$$

Si studi ora l'influenza della deformazione a taglio sulla soluzione. Lo spostamento in mezzeria v_0 dipende dal fattore adimensionale α , quindi dal rapporto $I/(A \ell^2) = e^2/\ell^2$ dove e e' il giratore d'inerzia della sezione. Se la trave e' sufficientemente snella e' $e \ll \ell$ e dunque e' $\alpha \approx 1$. Per esempio, per una sezione rettangolare d'altezza h e' $e^2/\ell^2 = h^2/(12 \ell^2)$, e se il materiale e' acciaio si ha $E/G = 2(1+\nu) = 2.6$; per $h/\ell = 1/5$ si ottiene $\alpha = 1.085$, per $h/\ell = 1/10$ e' $\alpha = 1.008$. Se si assume $\alpha = 1$ risulta $y_0 = \pi v_0/\ell$ e quindi $v_0 = 0$.

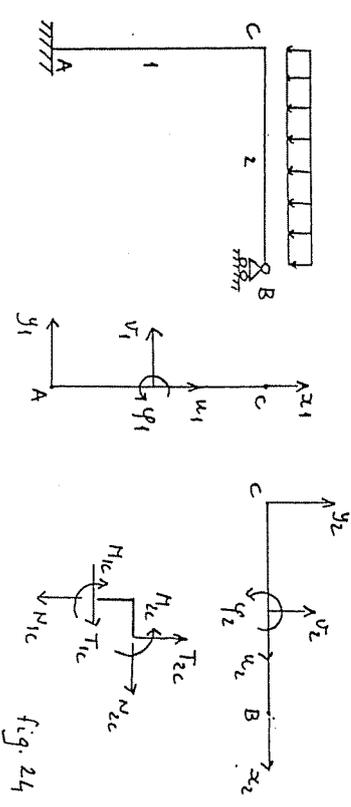
Si ottiene percio' il seguente risultato, di validita' generale: nelle travi snelle l'influenza della deformabilita' a taglio e' trascurabile.

Si noti che nella (21) non e' lecito porre $\alpha = 1$ (e ottenere percio' $T(x) = 0$) in quanto la piccola differenza $1-\alpha$ viene moltiplicata per il fattore grande $A_e \ell^2/I$ cosicche' il prodotto e' un numero finito. Sostituendo ad α la sua espressione si ottiene infatti:

$$T(x) = P_0 \frac{\ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell} \quad (21')$$

Per concludere e' necessario osservare che il problema (12) si disaccoppia in due problemi (il primo in $w(x)$, il secondo in $v(x)$, $\varphi(x)$) solo se il sistema e' costituito da un'unica trave; nel caso generale di un assemblaggio di travi (telajo) le condizioni al contorno accoppiano le tre variabili.

Ad esempio il sistema in fig. 24 richiede la determinazione di sei funzioni spostamento, tre per ciascuna asta, con complessive dodici condizioni al contorno.



Le condizioni in A sono tutte geometriche:

$$w_A = v_A = \varphi_A = 0$$

Le condizioni in B sono miste:

$$v_{2B} = 0, \quad E A_2 w'_{2B} = 0, \quad E I_2 \varphi'_{2B} = 0$$

dove si e' fatto uso delle (11'). Le condizioni in C esprimono la continuita' degli spostamenti,

$$w_{1C} = v_{2C}, \quad v_{1C} = -w_{2C}, \quad \varphi_{1C} = \varphi_{2C}$$

le condizioni meccaniche l'equilibrio nel punto di singolarita':

$$E A w'_{1C} - G A_E (v'_{2C} - \varphi_C) = 0$$



$$G A E_1 (v'_{1c} - \varphi'_{1c}) + E A_2 u'_{2c} = 0$$

$$E I_1 \varphi'_{1c} - E I_2 \varphi'_{2c} = 0$$

5.2.2 Formulazioni integrale e variazionale

Il teorema dei lavori virtuali (1.21) si specializza

come segue:

$$\int_0^l (N \delta \varepsilon + T \delta \gamma + M \delta \chi) dx = \int_0^l (P_x \delta u + P_y \delta v + m \delta \varphi) dx + f_{Ax} \delta u(0) + \dots + f_{Bx} \delta u(l) + \dots \quad (22)$$

Esprimendo le deformazioni virtuali in termini di spostamenti virtuali e le tensioni effettive in termini di spostamenti effettivi si ha:

$$\int_0^l [E A u' \delta u + G A_2 (v' - \varphi) (\delta v' - \delta \varphi) + E I \varphi' \delta \varphi] dx = \int_0^l (P_x \delta u + P_y \delta v + m \delta \varphi) dx + f_{Ax} \delta u(0) + \dots \quad (23)$$

Integrando per parti ed eguagliando separatamente a zero i termini in δu , δv , $\delta \varphi$ si ottengono le equazioni di equilibrio (12'); imposte le condizioni al contorno geometriche si ottengono le condizioni meccaniche (13).

Alternativamente, se si segue l'approccio variazionale, occorre scrivere l'energia potenziale totale (1.26) che nel caso in esame e':

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (E A \varepsilon^2 + G A_2 \gamma^2 + E I \chi^2) dx + \int_0^l (P_x u + P_y v + m \varphi) dx - f_{Ax} u(0) + \dots \quad (24)$$

Introducendo le condizioni implicite di congruenza si ha:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l [E A u'^2 + G A_2 (v' - \varphi)^2 + E I \varphi'^2] dx + \int_0^l (P_x u + P_y v + m \varphi) dx - f_{Ax} u(0) - \dots \quad (25)$$

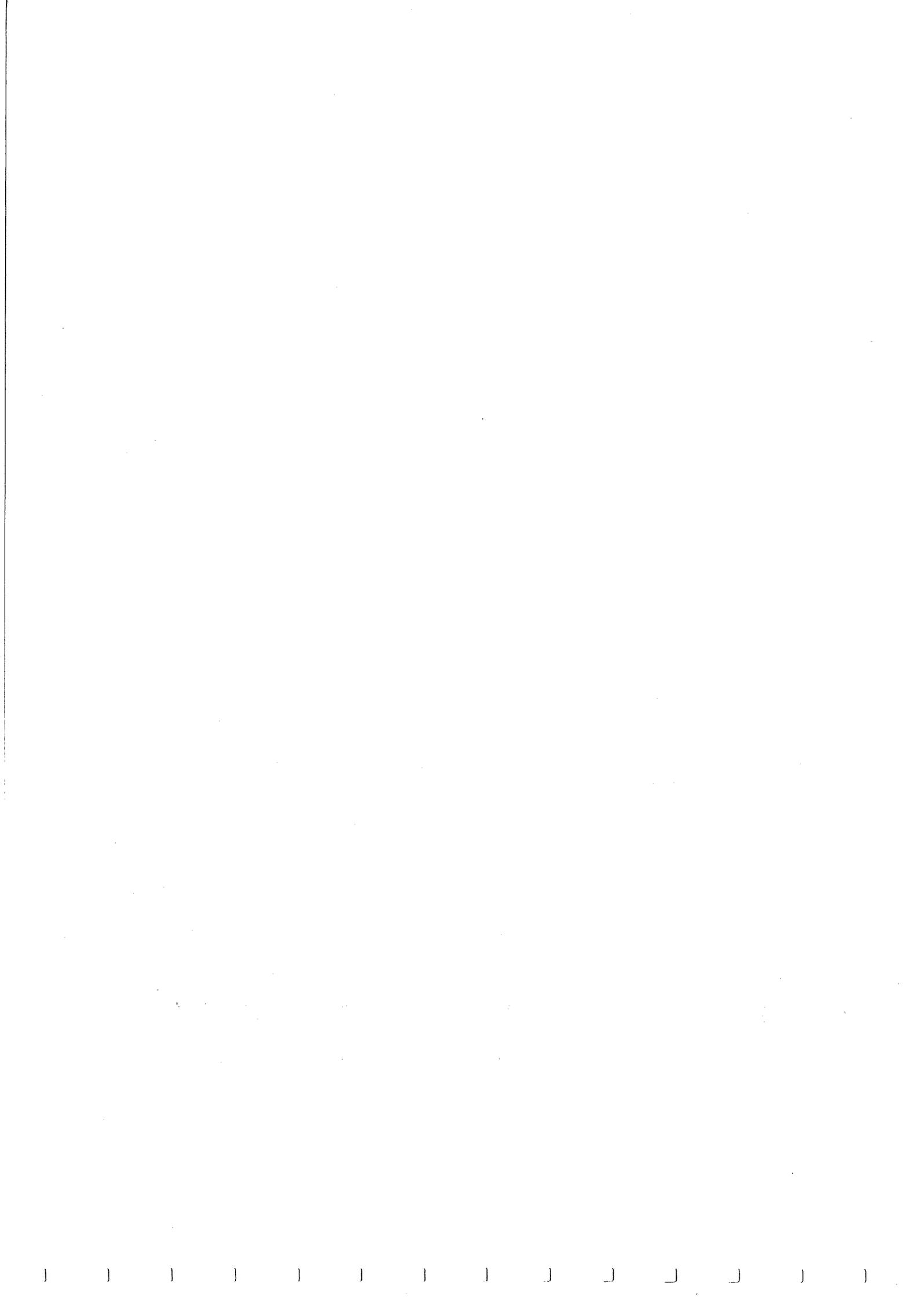
dove i termini al contorno vanno omissi in corrispondenza degli spostamenti assegnati. Imponendo la condizione di stazionarietà $\delta V = 0$ si riottiene la (23).

5.3 Metodo delle forze

Poiche' il continuo polare monodimensionale e' localmente isostatico si fara' riferimento ad una trave vincolata in modo iperstatico.

5.3.1 Formulazione diretta

La soluzione generale delle equazioni di equilibrio e' determinata a meno di costanti arbitrarie X_i ($i=1, 2, \dots, n$) (incognite iperstatiche) che possono essere identificate con



le reazioni dei vincoli sovrabbondanti. Il generico stato di tensione, in accordo alle (1.15), risulta:

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^n N_i' X_i'$$

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^n T_i' X_i' \quad (26)$$

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i' X_i'$$

oppure in forma matriciale

$$\begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1' & N_2' & \dots & N_n' \\ T_1' & T_2' & \dots & T_n' \\ M_1' & M_2' & \dots & M_n' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (26')$$

in cui:

* $G_0 = \{N_0, T_0, M_0\}$ e' la soluzione particolare corrispondente a valori nulli delle incognite iperstatiche (stato di tensione dovuto ai carichi agenti sul sistema principale);

* N_i', T_i', M_i' sono le sollecitazioni che corrispondono a $X_i = 1$, $X_j = 0$ ($j \neq i$); la matrice in cui appaiono e' la matrice S' definita nella (1.15);

* il prodotto $G_x = S' X$ rappresenta il piu' generale stato di sforzo autoequilibrato.

Allo stato di tensione (26) corrisponde, tramite il legame costitutivo (10), lo stato di deformazione $\varepsilon = C^{-1} G$:

$$\varepsilon = \frac{N_0}{EA} + \sum_{i=1}^n \frac{N_i'}{EA} X_i'$$

$$\delta = \frac{T_0}{GA_L} + \sum_{i=1}^n \frac{T_i'}{GA_L} X_i' \quad (27)$$

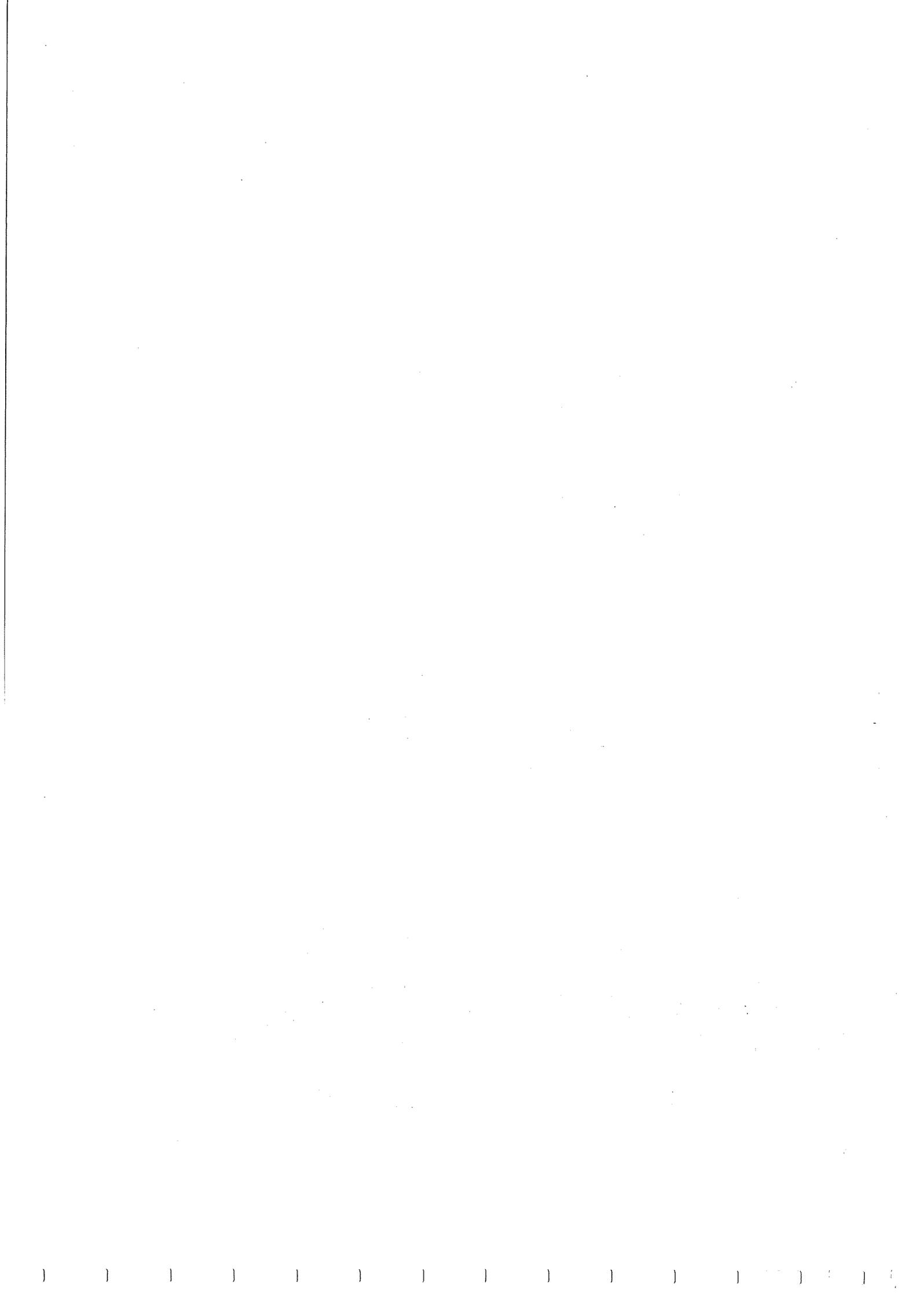
$$\chi = \frac{M_0}{EI} + \sum_{i=1}^n \frac{M_i'}{EI} X_i'$$

Per determinare le incognite iperstatiche X_i' e' necessario imporre che lo stato di deformazione (27) sia congruente. Poiche' il problema cinematico e' localmente determinato la congruenza puo' essere violata solo al contorno, in corrispondenza dei vincoli soppressi nel passare dal sistema effettivo a quello principale. Detto η_i' lo spostamento duale dell'incognita X_i' , applicando la formula generale dello spostamento (1.5) si ha:

$$1 \cdot \eta_i' + \sum_{k=1}^m f_{ki}' \bar{u}_k = \int_0^l (N_i' \varepsilon + T_i' \delta + M_i' \chi) dx \quad (28)$$

in cui ε , δ , χ sono le deformazioni effettive date dalle (27), f_{ki}' sono le reazioni vincolari in k equilibrate con la forza unitaria applicata in i , ed \bar{u}_k sono i cedimenti vincolari. Sostituendo le (27) ed imponendo che sia $\eta_i = 0$ si ottiene il sistema

$$\sum_j \eta_{ij}' X_j + \eta_{oi}' + \bar{\eta}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (29)$$



in cui

$$\eta_{ij} = \int_0^l \left(\frac{N_i' N_j'}{EA} + \frac{T_i' T_j'}{GA} + \frac{M_i' M_j'}{EI} \right) dx$$

$$\eta_{i0} = \int_0^l \left(\frac{N_i' N_0}{EA} + \frac{T_i' T_0}{GA} + \frac{M_i' M_0'}{EI} \right) dx \quad (30)$$

$$\bar{\eta}_i = - \sum_k f_{ki}' \bar{u}_k$$

Le equazioni (29) sono del tipo (1.41') dove la matrice di flessibilita' F e' costituita dai coefficienti di influenza η_{ij} . La grandezza η_{ij} rappresenta lo spostamento η_i nel sistema principale dovuto ad una forza unitaria applicata in j ; risulta inoltre $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ in accordo al teorema di Maxwell. La sommatoria che appare nelle (29) puo' percio' interpretarsi, sovrapponendo gli effetti, come lo spostamento in i dovuto alle η incognite iperstatiche X_j ; il quale, per la congruenza, deve essere uguale ed opposto allo spostamento $\eta_{i0} + \bar{\eta}_i$ dovuto ai carichi e ai cedimenti vincolari.

Se nella trave sono presenti deformazioni imposte $\bar{\epsilon}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\chi}$, queste vanno sommate alle deformazioni elastiche (27) e il termine noto $\bar{\eta}_i$ si modifica in

$$\bar{\eta}_i = \int_0^l (N_i' \bar{\epsilon} + T_i' \bar{\delta} + M_i' \bar{\chi}) dx - \sum_k f_{ki}' \bar{u}_k \quad (31)$$

in accordo alla (1.45).

Le equazioni (29) possono naturalmente essere ottenute direttamente dalle (1.45) particolarizzate al caso in esame. E' infatti:

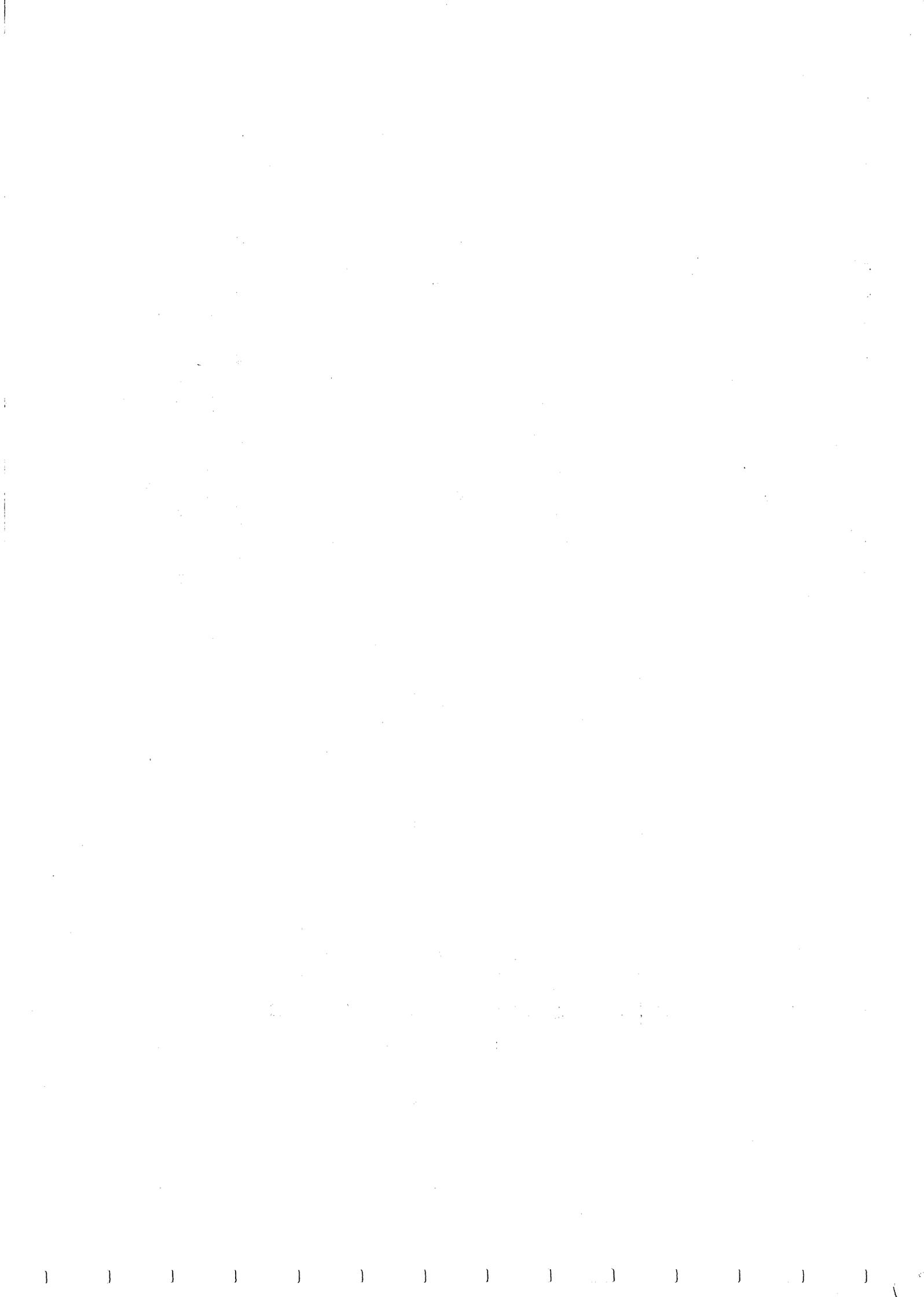
$$F = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1' & T_1' & M_1' \\ N_2' & T_2' & M_2' \\ \dots & \dots & \dots \\ N_n' & T_n' & M_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 1/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1' & N_2' & \dots & N_n' \\ T_1' & T_2' & \dots & T_n' \\ M_1' & M_2' & \dots & M_n' \end{bmatrix} dx$$

$$\eta_0 = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1' & T_1' & M_1' \\ N_2' & T_2' & M_2' \\ \dots & \dots & \dots \\ N_n' & T_n' & M_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & 1/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} dx \quad (32)$$

$$\bar{\eta}_i = \int_0^l \begin{bmatrix} N_i' & T_i' & M_i' \\ \dots & \dots & \dots \\ N_n' & T_n' & M_n' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\delta} \\ \bar{\chi} \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} f_{i1}' & f_{i2}' & \dots & f_{in}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{i1}' & f_{i2}' & \dots & f_{in}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \dots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix}$$

dove $[f_{ki}']^T = (NS)^T$ sono le reazioni al contorno dovute ad incognite $X=1$.

Se la trave e' snella e' lecito trascurare il contributo del taglio alla deformazione in confronto a quello del momento flettente. Nella (30) si omettera' pertanto il termine in $T_i' T_0$ e nelle (30₂) il termine in $T_i' T_0$; nella (31) non si trascurera' ovviamente $T_i' \bar{\delta}$ in quanto $\bar{\delta}$ non e' una deformazione elastica.



Quale esempio si consideri il sistema in fig. 25a, due volte iperstatico.

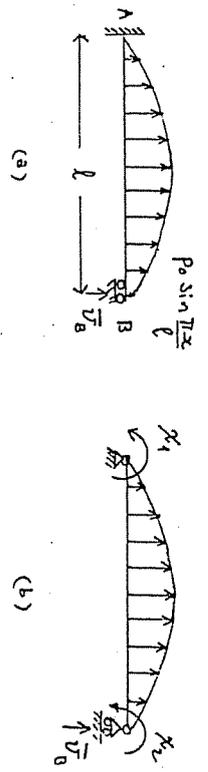


fig. 25

Si assume come sistema principale quello illustrato in fig. 25b, ottenuto eliminando due vincoli e mettendo in evidenza le incognite iperstatiche. Lo stato di tensione G_0 dovuto al carico e' gia' stato calcolato (eq. (21)) e risulta:

$$\begin{aligned} N_0 &= 0 \\ T_0 &= p_0 \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l} \\ M_0 &= -p_0 \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \quad (33)$$

Applicando separatamente le coppie X_1 e X_2 poste uguali ad 1 si ottengono le componenti della matrice S' . Con riferimento alla fig. 26 si ha:

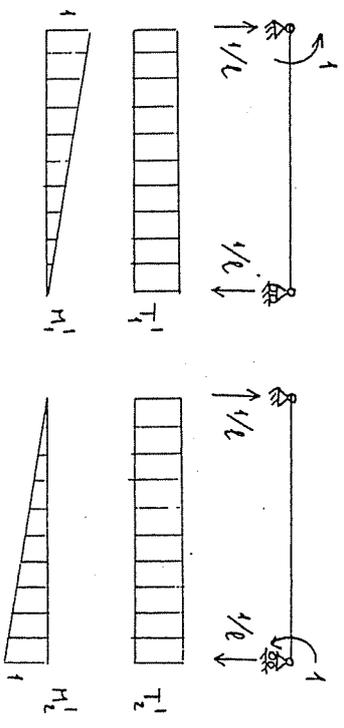


fig. 26

$$\begin{aligned} N_1' &= 0 & N_2' &= 0 \\ T_1' &= -1/l & T_2' &= -1/l \\ H_1' &= -(1-x/l) & H_2' &= x/l \end{aligned} \quad (34)$$

Le reazioni vincolari in B valgono rispettivamente $f_{B1}^1 = -1/l$, $f_{B2}^2 = -1/l$. I coefficienti di influenza (30), trascurando il contributo dovuto al taglio, risultano:

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= \int_0^l \frac{M_1'^2}{EI} dx = \frac{l}{3EI} \\ \eta_{12} &= \int_0^l \frac{M_1' M_2'}{EI} dx = -\frac{l}{6EI} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\eta_{22} = \int_0^l \frac{M_2'^2}{EI} dx = \frac{l}{3EI}$$

Gli spostamenti η_{i0} sono:

$$\eta_{10} = \int_0^l \frac{M_1' N_0}{EI} dx = \frac{p_0 l^3}{\pi^3 EI} \quad (36)$$

$$\eta_{20} = \int_0^l \frac{M_2' N_0}{EI} dx = \frac{p_0 l^3}{\pi^3 EI}$$

ed i termini dovuti al cedimento vincolare:

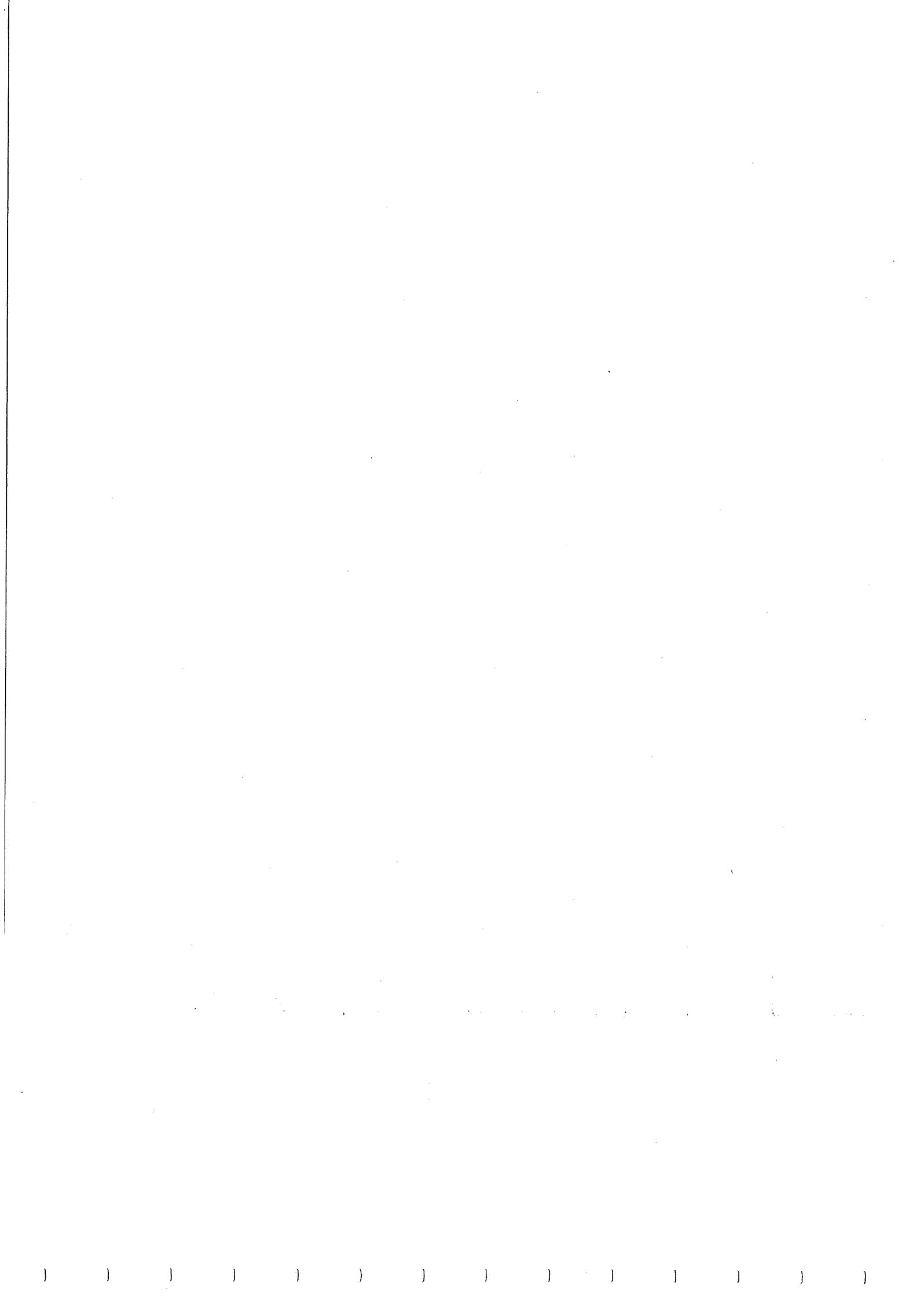
$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= -f_{B1}^1 \bar{v}_B = \bar{v}_B / l \\ \bar{\eta}_2 &= -f_{B2}^2 \bar{v}_B = \bar{v}_B / l \end{aligned} \quad (37)$$

Le equazioni di congruenza (29) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{p_0 l^3}{EI \pi^3} + \frac{\bar{v}_B}{l} \\ \frac{p_0 l^3}{EI \pi^3} + \frac{\bar{v}_B}{l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

la cui soluzione e'

$$X_1 = -X_2 = 2 p_0 \frac{l^2}{\pi^3} + \frac{2EI}{l^2} \bar{v}_B \quad (39)$$



la quale rispetta le condizioni di simmetria del problema. Note le incognite iperstatiche, le (26) forniscono lo stato di tensione congruente, a cui corrispondono cioè rotazioni nulle delle sezioni A e B.

5.3.2 Formulazioni integrale e variazionale

Il TLV complementare si scrive:

$$\int_0^l (\varepsilon \delta N + \gamma \delta T + \chi \delta M) dx = \bar{u}_A \delta F_{Ax} + \dots \quad (40)$$

dove le tensioni virtuali δN , δM , δT sono equilibrate con forze attive nulle. Dalle (26):

$$\delta N = \sum_i N'_i \delta X'_i$$

$$\delta T = \sum_i T'_i \delta X'_i \quad (41)$$

$$\delta M = \sum_i M'_i \delta X'_i$$

ed inoltre

$$\delta F_{Ax} = \sum_i F'_{Ax_i} \delta X'_i \quad (42)$$

ed analoghe. Esprimendo le deformazioni effettive tramite le (27) ed imponendo che il TLV valga per ogni $\delta X'_i$ si riottengono le equazioni di congruenza (29).

L'energia complementare totale si scrive:

$$V_c = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GA_c} + \frac{M^2}{EI} \right) dx - F_{Ax} \bar{u}_A - \dots \quad (43)$$

Esprimendo le sollecitazioni e le reazioni vincolari in funzione delle incognite iperstatiche ed imponendo la condizione $\delta V_c = 0$ si riottengono le (29).

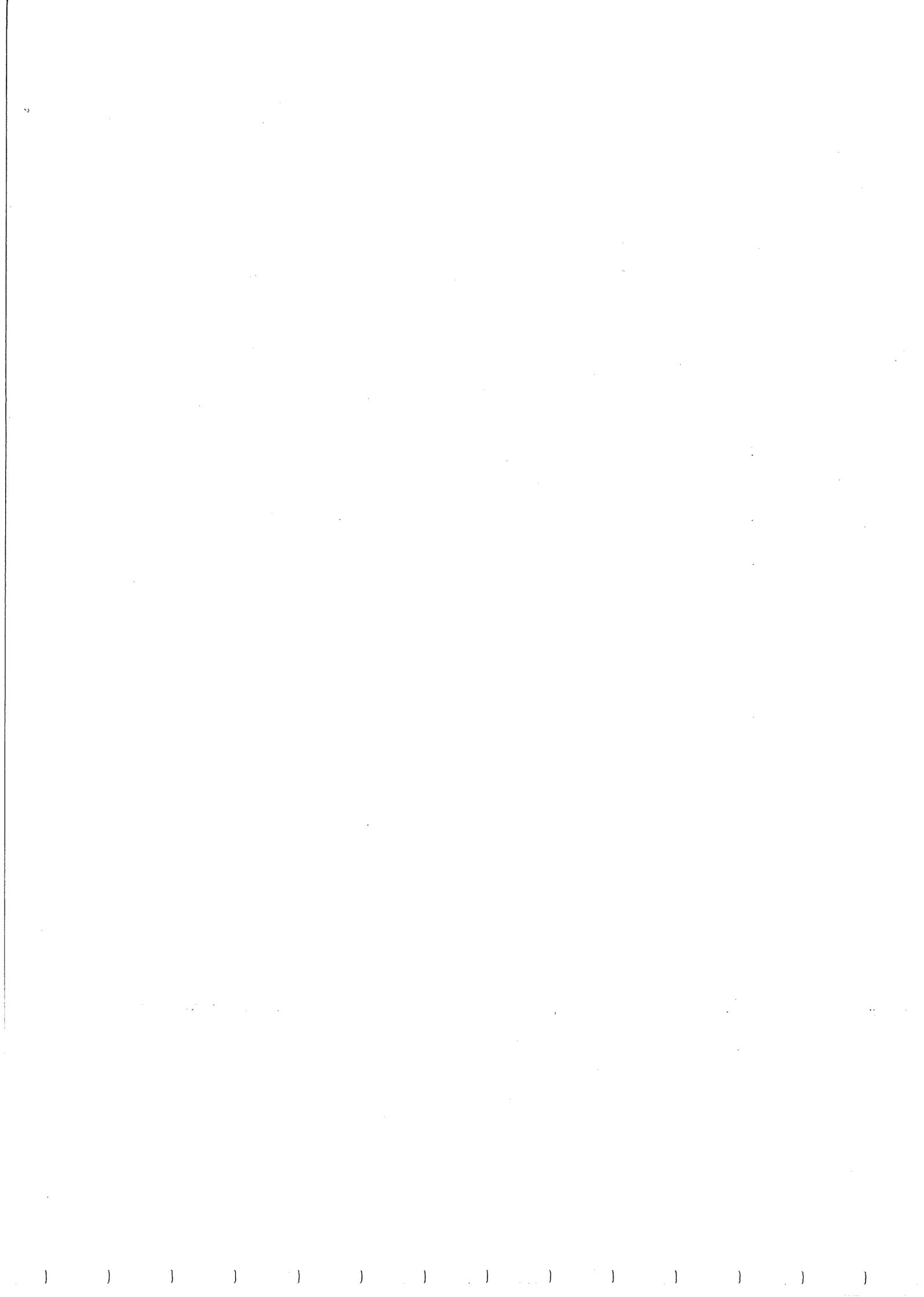
5.4 Trave indeformabile a taglio

Si è osservato che nelle travi snelle l'effetto della deformazione a taglio è piuttosto modesto e può essere trascurato. Appare desiderabile perciò formulare sin dall'inizio un modello più semplice di quello sin qui considerato in cui le sezioni trasversali della trave si mantengono ortogonali alla linea d'asse (ipotesi di Eulero-Bernoulli); una trave che rispetta questa condizione di vincolo interno è detta indeformabile a taglio.

Il modello internamente vincolato può essere dedotto da quello non vincolato, studiato nel paragrafo 5.1, attraverso il seguente procedimento (che si sviluppa nello spirito del metodo degli spostamenti):

- si annulla la grandezza cinematica γ e si determina una relazione (di vincolo) tra le variabili di configurazione $v(x)$ e $\varphi(x)$ che pertanto non sono più indipendenti;
- si elimina dalle equazioni di equilibrio lo sforzo $T(x)$ che non può più essere espresso dal legame costitutivo e si ottengono equazioni condensate (+);
- si esprimono le equazioni di equilibrio condensate in termini delle variabili di configurazione indipendenti.

(+) Si noti l'analogia con i problemi di corpi (continua)



Imponendo dunque che sia $\delta = 0$, dalla (5₂) si ricava

$$\varphi = v' \quad (44)$$

che esprime l'uguaglianza della rotazione φ della sezione e della rotazione $\beta = v'$ della tangente alla linea d'asse.

Le equazioni implicite di congruenza, assunte $u(x)$ e $v'(x)$ come variabili indipendenti, si scrivono perciò:

$$\begin{cases} \varepsilon \\ \chi \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{cases} u \\ v' \end{cases} \quad (45)$$

In particolare χ , ora coincide con la curvatura della linea d'asse.

Passando alle condizioni di equilibrio si elimina $T(x)$ tra le (8) ed (8) e si ottengono le equazioni di equilibrio condensate:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{cases} N \\ H \end{cases} = \begin{cases} P_x \\ P_y - \frac{dm}{dx} \end{cases} \quad (46)$$

Si vede che i nuovi operatori, cinematico e d'equilibrio, sono l'uno l'aggiunto dell'altro; inoltre vettori tensione e deformazione e vettori carichi e spostamenti si

(+) (continua) rigidi vincolati elasticamente, trattati nel cap.2. Anche in quel caso le reazioni R , esplicitate dai vincoli non elastici vengono eliminate dalle equazioni di equilibrio per ottenere condizioni "pure" negli spostamenti.

corrispondono nel senso dei lavori. Si noti che la forza generalizzata che fa lavoro in $v(x)$ dipende anche da $m(x)$; ciò può essere spiegato nel modo illustrato in fig.27, pensando di sostituire ad ogni coppia $m(x)$ due forze uguali e contrarie d'intensità m/dx disposte a distanza dx ; la differenza tra le due forze adiacenti fornisce il contributo $-dm/dx$.

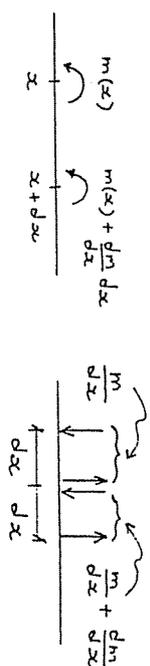


fig. 27

La sostituzione delle coppie $m(x)$ con il sistema di forze $-dm/dx$ è evidentemente lecita solo in quanto la rotazione $\varphi(x)$ non è indipendente dallo spostamento $v'(x)$. Stante la relazione di vincolo (44) i due sistemi di forze compiono il medesimo lavoro virtuale in un generico campo di spostamenti cinematicamente ammissibile; risulta infatti, integrando per parti:

$$\int_0^l m \delta \varphi dx = \int_0^l m \delta v' dx = - \int_0^l m' \delta v dx + [m \delta v]_0^l$$

Si vede che l'equivalenza è soddisfatta quando si consideri anche il contributo di forze di estremità pari a $m(l)$ e $-m(0)$, come può anche desumersi dal procedimento illustrato in fig.27.

1865-1875

1876-1880

1881-1885

1886-1890

Alle (45) e (46) va aggiunto il legame costitutivo

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix} \quad (47)$$

dedotto da quello della trave non vincolata (eq.(10)) cancellando la riga e la colonna relativa al taglio (+).

Sostituendo le (45) nelle (47) si ottiene il legame tensioni-spostamenti

$$\begin{aligned} N &= EA u' \\ M &= EI v'' \end{aligned} \quad (48)$$

con il quale le equazioni di equilibrio (46) si scrivono

$$\begin{aligned} -EA u'' &= P_x \\ EI v'''' &= \tilde{P}_y \end{aligned} \quad (49)$$

in cui si è posto

$$\tilde{P}_y = P_y - m' \quad (50)$$

Le condizioni al contorno geometriche del problema (49) si scrivono:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad v' = \bar{v}' \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u \quad (51)$$

(+) L'intero procedimento può pensarsi ottenuto attraverso un passaggio al limite per $GA_p \rightarrow \infty$ e $\chi \rightarrow 0$ in modo tale che il prodotto $T = GA_p \cdot \chi$ tenda ad un limite determinato e finito. Il taglio non può essere ottenuto dal legame costitutivo ma deve essere determinato in base a condizioni di equilibrio, a valle della soluzione, utilizzando ad esempio la (8_2) o (8_3) . Si noti ancora l'analogia con il problema dei corpi rigidi trattato nel cap.2.

ottenute dalle condizioni (6) del problema non vincolato introducendo la relazione di vincolo (44). Per scrivere le condizioni al contorno meccaniche (9) in termini di spostamento non sono sufficienti le relazioni (48) in quanto è necessario esprimere anche il taglio (che non appare nel legame costitutivo) in termini di spostamento. Utilizzando allora l'equazione di equilibrio (8_2) insieme alla (48_2) si ottiene:

$$T = -EI v''' - m \quad (52)$$

Le condizioni di equilibrio al contorno si scrivono perciò:

$$\begin{aligned} n EA u' &= F_x \\ -n (EI v'' + m) &= F_y \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_T \quad n = \begin{cases} -1 & \text{in } A \\ +1 & \text{in } B \end{cases} \\ n EI v'' &= \mu \end{aligned} \quad (53)$$

Il problema differenziale in $u(x)$ e $v(x)$ è dissociato; l'equazione (49_1) con relative condizioni al contorno rappresenta il problema elastico dell'asta, l'equazione (49_2) con le condizioni al contorno in $v(x)$ costituisce il problema della linea elastica. La soluzione generale dell'equazione della linea elastica è'

$$v = \iiint \frac{\tilde{P}_y}{EI} dx dx dx + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \quad (54)$$

dove le costanti arbitrarie c_i vanno determinate imponendo quattro condizioni ai limiti per ciascun dominio d'integrazione.



Riguardo la formulazione integrale e variazionale, il principio dei lavori virtuali (23) si modifica come segue:

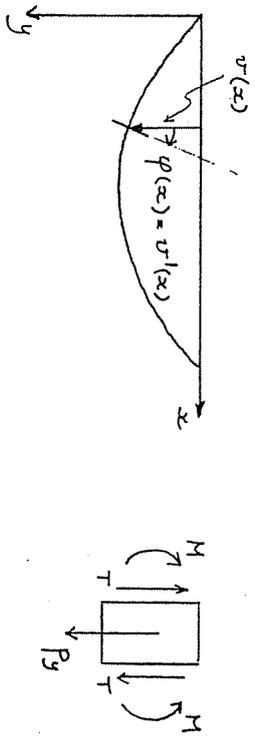
$$\int_0^l (EA u' \delta u' + EI v'' \delta v'') dx = \int_0^l [P_x \delta u + (P_y - m') \delta v] dx + \text{termini al contorno}$$

e l'energia potenziale totale (25) si scrive:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EA u'^2 + EI v''^2) dx - \int_0^l [P_x u + (P_y - m') v] dx + \text{termini al contorno}$$

Entrambi i principi possono essere ottenuti dalle (23) e (25) introducendo la relazione di vincolo (44).

Vale la pena di segnalare che le convenzioni usualmente adottate per spostamenti e tensioni differiscono da quelle qui introdotte (figg. 18 e 21). Facendo riferimento ai soli spostamenti e carichi trasversali la convenzione "tecnica" (vedi figura) considera gli spostamenti v' e i carichi P_y positivi verso il basso, le rotazioni orarie, e il taglio orario.



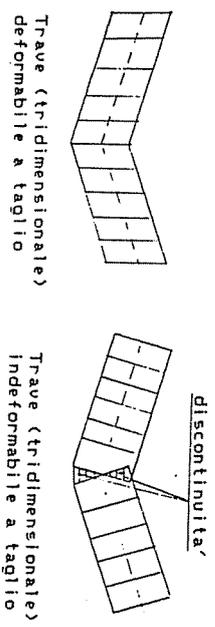
Le relazioni precedentemente ottenute si riscrivono come segue:

$$\frac{dT}{dx} = -P_y \quad EI v'''' = P_y \quad v' = \varphi$$

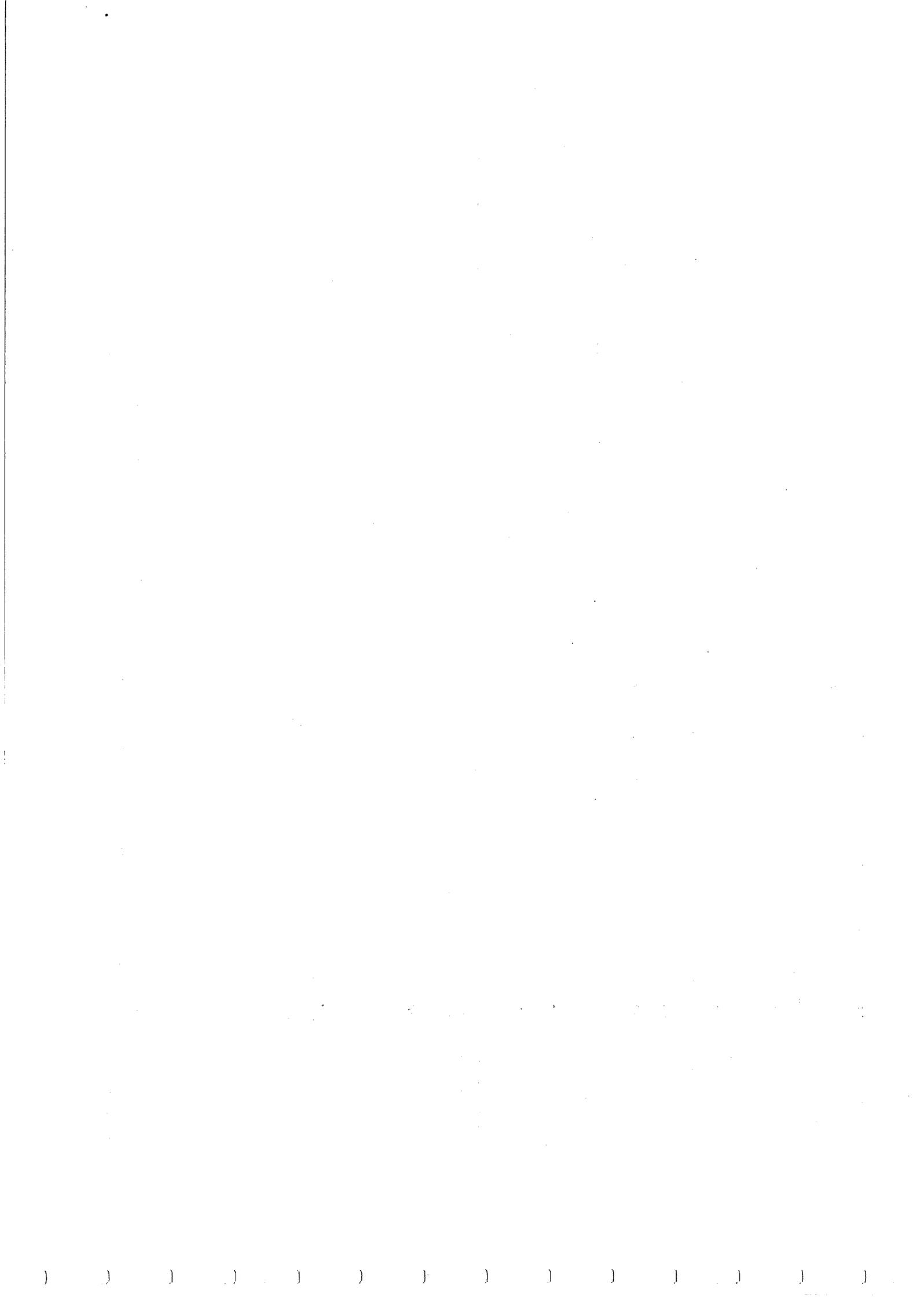
$$\frac{dN}{dx} = T \quad EI v''' = -M \quad \kappa = -v''$$

avendo cambiato segno a P_y , T , v' , φ .

A conclusione di questa trattazione si vogliono mettere in rilievo alcuni aspetti peculiari del modello di trave indeformabile a taglio in quanto comuni ad altri modelli di continuo vincolato. Il primo e' relativo all'ordine massimo di derivazione che appare nell'operatore cinematico D (e quindi in quello di equilibrio D^*), nel caso in esame pari a due. Perche' la funzione $v(x)$ sia cinematicamente ammissibile deve quindi essere continua con derivata prima continua (cioe' di classe C^1) anziche' soltanto continua (cioe' di classe C^0) come richiesto dalla cinematica del modello non vincolato. La circostanza traduce il fatto meccanico che in una trave (tridimensionale) indeformabile a taglio la linea d'asse non puo' esibire punti angolosi in quanto in corrispondenza di essi si avrebbe discontinuita' degli spostamenti nei punti esterni all'asse (fig. 28); i



Trave (tridimensionale) deformabile a taglio
Trave (tridimensionale) indeformabile a taglio
fig. 28



punti materiali della trave sono infatti vincolati ad appartenere al piano normale all'asse, a differenza di quanto accade nel modello non vincolato dove le rotazioni sono indipendenti dagli spostamenti dell'asse.

In generale le condizioni di vincolo interno aumentano l'ordine di continuit  richiesta alle variabili di configurazione; cio' non comporta alcuna difficolt  se si ricerca la soluzione in forma chiusa, ma introduce alcune complicazioni nell'ambito di tecniche numeriche di soluzione (vedi cap. 8).

Una seconda conseguenza dell'introduzione delle condizioni di vincolo   che la struttura formale del problema differenziale  :

$$L u = b \quad \text{in } \mathcal{D} \\ B_i u = \bar{\phi}_i \quad \text{su } \partial \mathcal{D} \quad (i=1, \dots, 4)$$

cioe' differisce nelle condizioni al contorno da quella espressa dalle (1.19) per il caso generale. Nelle precedenti $\bar{\phi}_i$ rappresenta uno spostamento su $\partial \mathcal{D}_u$ o una forza su $\partial \mathcal{D}_f$; in particolare quindi le condizioni geometriche non sono piu' del tipo $u = \bar{u}$, ma implicano delle derivate delle variabili u , come si vede dalle (51).

Quale esempio di soluzione del problema della linea elastica si risolve il sistema in fig. 29. L'equazione (49₂) si scrive:

$$E I u'''' = -P \\ \text{ed ammette l'integrale generale}$$

$$v(x) = -\frac{P}{EI} \frac{x^4}{24} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

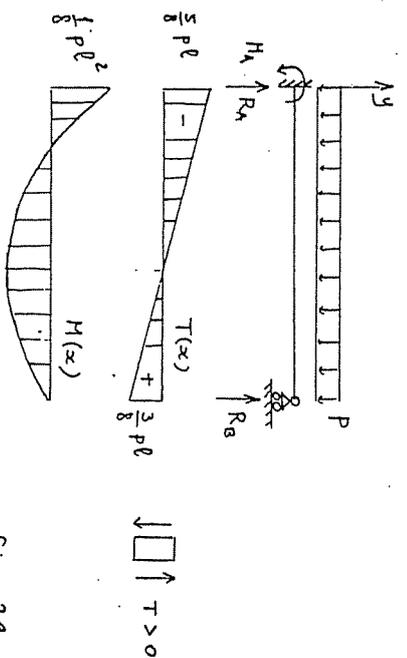


fig. 29

Le condizioni in A sono di tipo geometrico

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0$$

avendo fatto uso della (44); le condizioni in B sono miste:

$$v(l) = 0, \quad EI v''(l) = 0$$

avendo utilizzato la (48₂). Dalle condizioni in A si ricava $c_3 = c_4 = 0$; da quelle in B:

$$c_1 l^3 + c_2 l^2 = P l^4 / (24 EI) \\ 6 c_1 l + 2 c_2 = P l^2 / (2 EI)$$

Risolviendo il sistema si ottiene

$$c_1 = \frac{5}{48} \frac{P l^2}{EI}, \quad c_2 = -\frac{1}{16} \frac{P l^2}{EI}$$

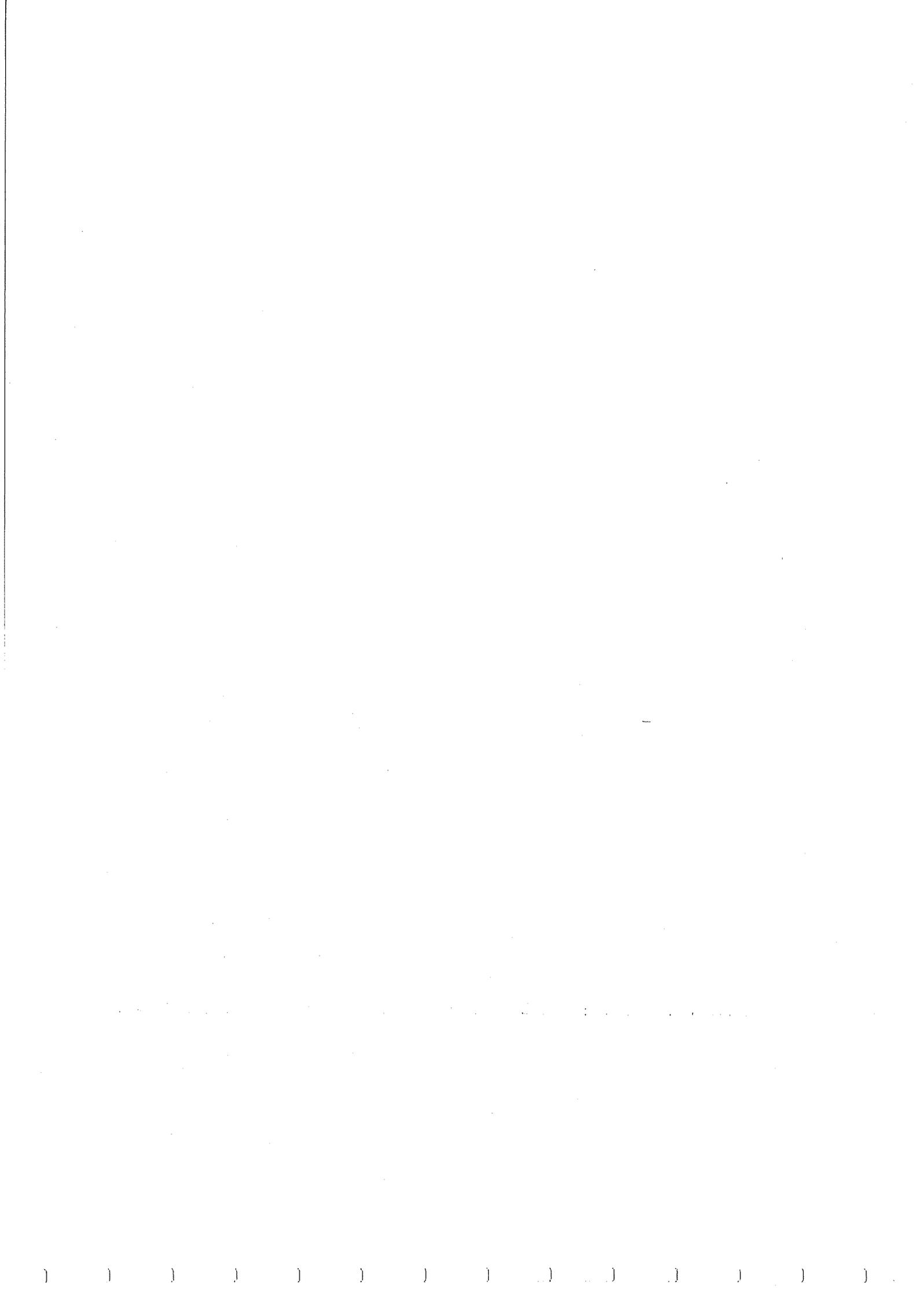
e conseguentemente, risulta:

$$v(x) = -\frac{P l^4}{EI} \left(\frac{1}{24} \frac{x^4}{l^4} - \frac{5}{48} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{16} \frac{x^2}{l^2} \right)$$

Dalle (50) e (51) si ricavano le sollecitazioni

$$M(x) = -\frac{P l^2}{8} \left(4 \frac{x^2}{l^2} - 5 \frac{x}{l} + 1 \right)$$

$$T(x) = \frac{P l}{8} \left(8 \frac{x}{l} - 5 \right)$$



ed in particolare le reazioni vincolari:

$$R_A = -T(0) = \frac{5}{8} p \ell \quad , \quad R_B = T(\ell) = \frac{3}{8} p \ell$$

$$M_A = -M(0) = p \frac{\ell^2}{8}$$

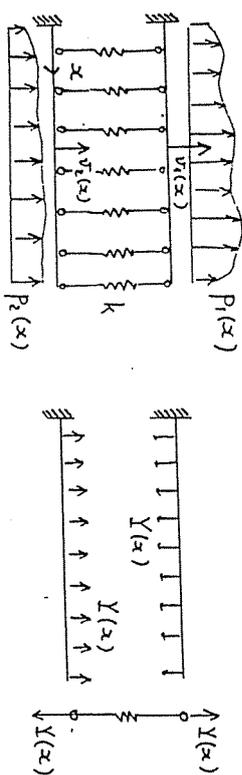
Altre condizioni di vincolo sono rappresentate in tabella.

VINCOLO	SCHEMA	CONDIZ. GEOM.	CONDIZ. MECC.
cern./carr.		$v=0$	$EIV'' = \mu$
estremo libero		—	$-EIV'''' = f$ $EIV'' = \mu$
appoggio elast.		—	$EIV'' = \mu$ $-EIV'''' = f - kv$
continuita'		$v_s = v_d$ $v_s' = v_d'$	$\langle EIV'''' \rangle_d = \langle EIV'''' \rangle_s$ $\langle -EIV'''' \rangle_d = \langle -EIV'''' \rangle_s = f$
continuita'		$v_s = v_d$ $v_s' = v_d'$	$\langle EIV'''' \rangle_d = \langle EIV'''' \rangle_s = \mu$ $\langle -EIV'''' \rangle_d = \langle -EIV'''' \rangle_s$

Le ultime due, in particolare, sono relative a forze e coppie concentrate che costituiscono discontinuita' dei carichi i punti in cui sono applicate sono assunti come punti di contorno per gli intervalli di integrazione (s=sinistra, d=destra).

5.5 La funzione di tensione nei sistemi di travi con vincoli elastici continui

Se una trave e' vincolata da organi elastici che applicano reazioni distribuite anziche' concentrate il vincolo e' detto di tipo continuo. La soluzione del problema elastico richiede la determinazione, oltre che delle sollecitazioni agenti nella trave, anche delle reazioni elastiche incognite, descritte da una o piu' funzioni dell'ascissa x . Le reazioni vincolari che appaiono nelle equazioni differenziali di equilibrio rendono il problema localmente iperstatico, cosicche' il metodo delle forze conduce ad equazioni differenziali invece che algebriche, diversamente cioe' da quanto accade in presenza di soli vincoli puntuali. Con riferimento ad un sistema semplice, come quello illustrato in figura, si vuole mostrare un'applicazione del metodo a tale classe di problemi.



Il sistema e' costituito da due mensole indeformabili a taglio, collegate in modo continuo da molle di rigidezza k [FL⁻²], che applicano forze distribuite $Y(x)$ [FL⁻¹] proporzionali all'allungamento $\Delta(x) = v_1(x) - v_2(x)$, differenza tra gli spostamenti verticali delle due travi. Il problema elastico e' governato dalle seguenti equazioni:

* Cinematica:

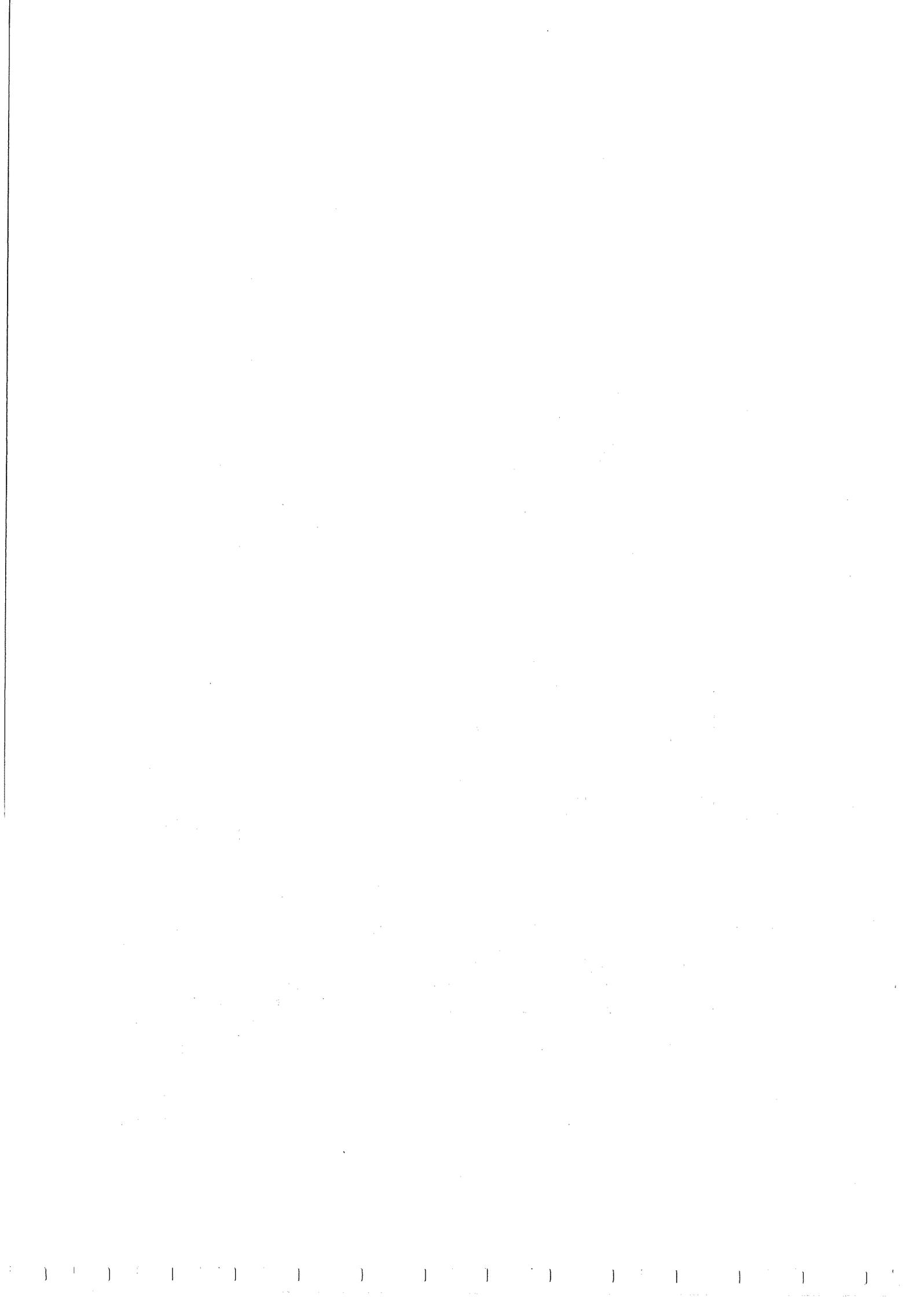
$$\begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$v_1(0) = v_2(0) = 0 \quad , \quad v_1'(0) = v_2'(0) = 0$$

* Equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

$$H_1(\ell) = H_2(\ell) = 0 \quad , \quad H_1'(\ell) = H_2'(\ell) = 0$$



* Legame costitutivo:

$$\begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ Y \end{Bmatrix}$$

Nello spirito del metodo delle forze e' necessario determinare il piu' generale stato di tensione. Una soluzione particolare puo' ottenersi assumendo $Y(x) \equiv 0$; conseguentemente $M_1(x) = M_{10}(x)$, $M_2(x) = M_{20}(x)$ sono le sollecitazioni dovute alle forze attive agenti sulle due mensole svincolate. La soluzione generale del problema omogeneo deve essere tale che $M_{1x}'' = -M_{2x}''$ (come si vede sommando le due equazioni di equilibrio) per cui le due sollecitazioni differiscono di una funzione lineare in x ; poiche' in questo caso le condizioni al contorno sono le stesse per le due travi e' $M_{1x}' = -M_{2x}'$. Introducendo una funzione di tensione $\chi(x)$ puo' perciò porsi $M_{1x}(x) = -\chi(x)$, $M_{2x}(x) = \chi(x)$, $Y(x) = \chi''(x)$. La soluzione generale del problema non omogeneo si scrive:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \chi$$

per cui risulta definito l'operatore \mathcal{A} . Le deformazioni corrispondenti allo stato di tensione si ricavano dal legame costitutivo:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{M_{10}}{EI_1} - \frac{\chi}{EI_1} \\ \chi_2 &= \frac{M_{20}}{EI_2} + \frac{\chi}{EI_2} \\ \Delta &= \frac{1}{k} \frac{d^2 \chi}{dx^2} \end{aligned}$$

L'equazione esplicita di congruenza si ottiene tramite l'operatore aggiunto di \mathcal{A} :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Come controllo, l'equazione e' identicamente soddisfatta dalle equazioni implicite di congruenza. Esprimendo le deformazioni in termini di tensione si ottiene infine

$$\chi''''(x) + 4\beta^4 \chi(x) = \phi(x)$$

dove si e' posto:

$$\beta^4 = \frac{k}{4} \left(\frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2} \right)$$

$$\phi(x) = k \left(\frac{M_{10}}{EI_1} - \frac{M_{20}}{EI_2} \right)$$

L'equazione del quarto ordine ammette la soluzione generale

$$\chi(x) = \chi_0(x) + e^{\beta x} (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \sin \beta x + c_4 \cos \beta x)$$

dove $\chi_0(x)$ e' una soluzione particolare e c_i sono costanti arbitrarie. Esprimendo le condizioni meccaniche in termini di $\chi(x)$, tenuto conto che $M_{10}(x)$ e $M_{20}(x)$ gia' le soddisfano, si ha:

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 0$$

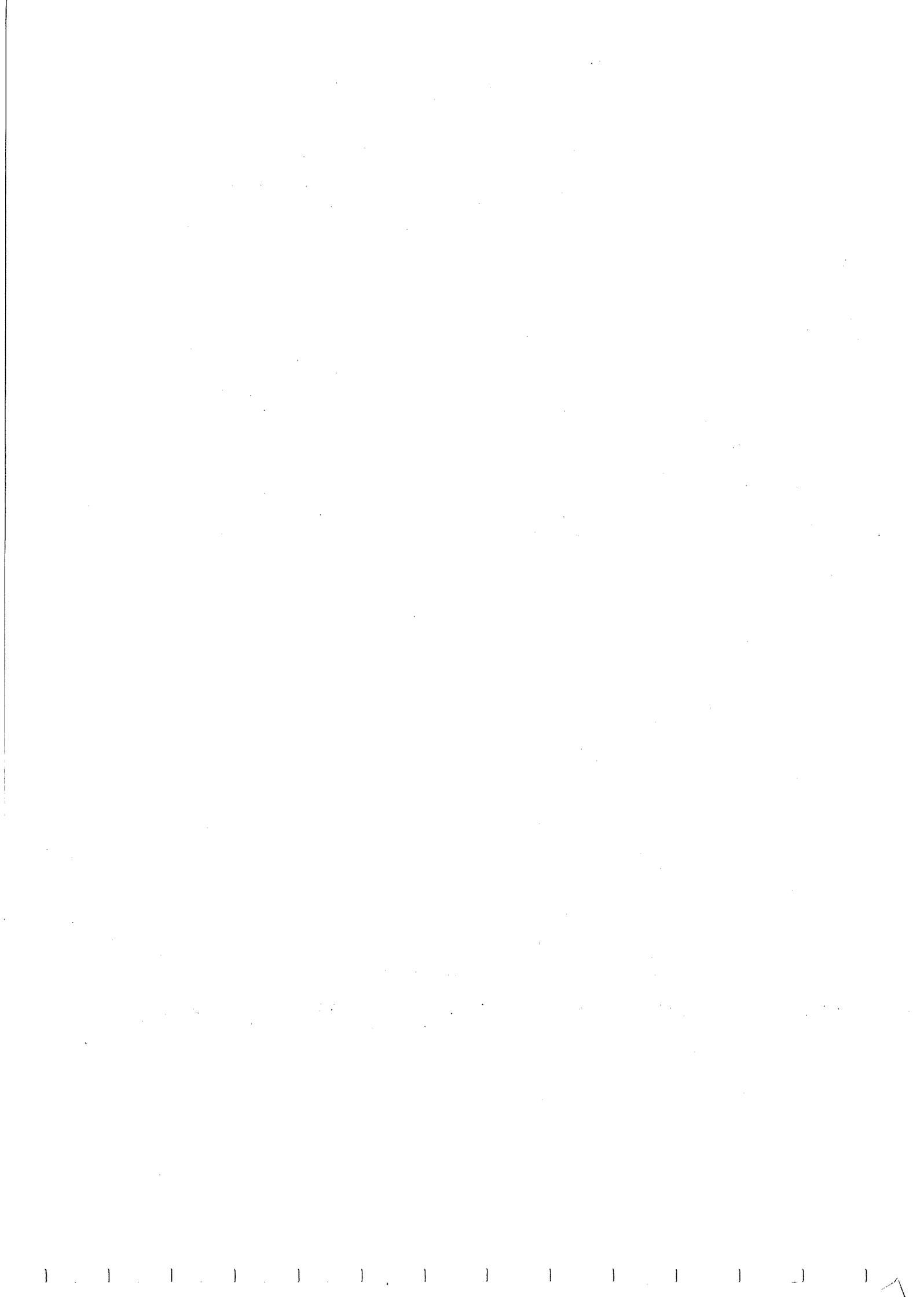
Le condizioni geometriche al contorno implicano che $\Delta(0) = 0$, $\Delta'(0) = 0$ e quindi

$$\chi''(0) = 0, \quad \chi'''(0) = 0$$

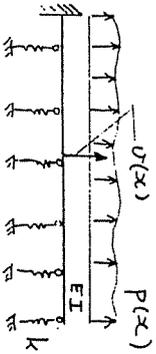
Le quattro condizioni in χ permettono di determinare le costanti c_i e quindi risolvere il problema. Va osservato comunque che in problemi piu' complessi (ad esempio lo stesso sistema con una trave vincolata in modo diverso dall'altra) la scrittura diretta delle condizioni geometriche in termini di tensione puo' risultare non agevole, in quanto comporta il calcolo degli spostamenti come integrali delle sollecitazioni. In tali casi risulta pertanto piu' conveniente far uso del teorema dei lavori virtuali complementare o dell'energia complementare totale, che forniscono automaticamente le condizioni cercate.

Si conclude infine osservando che l'equazione differenziale del quarto ordine descrittiva anche il comportamento della trave su suolo elastico (suolo alla Winkler) riportata in figura. Assumendo infatti che la trave superiore del sistema prima esaminato sia il suolo, e' sufficiente porre $EI_2 = EI$, $EI_1 = \infty$ nell'equazione differenziale, ottenendo cosi'

$$\chi''''(x) + \frac{k}{EI} \chi(x) = -\frac{k}{EI} M_0(x)$$



in cui $H_0(x)$ soddisfa la condizione di equilibrio $H_0''(x) = P(x)$ e $K(x)$ rappresenta il momento equilibrato con la reazione delle molle. Le condizioni al contorno, che restano immutate nel problema in esame, sono in tal caso sempre di facile scrittura in quanto lo spostamento trasversale si identifica con la deformazione $\Delta(x)$ ed e' quindi subito esprimibile in termini di tensione.



5.6 Genni sul problema tridimensionale della trave rettilinea

Se la trave non e' vincolata ad appartenere ad un piano ma e' libera di assumere, compatibilmente con i vincoli interni ed esterni, una qualsiasi configurazione nello spazio, il problema elastico si modifica come segue.

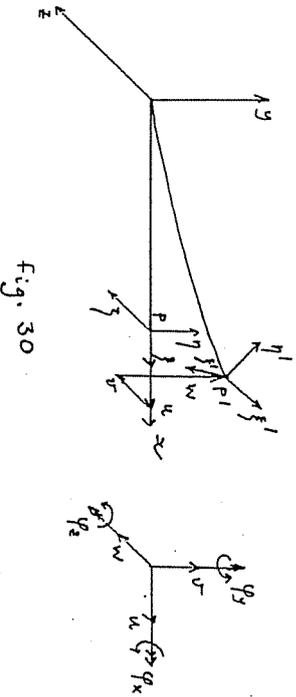


fig. 30

Il vettore delle variabili di configurazione elenca le tre componenti di traslazione u, v, w e le tre componenti di rotazione ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z che portano la terna $P \xi \eta \zeta$ nella posizione finale $P' \xi' \eta' \zeta'$ (fig. 30)

$$u = \{ u \quad v \quad w \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z \} \quad (55)$$

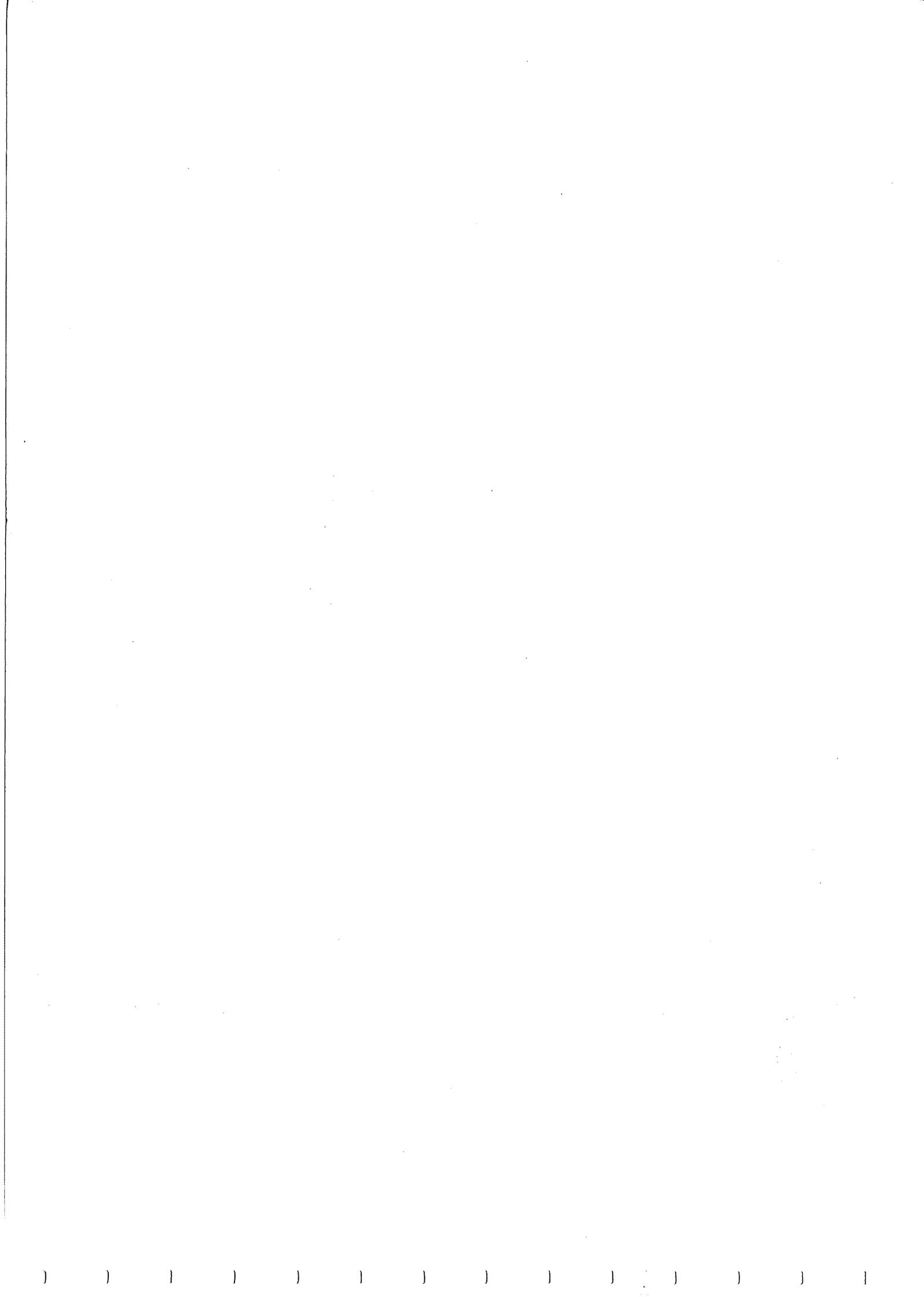
Le equazioni di compatibilita' cinematica si ottengono con il procedimento illustrato nel paragrafo 5.1 e risultano

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \theta \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad (56)$$

dove ϵ, γ_y e γ_z coincidono con le deformazioni ϵ, γ, χ del problema piano (eq.(5)), γ_z e χ_y sono la deformazione a taglio e la curvatura fuori del piano, ed inoltre θ e' la curvatura torsionale che misura la velocita' con cui le sezioni ruotano intorno all'asse della trave.

Le equazioni di equilibrio si scrivono

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ T_x \\ H_x \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (57)$$



dove N , T_y ed M_z coincidono con N , M , T del problema piano (eq.(8)), T_z ed M_y sono taglio e momento fuori del piano ed M_z e' il momento torcente. Sollecitazioni e carichi sono assunti positivi come indicato in fig.31.

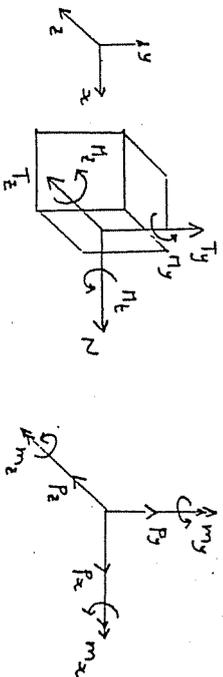


fig.31

Le (56) e (57) mostrano che la trave nello spazio e' un sistema staticamente e cinematicamente determinato per vincoli interni.

Il legame costitutivo e' assunto diagonale:

$$\begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta \\ \chi_y \\ \chi_z \end{Bmatrix} \quad (58)$$

dove A_y e A_z sono le aree di taglio della sezione trasversale, T_y , T_z i momenti centrali d'inerzia e J il momento d'inerzia torsionale.

Le equazioni (56)-(58) mostrano che il problema fuori del piano e' disaccoppiato da quello nel piano e puo' essere studiato separatamente per sovrapposizione di effetti. In

particolare, impostando il problema in termini di spostamento, e' necessario risolvere quattro sottoproblemi indipendenti:

- * equilibrio longitudinale, nella sola variabile $w(x)$;
- * equilibrio nel piano xy , nelle due variabili $v(x)$, $q_z(x)$ (oppure solo in $v(x)$ se si impone $\delta_y = 0$);
- * equilibrio nel piano xz , nelle due variabili $w(x)$, $q_y(x)$ (oppure solo in $w(x)$ se si impone $\delta_z = 0$);
- * equilibrio alla rotazione lungo l'asse, nella sola variabile θ .

I primi tre problemi sono gia' stati illustrati; il quarto e' governato dall'equazione del secondo ordine

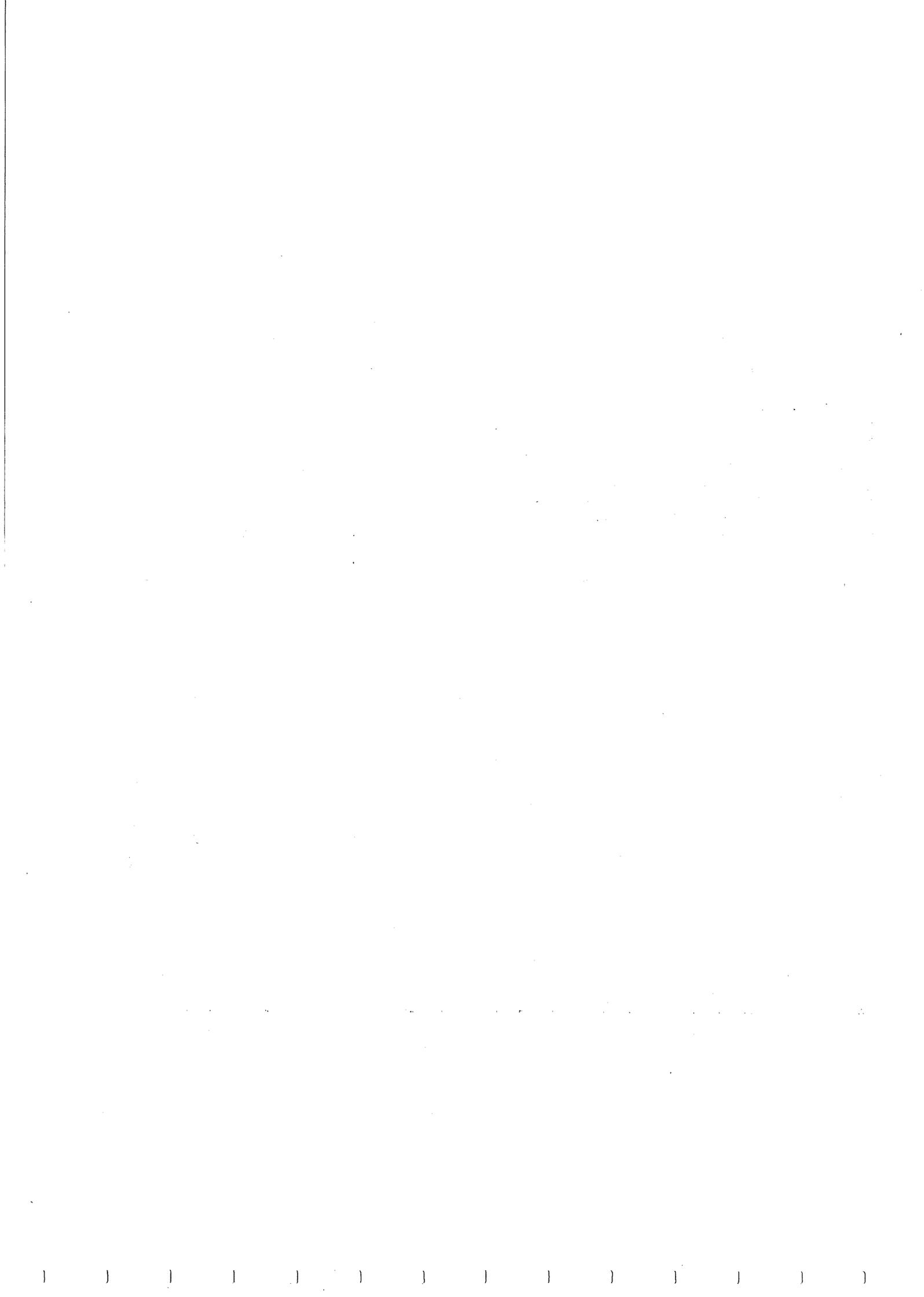
$$-GJ \frac{d^2 \theta}{dx^2} = m_x \quad (59)$$

analoga a quella dell'asta. Le condizioni al contorno si scrivono

$$\begin{aligned} q_z &= \bar{q}_z & \text{su } \partial \mathcal{B}_w \\ nGJ \frac{dq_z}{dx} &= \mu_z & \text{su } \partial \mathcal{B}_f \end{aligned} \quad (n=\pm 1) \quad (60)$$

dove μ_z sono le coppie torcenti applicate agli estremi.

Naturalmente se il sistema e' costituito da piu' travi (telai) i quattro problemi sono disaccoppiati solo localmente (cioe' a livello di equazioni differenziali) ma risultano invece accoppiati per effetto delle condizioni al contorno, come gia' constatato per i sistemi piani.



6. CONTINUO POLARE BIDIMENSIONALE: PIASTRA

6.1 Modello bidimensionale

Con il nome di piastra si indica un corpo tridimensionale di forma cilindrica di altezza piccola rispetto alle dimensioni della base. Poiche' lo spessore e' piccolo e' possibile introdurre la seguente ipotesi: I segmenti materiali inizialmente ortogonali alle basi del cilindro si mantengono rettilinei durante la deformazione. L'ipotesi, analoga a quella di rigidita' delle sezioni trasversali della trave, puo' essere giustificata esprimendo gli spostamenti dei punti appartenenti al segmento materiale attraverso uno sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine. La piastra puo' percio' essere direttamente modellata come continuo bidimensionale polare, costituito cioe' da punti materiali appartenenti ad una superficie piana e da direttori inizialmente ortogonali alla superficie. La posizione dei punti materiali individua la posizione del piano medio del corpo tridimensionale, l'orientazione dei direttori individua l'orientazione dei segmenti materiali. I punti si scambiano azioni di contatto costituite da forze e coppie, queste ultime giacenti esclusivamente in piani ortogonali a quello della superficie; le forze e le coppie costituiscono le caratteristiche della sollecitazione, o tensioni generalizzate.

Nel seguito si considereranno solo spostamenti e forze esterne ortogonali al piano, in quanto il problema nel piano puo' essere studiato indipendentemente utilizzando il modello di lastra gia' introdotto nel cap.4; i due problemi risultano infatti disaccoppiati, in analogia a quanto accade per la trave rettilinea e per l'asta.

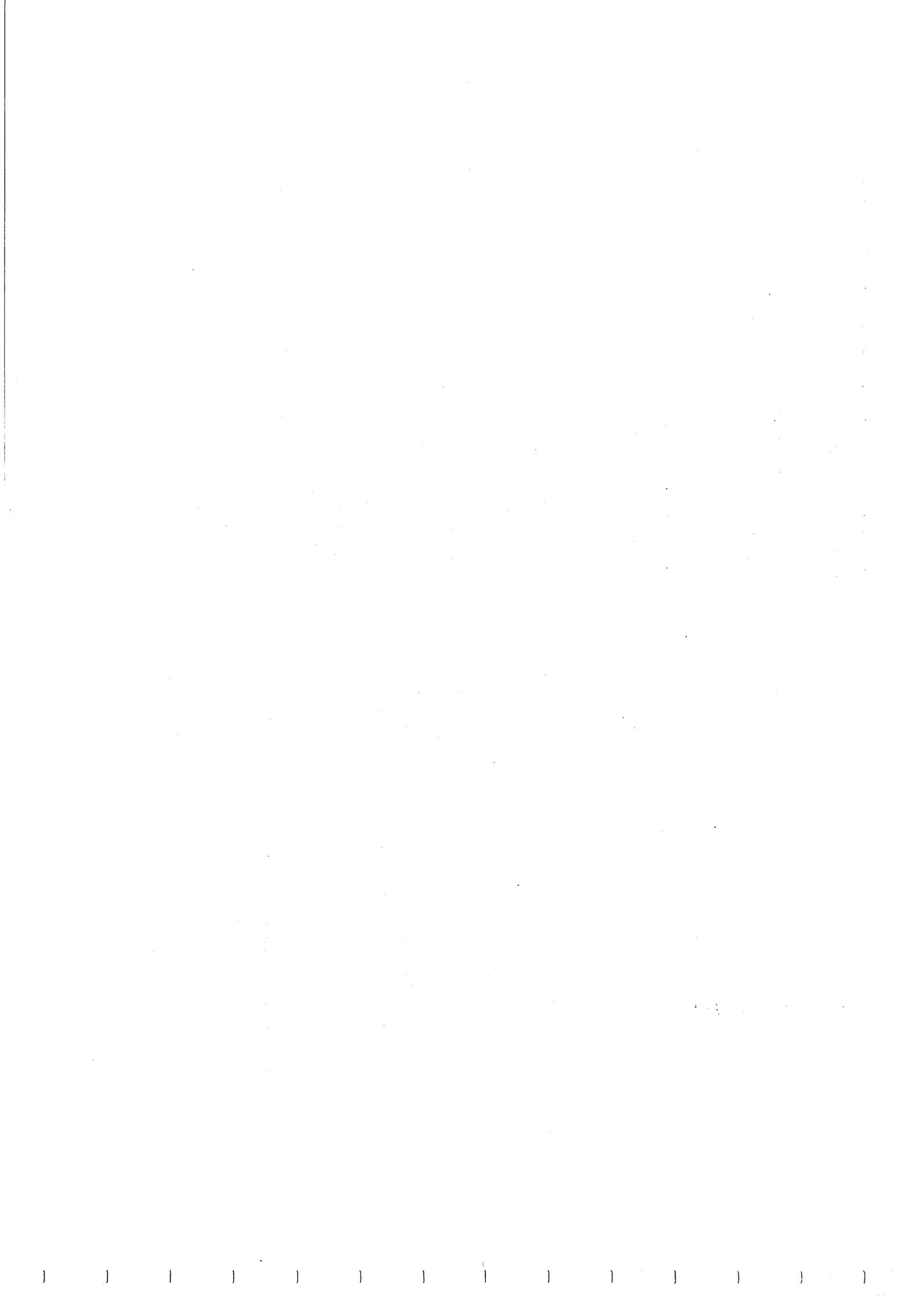
Nei paragrafi successivi si analizzano i tre aspetti del problema elastico, geometrico, statico, reologico e si formulano le equazioni risolventi nello spirito del metodo degli spostamenti.

6.2 Cinematica

Detto x, y il piano della piastra (fig.32), la posizione del generico punto materiale $P(x, y)$ nella configurazione deformata e' individuata dalle componenti di spostamento $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ rispetto agli assi x, y, z e dalle rotazioni $\varphi_x(x, y)$ e $\varphi_y(x, y)$, rispettivamente intorno agli assi x ed y . La rotazione $\varphi_z(x, y)$ non costituisce grado di liberta' in quanto il punto materiale non ha orientazione nel piano x, y ; per spostamenti nel piano il comportamento della piastra e' infatti descritto dal continuo di Cauchy (modello di lastra).

Limitandoci a considerare, per quanto detto in precedenza, i soli spostamenti trasversali, il vettore delle variabili di configurazione e':

$$u = \left\{ w \quad \varphi_x \quad \varphi_y \right\}^T \quad (1)$$



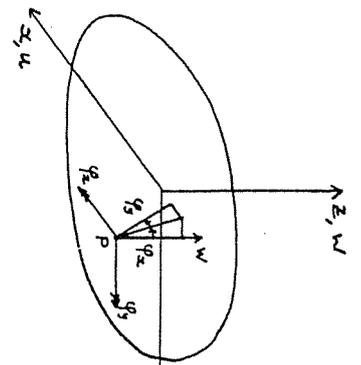


Fig. 32

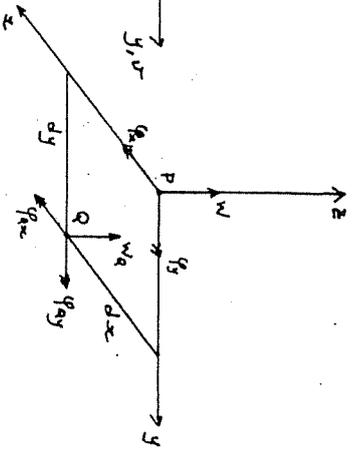


Fig. 33

Per descrivere la deformazione si considerino due punti infinitamente vicini, $P(x, y)$ e $Q(x+dx, y+dy)$ (fig. 33), i cui spostamenti sono rispettivamente $\{u\}$ e $\{uq\} = \{u\} + \{du\}$. Lo spostamento relativo $\{du\}$ ha componenti:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$d\varphi_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} dy \quad (2)$$

$$d\varphi_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy$$

Per ottenere le grandezze di deformazione e' necessario depurare le (2) del generico spostamento rigido, che risulta

$$dw = \varphi_x dy - \varphi_y dx$$

$$d\varphi_x = 0 \quad (3)$$

$$d\varphi_y = 0$$

Sottraendo le (3) dalle (2) si ottiene la deformazione pura:

$$\begin{Bmatrix} dw \\ d\varphi_x \\ d\varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x & \delta_y \\ \Theta_x & \chi_y \\ -\chi_x & \Theta_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (4)$$

in cui si e' posto

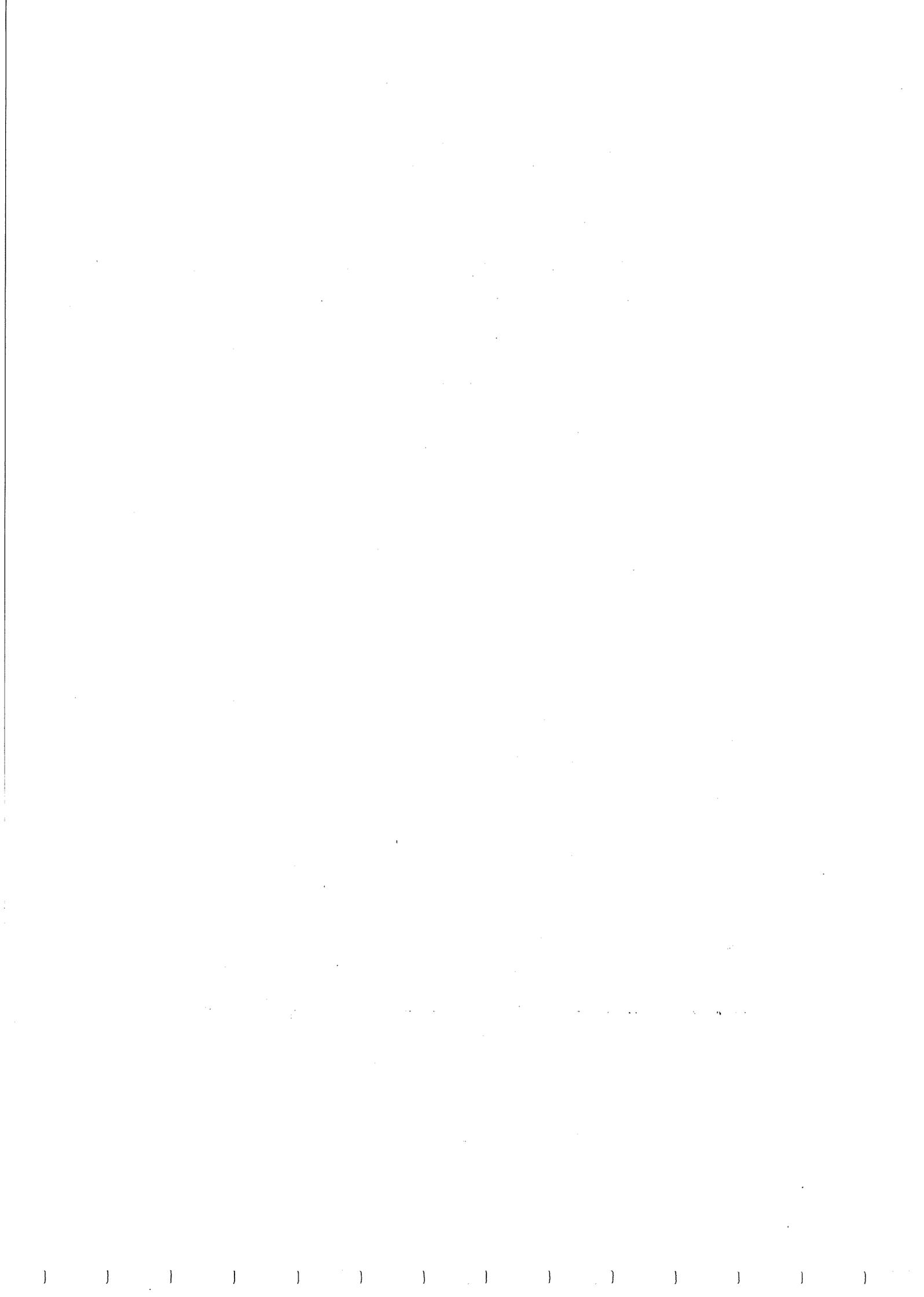
$$\delta_x = w_{,x} + \varphi_y \quad , \quad \delta_y = w_{,y} - \varphi_x$$

$$\chi_x = -\varphi_{y,x} \quad , \quad \chi_y = \varphi_{x,y} \quad (5)$$

$$\Theta_x = \varphi_{x,x} \quad , \quad \Theta_y = \varphi_{y,y}$$

e dove si e' indicata con una virgola l'operazione di derivazione rispetto alla variabile che la segue. Le (5) costituiscono le equazioni implicite di congruenza dei problema; poste nella forma $\varepsilon = Du$ si scrivono:

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (5')$$



Le sei grandezze γ , κ , Θ che appaiono nel vettore \mathcal{E} sono le componenti scalari della deformazione che assumono il seguente significato:

* γ_x , γ_y sono le deformazioni a taglio (o scorsimenti angolari) e misurano la variazione degli angoli inizialmente retti tra direttori e superficie;

* κ_x e κ_y , sono le curvature flessionali e misurano la velocità con cui varia la rotazione dei direttori intorno alla normale all'asse (rotazione in un piano che contiene l'asse);

* Θ_x , Θ_y sono le curvature torsionali, pari alla velocità di rotazione dei direttori intorno all'asse a cui si riferiscono (rotazione nel piano normale all'asse).

Le deformazioni sono illustrate in fig. 34; si noti che le sei componenti di deformazione sono assunte positive se a tre a tre concordi con quelle di due travi orientate secondo i versi positivi degli assi x ed y , vincolate ad appartenere ai piani zx e zy . Le rotazioni dei direttori sono determinate dalle (4), per quattro punti distinti di coordinate $\pm dx$, $\pm dy$.

Le sei grandezze indipendenti di deformazione possono naturalmente essere combinate linearmente per definire altre grandezze. In particolare risulta conveniente far riferimento, invece che alle due curvatures torsionali Θ_x e Θ_y , alla loro somma e differenza definendo le due nuove curvatures

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= \Theta_x - \Theta_y \\ \gamma &= \Theta_x + \Theta_y \end{aligned} \quad (6)$$

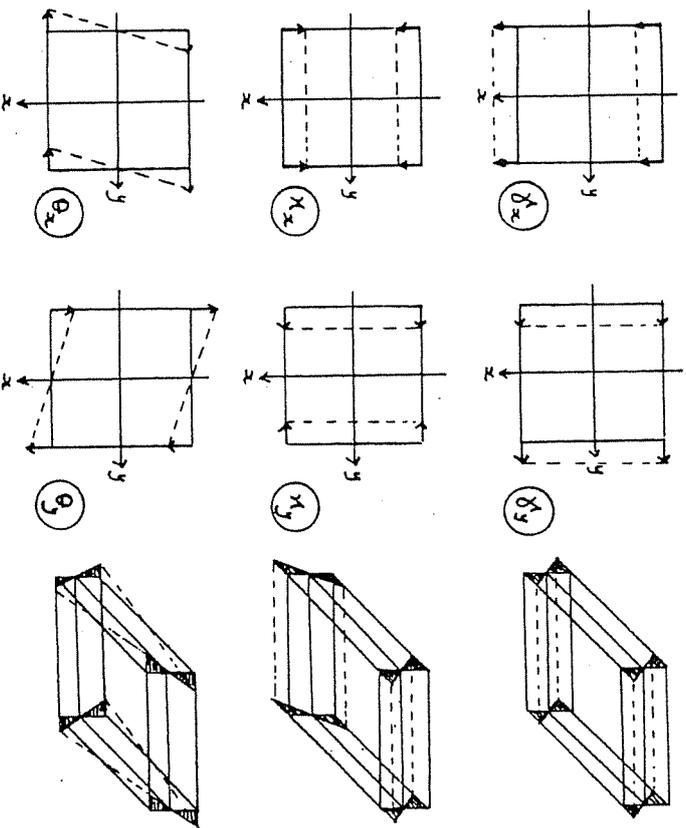
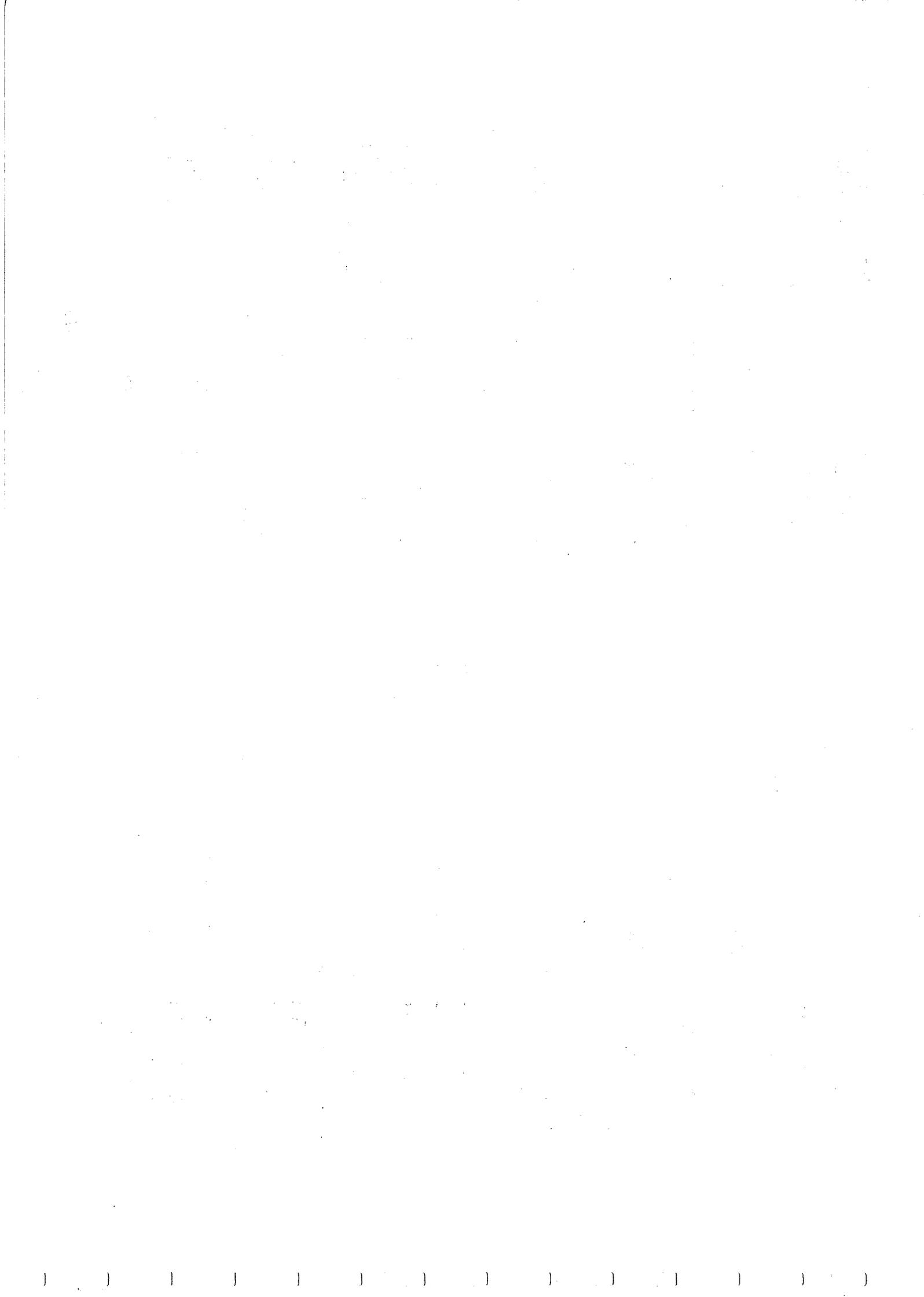


fig. 34

Dalle (6) si ricava:

$$\Theta_x = \frac{1}{2} (\gamma + \kappa_{xy}) \quad , \quad \Theta_y = \frac{1}{2} (\gamma - \kappa_{xy}) \quad (7)$$

per cui le (4) e (5') possono essere sostituite da:



$$\begin{Bmatrix} dw \\ d\varphi_x \\ d\varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_y \\ \frac{1}{2}(\gamma + \kappa_{xy}) & \kappa_y \\ -\kappa_x & \frac{1}{2}(\gamma - \kappa_{xy}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Il significato geometrico di κ_{xy} e γ e' illustrato in fig.35; κ_{xy} e' la parte simmetrica della deformazione torsionale e γ la parte antisimmetrica.

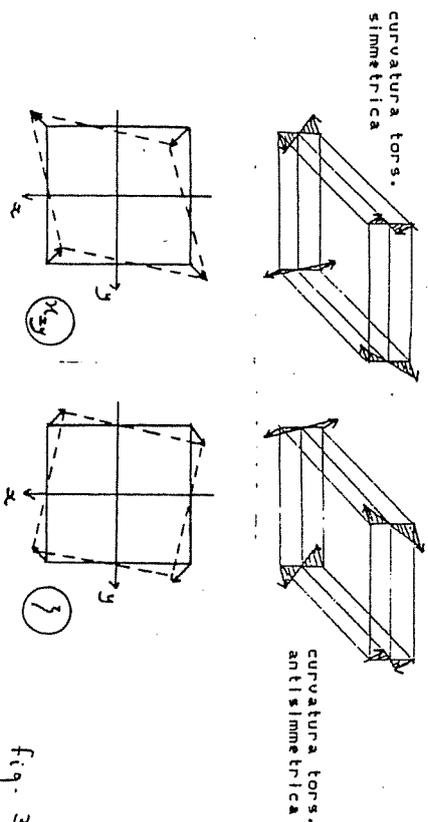


fig. 35

Alle equazioni di compatibilita' cinematica, (5') oppure (9), vanno aggiunte le condizioni al contorno

$$w = \bar{w}, \quad \varphi_x = \bar{\varphi}_x, \quad \varphi_y = \bar{\varphi}_y \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u \quad (10)$$

Il problema cinematico e' governato da sei equazioni differenziali in tre incognite; la piastra e' pertanto un sistema cinematicamente impossibile.

6.3 Equilibrio

La piastra sia sottoposta a forze trasversali $p(x,y)$ e coppie $m_x(x,y)$, $m_y(x,y)$ ripartite sulla superficie (fig.36a). Lo stato di sollecitazione dipende da sei grandezze scalari, sforzi di taglio, momenti flettenti e torcenti

$$\mathcal{E} = \left\{ T_x \quad T_y \quad M_x \quad M_y \quad M_{tx} \quad M_{ty} \right\}^T \quad (11)$$

assunti positivi se concordi con le sollecitazioni di due travi disposte rispettivamente secondo le x e le y crescenti (fig.36b,c). Le tensioni generalizzate T ed M

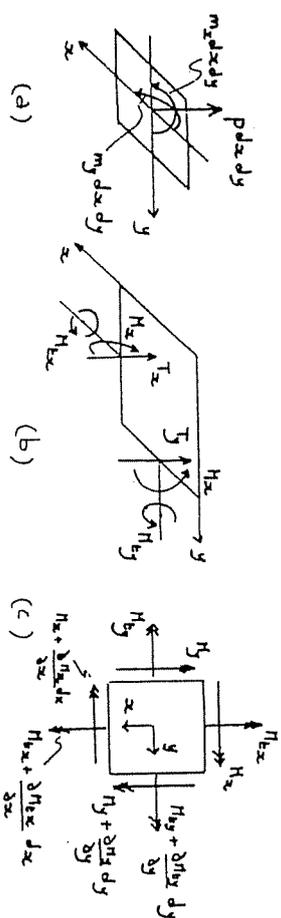


fig. 36



hanno rispettivamente dimensioni fisiche $[F L^{-1}]$, $[F]$ e rappresentano forze e coppie per unita' di lunghezza.

Imponendo le condizioni di equilibrio alla traslazione secondo l'asse z e le condizioni di equilibrio alla rotazione secondo gli assi x ed y si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p &= 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{tx}}{\partial x} + T_y + m_x &= 0 \\ -\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{ty}}{\partial y} - T_x + m_y &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

oppure, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ H_x \\ H_y \\ H_{tx} \\ H_{ty} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} \quad (12')$$

Le altre tre equazioni di equilibrio (di lastra) sono identicamente soddisfatte. L'operatore di equilibrio D^* definito dalle (12') e l'aggiunto dell'operatore cinematico definito dalle (5'); in queste ultime appaiono le grandezze cinematiche duali di tensioni e forze.

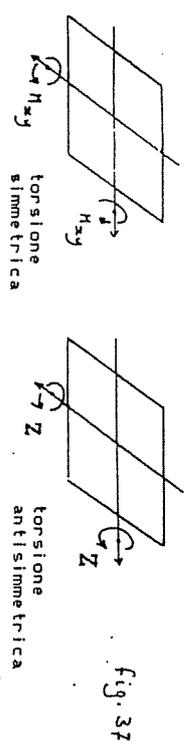
Come gia' fatto nel problema cinematico, risulta conveniente scomporre la sollecitazione di torsione nella

sua parte simmetrica ed antisimmetrica definendo le nuove tensioni:

$$\begin{aligned} N_{xy} &= \frac{1}{2} (M_{tx} - M_{ty}) \\ N_z &= \frac{1}{2} (M_{tx} + M_{ty}) \end{aligned} \quad (13)$$

il cui significato e' illustrato in fig. 37. Dalle (13) si ricava:

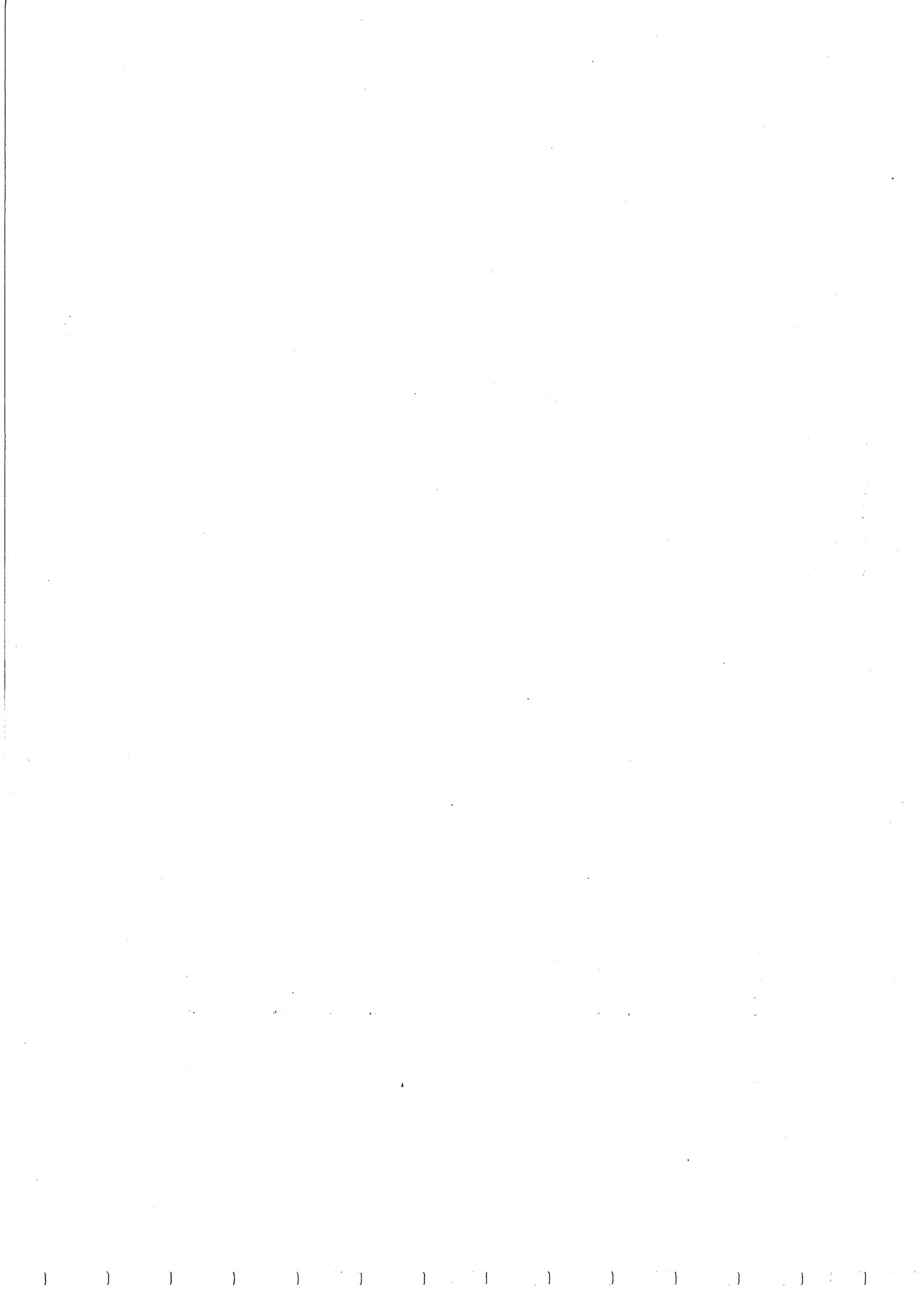
$$M_{tx} = N_z + N_{xy} \quad / \quad M_{ty} = N_z - N_{xy} \quad (14)$$



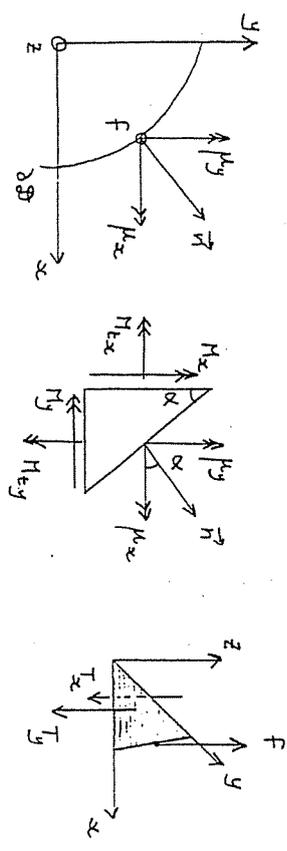
Le condizioni di equilibrio (12), in termini delle nuove tensioni, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ H_x \\ H_y \\ N_{xy} \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix} \quad (15)$$

L'operatore di equilibrio D^* che appare nelle (15) e l'aggiunto dell'operatore cinematico D definito dalle (?);



i momenti torcenti M_{xy} e Z sono pertanto le grandezze meccaniche duali delle curvature torsionali χ_{xy} e ζ .
 Le condizioni al contorno su $\partial\mathcal{B}_F$ si ottengono imponendo l'equilibrio di un elemento di superficie che ha un lato giacente sulla frontiera.



Dette f , μ_x , μ_y le forze e le coppie assegnate al contorno, dall'equilibrio si ha

$$T_x n_x + T_y n_y = f$$

$$M_{tx} n_x + M_{ty} n_y = \mu_x$$

$$M_{ty} n_y - M_{tx} n_x = \mu_y$$

o, nella forma matriciale $NG=f$,

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & -n_x & 0 & 0 & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{tx} \\ M_{ty} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix} \quad (16')$$

dove $n_x = \cos\alpha$ ed $n_y = \sin\alpha$, sono i coseni direttori nella normale uscente. Se si fa invece riferimento alle grandezze M_{xy} e Z le (16) si modificano come segue:

$$\begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_y & n_x & n_x \\ 0 & 0 & -n_x & 0 & -n_y & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ \mu_x \\ \mu_y \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Le (12) con le condizioni al contorno (16) (oppure le (15) con le condizioni (17)) costituiscono il problema statico, che risulta essere indeterminato di grado 3.

6.4 Legame costitutivo

Un legame sforzi-deformazioni sufficientemente generale puo' essere assunto nella forma:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & & & & \\ & c_{22} & & & & \\ & & c_{33} & c_{34} & & \\ & & c_{43} & c_{44} & & \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (18)$$



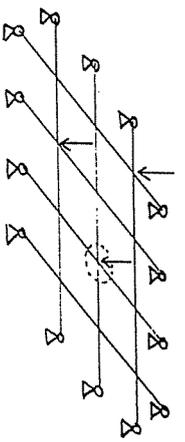
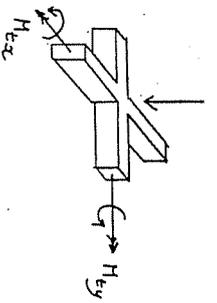


fig. 39



L'introduzione della condizione $Z = 0$ nel modello generale e' immediata; e' sufficiente infatti cancellare l'ultima colonna degli operatori d'equilibrio D^* ed N (eq.(15) e (17)) e corrispondentemente l'ultima riga dell'operatore cinematico D (eq.(9)) e l'ultima riga e colonna dell'operatore elastico C (eq.(18)). D e D^* hanno percio' dimensioni 5×3 e 3×5 , C ha dimensioni 5×5 , e le grandezze deformazione e tensione si riducono a cinque; le variabili di configurazione restano naturalmente tre. Tale modello di piastra deformabile a taglio e' detta piastra di Mindlin.

Va attentamente rimarcato il fatto che l'ipotesi $Z = 0$ non implica $\gamma_z = 0$, come appare chiaro dal legame costitutivo (18). L'eliminazione di γ_z dal vettore della deformazione dipende solo dal fatto che a questa grandezza geometrica corrisponde una grandezza meccanica che ha valore nullo e quindi un lavoro di deformazione nullo. La situazione e' identica a quella che si presenta in elasticita' tridimensionale nel caso di stato piano di tensione: alla tensione $\sigma_z = 0$ corrisponde una deformazione $\epsilon_z \neq 0$ (per effetto Poisson, dovuta alla presenza di tensioni σ_x e

σ_y). Nel modello (di lastra) che si sviluppa le grandezze di tensione sono σ_x , σ_y , τ_{xy} e quelle di deformazione ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} . Risolto il problema elastico la deformazione ϵ_z puo' essere calcolata dall'equazione di legame che non e' stata utilizzata. Analogamente, nel problema in esame, γ_z puo' essere calcolata dalla sesta equazione delle (18).

6.5.2 Piastra indeformabile a taglio

E' il modello di gran lunga piu' impiegato nelle applicazioni. Si puo' infatti mostrare, in analogia a quanto fatto per la trave, che l'effetto del taglio sulla deformazione e' trascurabile se la piastra e' sufficientemente sottile. In quest'ipotesi risulta percio' senz'altro conveniente fare riferimento ad un modello internamente vincolato di piastra indeformabile a taglio.

Dalle condizioni geometriche di vincolo

$$\gamma_x = 0, \quad \gamma_y = 0 \quad (19)$$

si ricava (eq.(5)):

$$\varphi_x = w_y, \quad \varphi_y = -w_x \quad (20)$$

Le rotazioni φ_x e φ_y non sono percio' variabili indipendenti e l'unica variabile di configurazione e' lo spostamento trasversale $w(x,y)$. Sostituendo le (20) nelle equazioni implicite di congruenza (9) si ha:



$$\begin{aligned} \chi_x &= w_{,xx} & \chi_y &= w_{,yy} \\ \chi_{xy} &= 2 w_{,xy} & \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

dalle quali si vede che le curvature flessionali χ_x e χ_y e torsionale χ_{xy} coincidono con le curvature della superficie della piastra; la curvatura ζ e' invece identicamente nulla, come diretta conseguenza delle relazioni di vincolo (19). Le relazioni deformazioni-spostamento possono perciò' scriiversi:

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{w\} \quad (22)$$

dove l'operatore cinematico D ha dimensioni 3×1 .

Si noti che, come nel caso della trave, la condizione di indeformabilita' a taglio richiede che la variabile w sia continua di classe C .

Le condizioni al contorno geometriche (10), per effetto delle relazioni di vincolo (20), si scrivono

$$w = \bar{w} \quad , \quad w_{,y} = \bar{\varphi}_x \quad , \quad w_{,x} = -\bar{\varphi}_y \quad \text{su} \quad \partial \mathcal{D}_u$$

Esse pero' non rappresentano le condizioni ai limiti del problema cinematico (22) in quanto la posizione e orientazione dei punti materiali giacenti sulla frontiera del dominio e' individuata da solo due funzioni anziche' tre, a causa della condizione di vincolo interno. Assegnata

infatti la funzione $w(x(s), y(s))$, dove S e' un'ascissa curvilinea definita su $\partial \mathcal{D}$, risulta univocamente definita la sua derivata in direzione tangente $\partial w / \partial s$ e quindi la rotazione dei direttori intorno alla normale; la rotazione intorno alla tangente e' individuata dalla derivata della funzione in direzione normale $\partial w / \partial n$. Le condizioni geometriche al contorno si scrivono perciò'

$$w = \bar{w} \quad , \quad w_{,n} = -\bar{\varphi}_s \quad \text{su} \quad \partial \mathcal{D}_u \quad (23)$$

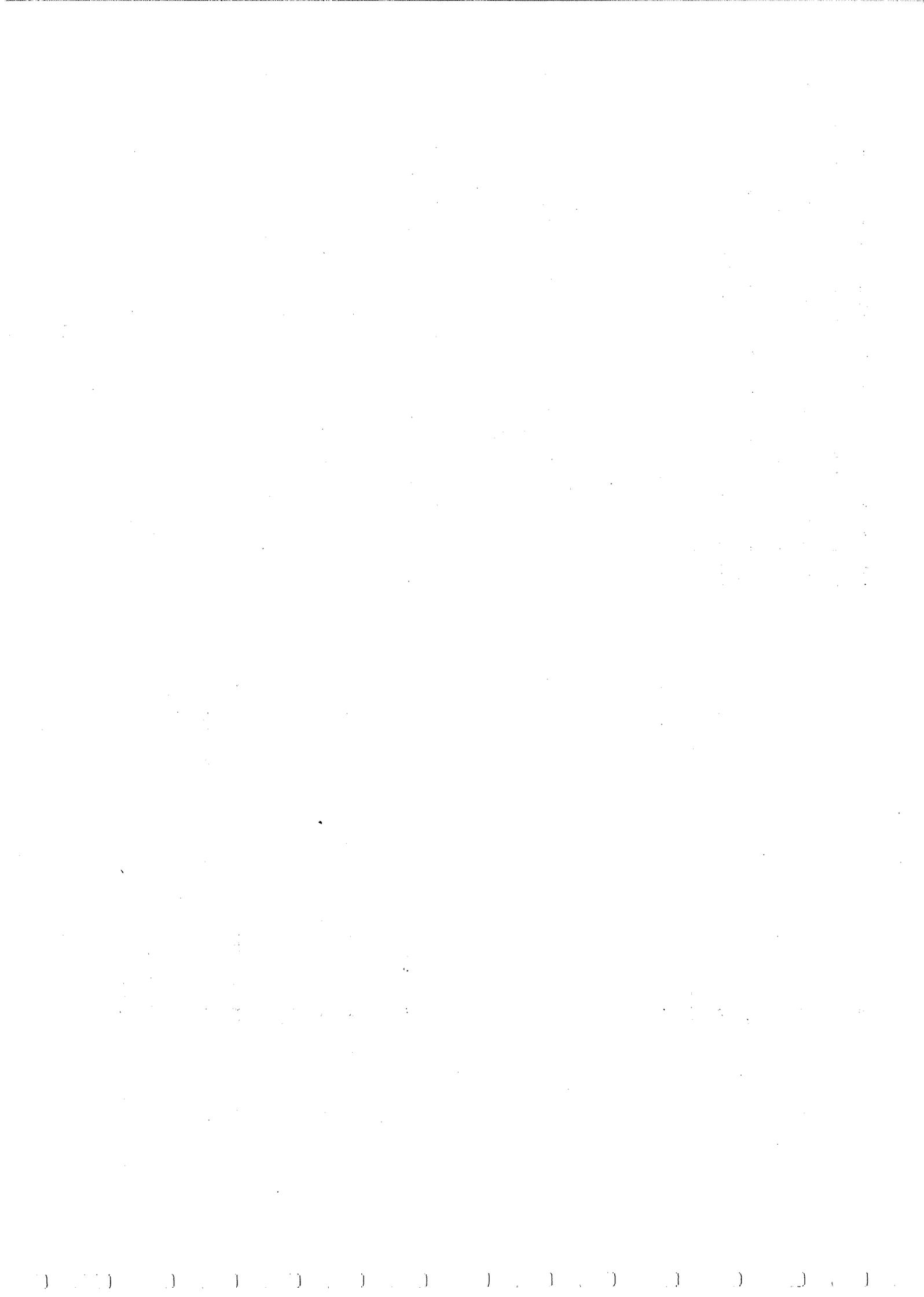
dove $w_{,n} = w_{,x} n_x + w_{,y} n_y$ e' la derivata di w secondo n , e $\bar{\varphi}_s = \bar{\varphi}_y n_x - \bar{\varphi}_x n_y$ e' la rotazione assegnata secondo la tangente. Si noti che quindi $\bar{\varphi}_x$ e $\bar{\varphi}_y$ non possono essere assegnate arbitrariamente ma devono soddisfare la condizione $\bar{\varphi}_n \equiv \bar{\varphi}_x n_x + \bar{\varphi}_y n_y = \bar{w}_{,s}$.

Passando a considerare l'aspetto statico e' necessario condensare le equazioni di equilibrio per eliminare i due sforzi di taglio T_x e T_y che non possono piu' essere ottenuti dal legame costitutivo. Derivando perciò' la (12₂) rispetto ad y e la (12₃) rispetto ad x e sottraendo membro a membro si ottiene, tenuto conto della (12₁):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \bar{P} \quad (24)$$

in cui

$$\bar{P} = P - \frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial m_y}{\partial x} \quad (25)$$



ed inoltre si e' fatto uso della posizione (13₁). Si noti che nell'equazione (24) non compare la parte antisimmetrica del momento torcente Z; il processo di condensazione degli sforzi di taglio elimina automaticamente Z, cosi' come le condizioni di vincolo implicano automaticamente $\dot{\gamma} = 0$. Naturalmente, in maniera duale a quanto prima osservato, a $\dot{\gamma} = 0$ in generale corrisponde uno sforzo $Z \neq 0$, al quale pero' non e' associato un lavoro di deformazione (si noti l'analogia con il problema dello stato piano di deformazione, per il quale e' $\epsilon_z = 0$, $\sigma_z \neq 0$). Nel seguito si considerera' il solo caso $Z = 0$. La (23) puo' essere posta nella forma $D^* \bar{\sigma} = \bar{b}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P} \end{Bmatrix} \quad (24')$$

in cui D^* e' l'aggiunto di D (eq.(22)). La forza generalizzata \bar{P} (eq.(24)) puo' essere interpretata con un ragionamento analogo a quello fatto per la trave indeformabile a taglio nel paragrafo 5.4.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno meccaniche (16) occorre innanzitutto osservare che la condizione di vincolo riduce a due il numero delle equazioni indipendenti, in analogia a quanto visto per il problema cinematico. Poiche' le variabili di configurazione lungo il contorno sono lo spostamento e la sua derivata secondo la normale al bordo, le corrispondenti forze generalizzate che in esse

compiono lavoro sono la forza di taglio di Kirchhoff (alla quale contribuisce la forza normale al piano e il momento in direzione tangente) nonche' il momento in direzione normale. Limitandoci per semplicita' a considerare una piastra rettangolare, con lati paralleli agli assi x, y, sul lato $x = \text{cost} = a$, ad esempio, il lavoro delle forze esterne si scrive:

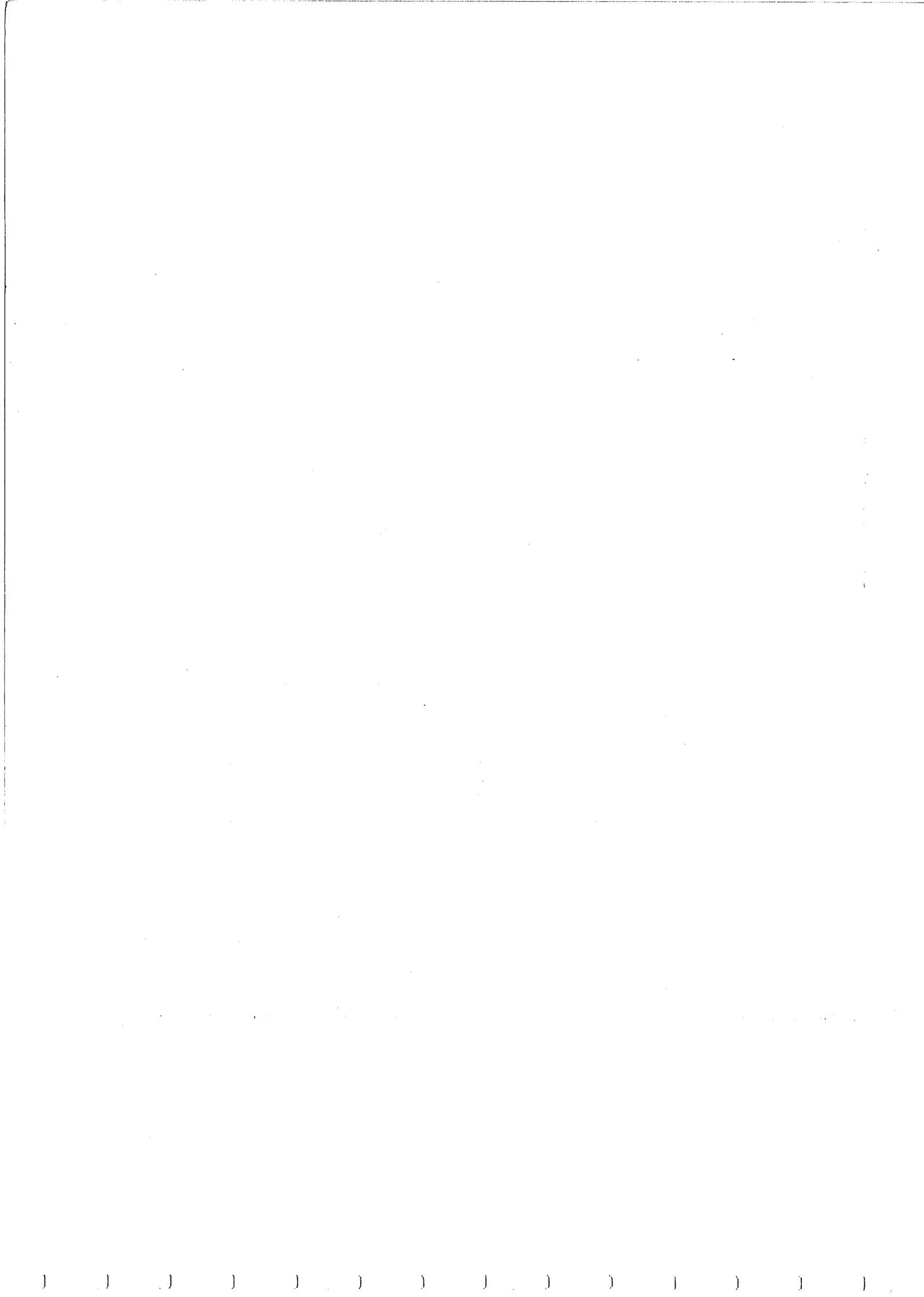
$$\begin{aligned} \delta E_e &= \int_0^b [f \delta w + \mu_x \delta \varphi_x + \mu_y \delta \varphi_y]_{x=a} dy = \\ &= \int_0^b [f \delta w + \mu_x \delta w_y - \mu_y \delta w_x]_{x=a} dy = \\ &= \int_0^b [(f - \mu_{xy}) \delta w - \mu_y \delta w_x]_{x=a} dy + [\dots]_{y=0}^{y=b} \end{aligned} \quad (26)$$

dalla quale si vede che le forze generalizzate sono $f - \mu_{xy}$ e $-\mu_y$. Facendo uso delle (16) (in cui e' $\eta_y = 0$) si ottiene

$$\begin{aligned} T_x - M_{xy,y} &= f - \mu_{xy} & \text{in } x=a \\ -M_x &= \mu_y & \end{aligned} \quad (27)$$

Analogamente, lungo il lato $y=b$, le forze generalizzate sono $f + \mu_{z,x}$ e μ_x , per cui le condizioni al contorno risultano:

$$\begin{aligned} T_y - M_{xy,x} &= f + \mu_{z,x} & \text{in } y=b \\ M_y &= \mu_x & \end{aligned} \quad (28)$$



La (26) mostra l'esistenza di reazioni elastiche concentrate nei punti angolari del contorno della piastra.

Il legame costitutivo mette in relazione le tre grandezze di tensione M_x , M_y , M_{xy} e le grandezze duali di deformazione χ_x , χ_y , χ_{xy} e può essere dedotto estraendo dalla matrice C (eq.(18)) la terza, quarta e quinta riga e colonna. Per una piastra omogenea ed isotropa si ha:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

dove

$$D_f = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (30)$$

è la rigidezza flessionale della piastra. Il legame (29) è ottenuto dal modello tridimensionale; si noti che l'operatore elastico che vi appare è proporzionale a quello della lastra (eq.(4.10)).

6.6 Metodo degli spostamenti

Ci si limita per semplicità ad analizzare il solo modello di piastra indeformabile a taglio; la derivazione delle equazioni relative alla piastra di Mindlin è comunque immediata e non offre difficoltà concettuali.

6.6.1 Formulazione diretta

Dal legame costitutivo (29) e dalle equazioni implicite di congruenza (22) si ottiene il legame tensioni-spostamenti:

$$\begin{aligned} M_x &= D_f (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ M_y &= D_f (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ M_{xy} &= D_f (1-\nu) w_{,xy} \end{aligned} \quad (31)$$

Sostituendo le (31) nelle equazioni di equilibrio (24) si ha l'equazione risolvente:

$$w_{,xxxx} + 2 w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{P}{D_f} \quad (32)$$

L'operatore differenziale di rigidezza è perciò $L = D_f \nabla^4$.

Le condizioni al contorno geometriche sono date dalle (23); per scrivere le condizioni al contorno meccaniche (27) e (28) (relative alla piastra rettangolare) in termini di spostamento w è necessario dapprima esprimere T_x e T_y in funzione di w . Dalle (12), tenuto conto delle (30) e che $M_{tx} = -M_{ty} = M_{xy}$ si ha:

$$\begin{aligned} T_x &= m_y - D_f (w_{,xx} + w_{,yy})_{,x} \\ T_y &= -m_x - D_f (w_{,xx} + w_{,yy})_{,y} \end{aligned} \quad (33)$$

o anche

$$\begin{aligned} T_x &= m_y - D_f \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ T_y &= -m_x - D_f \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (33')$$



Sostituendo le (33) e la (31_y) nelle (27), (28) si ottiene

$$\begin{aligned}
 -D_z [w_{,xxx} + (2-\nu) w_{,xyy}] &= f - \mu_x y - m_y \\
 -D_z [w_{,xx} + \nu w_{,yy}] &= \mu_y \quad \text{in } x=a \\
 -D_z [w_{,yyy} + (2-\nu) w_{,xxy}] &= f + \mu_y x + m_x \\
 D_z [w_{,yy} + \nu w_{,xx}] &= \mu_x \quad \text{in } y=b
 \end{aligned} \tag{34}$$

6.6.2 Formulazioni integrale e variazionale

Il teorema dei lavori virtuali (1.31) per la piastra indeformabile a taglio si scrive:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{D}} (H_x \delta x_x + H_y \delta x_y + H_{xy} \delta x_{xy}) dx dy &= \\
 = \int_{\mathcal{D}} (p \delta w + m_x \delta \varphi_x + m_y \delta \varphi_y) dx dy + \\
 + \int_{\partial \mathcal{D}_F} (f \delta w + \mu_x \delta \varphi_x + \mu_y \delta \varphi_y) ds &\tag{35}
 \end{aligned}$$

Imponendo che gli spostamenti virtuali siano compatibili ed esprimendo le tensioni effettive in termini di spostamento si ha:

$$D_z \int_{\mathcal{D}} [(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,xx} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,yy} +$$

$$\begin{aligned}
 + 2(1-\nu) w_{,xy} \delta w_{,xy}] dx dy &= \\
 = \int_{\mathcal{D}} [p \delta w + m_x \delta w_y - m_y \delta w_x] dx dy + \\
 + \text{termini al contorno,} \quad V \delta w &\tag{36}
 \end{aligned}$$

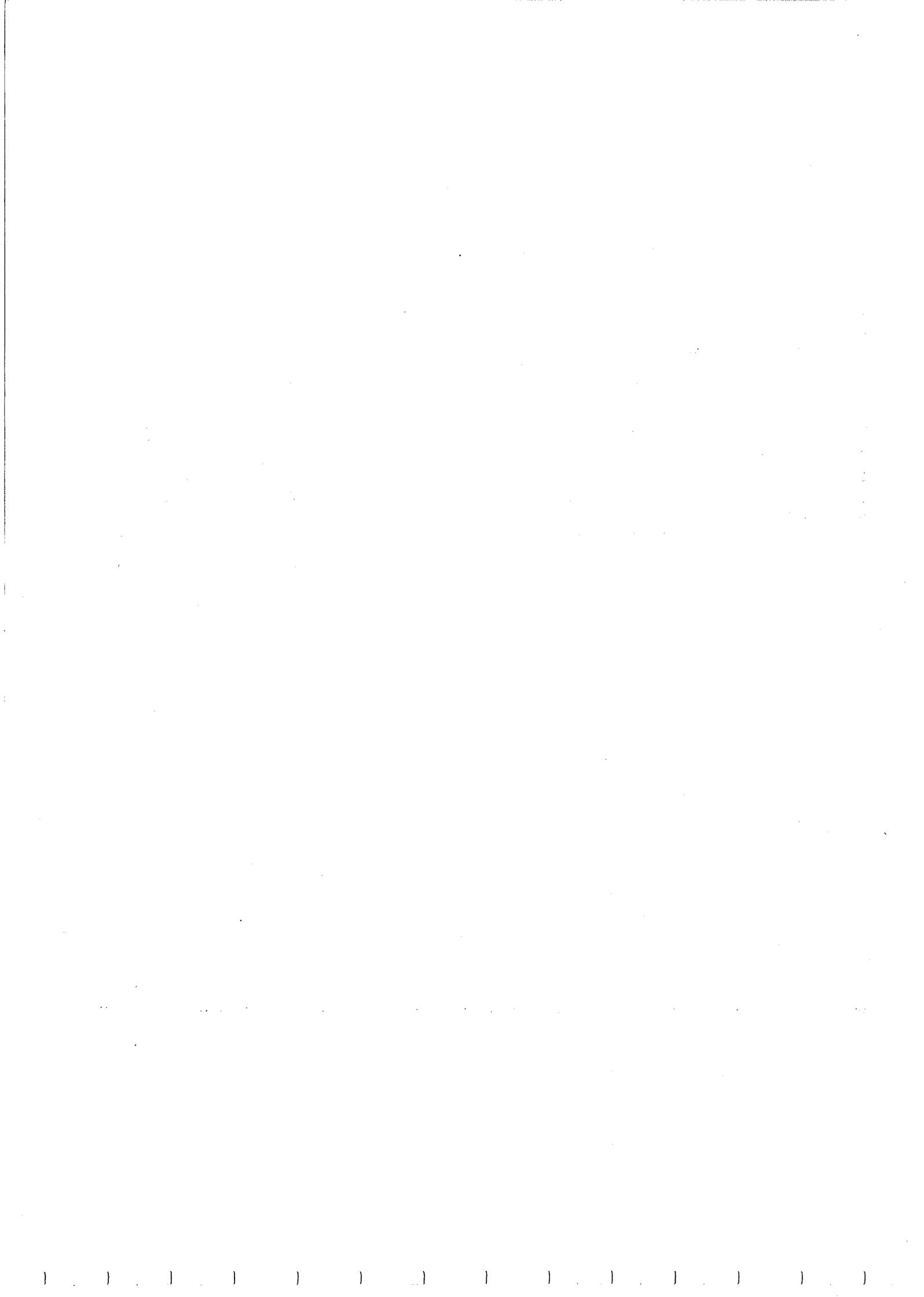
avendo fatto uso delle (20), (22) e (31). Integrando per parti ed imponendo le condizioni geometriche al contorno si ottiene l'equazione di equilibrio (24) con le condizioni al contorno meccaniche.

L'energia potenziale totale e':

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} (H_x x_x + H_y x_y + H_{xy} x_{xy}) dx dy + \\
 &- \int_{\mathcal{D}} (p w + m_x \varphi_x + m_y \varphi_y) dx dy + \\
 &- \int_{\partial \mathcal{D}_F} (f w + \mu_x \varphi_x + \mu_y \varphi_y) ds &\tag{37}
 \end{aligned}$$

ovvero, esprimendo le tensioni H , le deformazioni X e le rotazioni φ in funzione dell'unica variabile di configurazione indipendente w :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{D_z}{2} \int_{\mathcal{D}} [w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2] dx dy + \\
 &- \int_{\mathcal{D}} (p w + m_x w_y - m_y w_x) dx dy + \text{termini cont.} &\tag{38}
 \end{aligned}$$



Imponendo che sia $\delta V = 0$ si ottiene la (36) e quindi le equazioni di equilibrio con le relative condizioni al contorno.

6.6.3 Esempio applicativo: piastra rettangolare appoggiata

Riguardo i metodi approssimati di soluzione dell'equazione differenziale della piastra (31) valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo 4.2.3 a proposito della lastra. Qui ci si limita ad esaminare il caso particolarmente semplice di piastra rettangolare appoggiata, sufficiente ad illustrare il comportamento meccanico dell'elemento strutturale.

La piastra occupi il dominio $S = \{x, y \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ e sia sottoposta a sole forze trasversali $P(x, y)$. Le condizioni al contorno geometriche si scrivono

$$w = 0 \quad \text{in } x=0, a \quad (35)$$

$$w = 0 \quad \text{in } y=0, b$$

e le condizioni meccaniche:

$$w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \quad \text{in } x=0, a \quad (40)$$

$$w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \quad \text{in } y=0, b$$

che esprimono (eq. (34)) l'annullarsi del momento flettente normale al bordo. Stanti le (39) e $w_{,xy} = 0$ sui lati paralleli all'asse x e $w_{,xx} = 0$ sugli altri due lati, per cui le (40) possono essere sostituite da

$$w_{,xx} = 0 \quad \text{in } x=0, a \quad (41)$$

$$w_{,yy} = 0 \quad \text{in } y=0, b$$

Le condizioni (39) e (41) sono identicamente soddisfatte se si assume $w(x, y)$ nella forma di una doppia serie trigonometrica:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (42)$$

qualunque sia il valore dei coefficienti indeterminati a_{jk} . Sviluppando anche il carico in serie si ha:

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (43)$$

dove

$$P_{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy \quad (44)$$

Sostituendo le (42) e (43) nell'equazione differenziale del problema ed imponendo che sia soddisfatta per ogni x ed y

si ottiene un sistema di infinite equazioni disaccoppiate nelle incognite a_{jk} , che si determinano perciò immediatamente:

$$a_{jk} = \frac{P_{jk}}{D_f} \frac{1}{\pi^4 \left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \quad (45)$$

Lo spostamento (42) e' pertanto:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D_f} \sum_j \sum_k \frac{P_{jk}}{\left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (46)$$

Sostituendo la (46) nelle relazioni sforzi-spostamento si ottiene lo stato di tensione

$$M_x = -\frac{1}{\pi^2} \sum_j \sum_k \frac{P_{jk}}{\left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{j^2}{a^2} + \nu \frac{k^2}{b^2} \right) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

$$M_y = -\frac{1}{\pi^2} \sum_j \sum_k \frac{P_{jk}}{\left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \left(\nu \frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{\pi^2} \sum_j \sum_k \frac{P_{jk}}{\left(\frac{j^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} \frac{jk}{ab} \cos \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{k\pi y}{b} \quad (47)$$

Se si considera solo il primo termine degli sviluppi in serie (46) e (47) ($j=1$ e $k=1$), soluzione esatta per un carico ripartito con legge sinusoidale secondo x ed y) si vede che lo spostamento massimo e i momenti flettenti massimi si verificano al centro della piastra e sono pari a

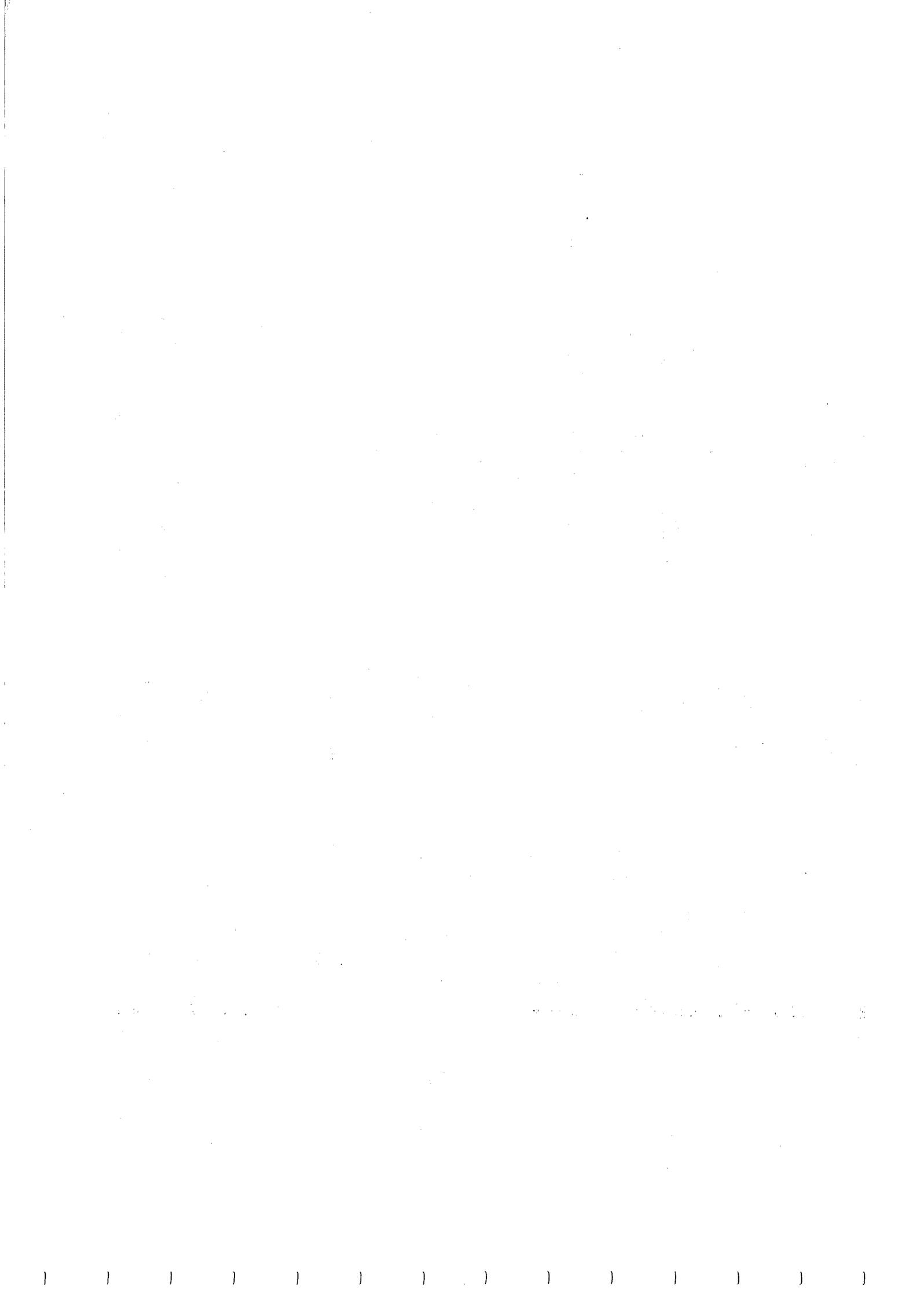
$$w_{max} = \frac{P_0}{D_f} \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

$$(M_x)_{max} = -\frac{P_0}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)$$

$$(M_y)_{max} = -\frac{P_0}{\pi^2} \frac{\nu}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

dove $P_0 \equiv P_{11}$.

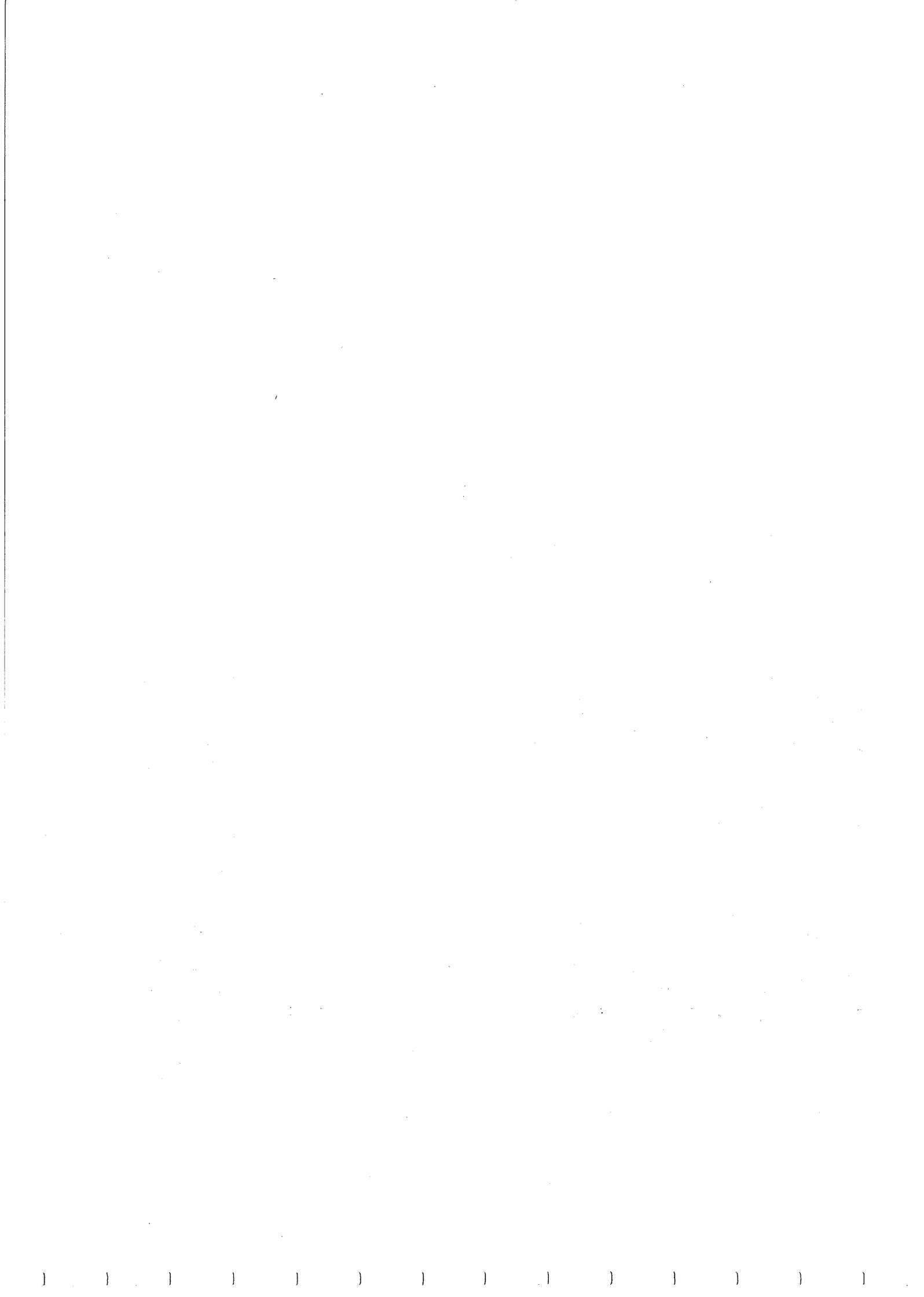
Si confrontino ora i valori di w_{max} e $(M_x)_{max}$ con lo spostamento e il momento flettente in mezz'era di una trave appoggiata sottoposta a carico sinusoidale (eq. (20) e (21) del cap. 5, con $\alpha=1$ se la trave e' indeformabile a taglio). Si vede che, assumendo $l=a$, al variare di b i valori relativi alla piastra possono risultare notevolmente



inferiori a quelli della trave. Se ad esempio la piastra è quadrata ($a = b$) lo spostamento risulta quattro volte più piccolo e così pure il momento flettente se $V = 0$ e se invece $e, b \rightarrow \infty$ le due soluzioni coincidono. Il diverso comportamento meccanico della piastra rispetto a quello della trave può spiegarsi pensando di sostituire alla piastra un grigliato equivalente di travi disposte secondo le due direzioni x ed y ; il funzionamento è allora quello di un sistema in parallelo in cui il carico esterno si ripartisce sui sistemi componenti in proporzione alle rigidità flessionali che dipendono dall'inverso della quarta potenza delle lunghezze (eq. (5.20)). Su un ordine di travi agisce pertanto una frazione del carico totale, cosicché lo spostamento e momento flettente sono più piccoli di quelli che si avrebbero per un singolo ordine (+). Se la piastra ha una dimensione infinita ($b = \infty$) un ordine di travi ha rigidità nulla e si ritrova la soluzione della singola trave.

Dalle (34.4,3) è possibile calcolare le reazioni vincolari f lungo i bordi. Si trova che le reazioni sono distribuite con legge sinusoidale ed agiscono in direzione opposta a quella del carico. La loro risultante è comunque maggiore della risultante del carico e la differenza è pari alla risultante delle reazioni concentrate nei vertici della piastra.

(+) Il ragionamento fatto è solo di tipo qualitativo, in quanto prescinde dalla rigidità torsionale dei due ordini di travi, che riduce le sollecitazioni flessionali e gli spostamenti. Ad esempio se si trascura la torsione in una piastra quadrata il carico su ciascun ordine di travi è $P_0/2$ cosicché lo spostamento e momento flettente sono solo la metà di quelli che si verificano in una trave di uguale lunghezza, invece che quattro volte più piccoli.



7. FORMULAZIONE DISCRETA DEL PROBLEMA ELASTICO IN TERMINI DI SPOSTAMENTO PER I CONTINUI MONODIMENSIONALI

7.1 Introduzione

Nei capitoli 3 e 5 relativi ai continui monodimensionali (asta e trave) si è visto che l'applicazione del metodo delle forze conduce ad equazioni risolventi di tipo algebrico anziché differenziale. Ciò è dovuto al fatto che l'asta e la trave sono sistemi localmente isostatici per cui le funzioni di tensione incognite degenerano in costanti. Per questi sistemi è possibile sviluppare una formulazione duale in termini di spostamento assumendo come incognite gli spostamenti di un numero discreto di punti, i nodi della struttura. Integrando le equazioni del problema elastico negli intervalli definiti tra nodi adiacenti (gli elementi della struttura) è possibile definire la soluzione a meno di grandezze relative ai soli nodi; imponendo successivamente le condizioni di equilibrio e congruenza ai nodi si ottiene un sistema risolvibile di tipo algebrico. Per questo motivo i sistemi localmente isostatici sono anche detti naturalmente discreti.

I concetti fondamentali della formulazione discreta sono sviluppati nel seguito con un certo dettaglio facendo riferimento al modello più semplice d'asta e quindi estesi alla trave indeformabile a taglio. Il metodo permette di risolvere il problema elastico relativo a strutture

costituite da elementi monodimensionali, quali sistemi reticolari e telai.

7.2 Continuo monodimensionale: asta

Si consideri un'asta AB sottoposta all'azione di forze ripartite $P(x)$ e forze P_j applicate in punti x_j ; la rigidezza assiale dell'asta EA sia costante e tratti, con punti di discontinuità x_k . I punti x_j ed x_k sono punti di singularità che conviene assumere come nodi della struttura. Il sistema risulta così descritto da n nodi di coordinate x_i ($i=1,2,\dots,n$) ed $m=n-1$ elementi ($e=1,2,\dots,m$) (fig.40) (+).

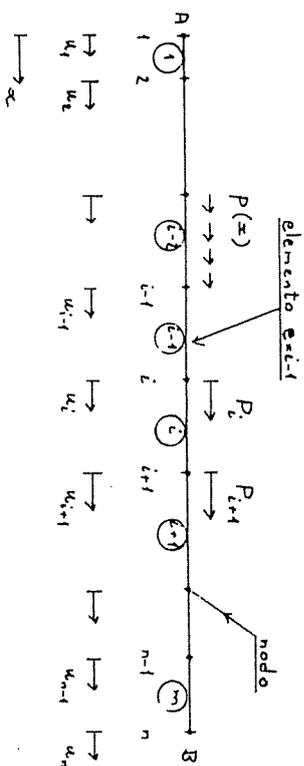
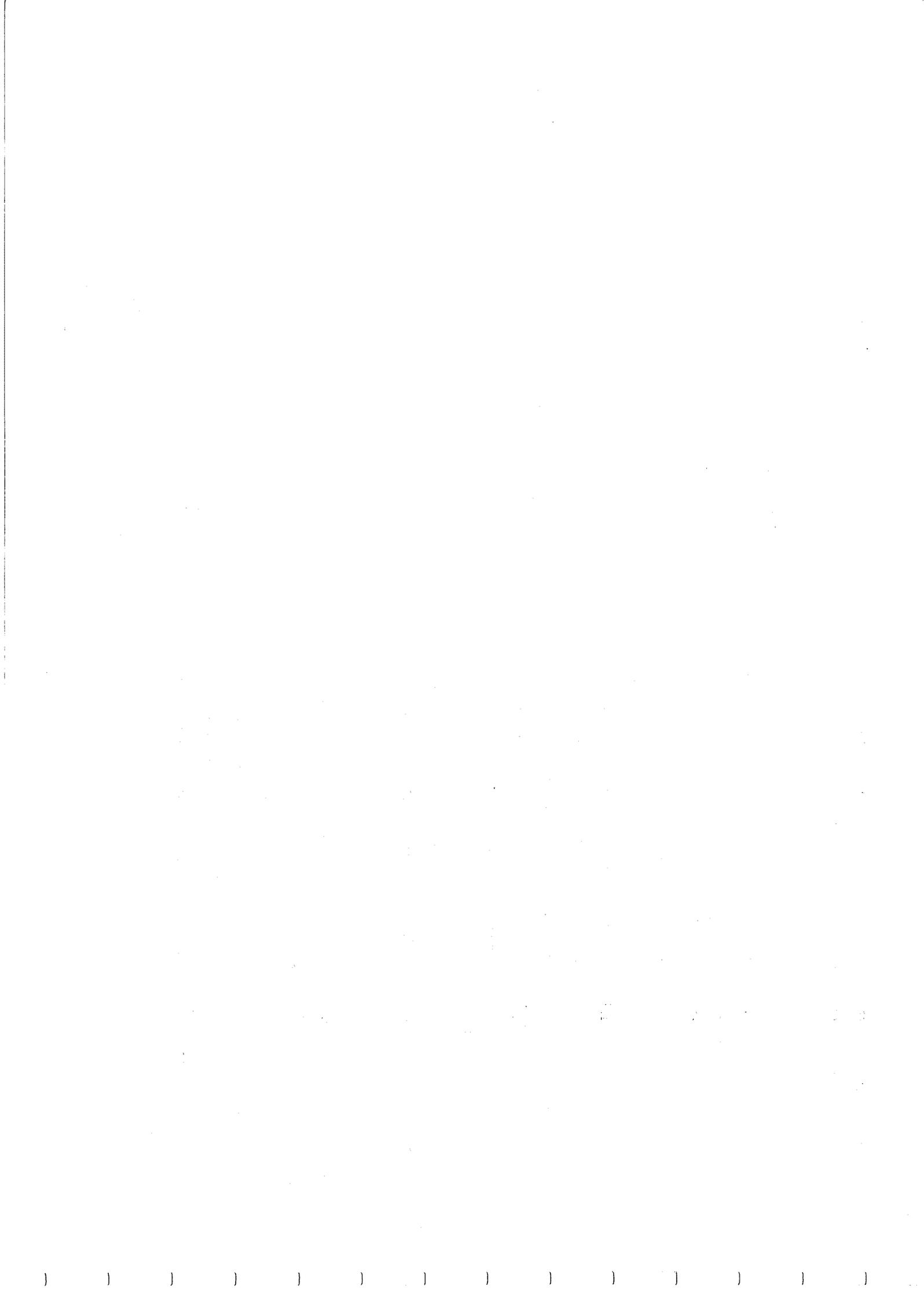


fig. 40

Definita la geometria del sistema (le coordinate dei nodi) e la topologia (numerazione dei nodi e degli elementi) la formulazione discreta si articola attraverso le

(+) Questo sistema può essere molto più agevolmente trattato con il metodo delle forze; l'illustrazione della formulazione discreta ha qui carattere esemplificativo in vista di sistemi più complessi.



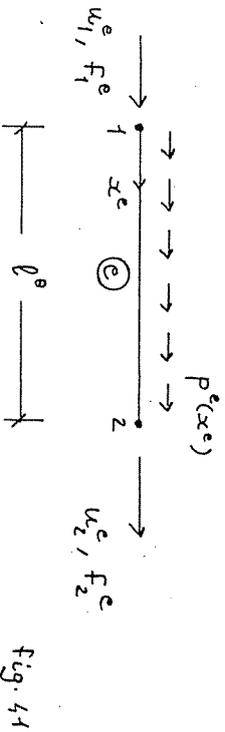
seguenti fasi fondamentali:

- 1) determinazione della relazione forza-spostamento relativa al generico elemento;
- 2) scrittura della condizioni di equilibrio in termini di spostamento di ciascun nodo;
- 3) introduzione delle condizioni di vincolo;
- 4) soluzione e calcolo di deformazioni e tensioni.

Nel seguito si analizzano in dettaglio le quattro fasi.

7.2.1 Matrice di rigidità dell'elemento

Si consideri il generico elemento e del sistema, riportato in fig. 41, compreso tra i nodi 1 e 2 (numerazione locale). Sia $x^e \in [0, l^e]$ un'ascissa locale con origine nel nodo 1 ed l^e la lunghezza dell'elemento. Siano inoltre: u_1^e e u_2^e gli spostamenti dei nodi 1 e 2; $p^e(x^e)$ il carico applicato all'elemento riferito all'ascissa locale; f_1^e, f_2^e le forze (interne) applicate all'elemento e dagli elementi adiacenti.



L'obiettivo che ci si propone è quello di determinare la relazione (lineare) che intercorre tra le forze p^e, f^e e gli spostamenti u^e . A tal fine è necessario integrare

l'equazione differenziale di equilibrio (3.5) in termini di spostamento (+)

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + P = 0 \quad (1)$$

con le condizioni al contorno (geometriche):

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_2 \quad (2)$$

Risolto il problema è possibile esprimere le "reazioni vincolari" f in funzione del carico P e dei "cedimenti vincolari" u_1, u_2 .

Stante la linearità del problema è lecito esprimere la soluzione come somma di due soluzioni relative a due distinti problemi:

a) soluzione particolare del problema non omogeneo:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + P = 0$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \quad (3)$$

b) soluzione generale del problema omogeneo:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

$$u(0) = u_1, \quad u(l) = u_2 \quad (4)$$

(+) Per semplicità di scrittura si omette l'indice e quando non esiste ambiguità.



La soluzione a) esprime l'equilibrio dell'elemento i cui nod sono fissi, sottoposto all'azione del carico; la soluzione b) l'equilibrio dell'elemento a cui sono imposti gli spostamenti di estremità in assenza di carico. Detta $u_p(x)$ la soluzione particolare a) e $u_0(x)$ la soluzione generale omogenea b) risulta:

$$u(x) = u_p(x) + u_0(x) \quad (5)$$

La soluzione particolare va determinata caso per caso; la soluzione omogenea va determinata una volta per tutte e risulta:

$$u_0(x) = \psi_1(x) u_1 + \psi_2(x) u_2 \quad (6)$$

dove

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \psi_2(x) = \frac{x}{l} \quad (7)$$

Si noti che $u_0(x)$ è espressa come combinazione lineare di funzioni note $\psi_i(x)$ e spostamenti nodali incogniti u_i ; le funzioni $\psi_i(x)$ sono dette funzioni di interpolazione e rappresentano il campo di spostamento equilibrato e congruente causato da spostamenti $u_i=1$ ed $u_j=0$, con $j \neq i$. Le funzioni $\psi_i(x)$ sono diagrammate in figura 42.

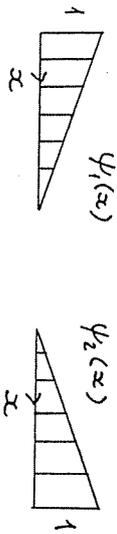


fig. 42

Dal campo di spostamenti (5) è possibile calcolare quello di deformazione $\epsilon(x)$ (eq.(3.1)):

$$\epsilon(x) = \frac{u_2 - u_1}{l} + \epsilon_p(x) \quad (8)$$

dove $\epsilon_p(x) = u_p'(x)$. Dal legame costitutivo (3.3) si ha:

$$N(x) = \frac{EA}{l} (u_2 - u_1) + N_p(x) \quad (9)$$

dove $N_p = EA u_p'$. Dallo stato di tensione si ricavano le forze sul contorno:

$$F_1 = -N(0) = -\frac{EA}{l} (u_2 - u_1) + F_{1p} \quad (10)$$

$$F_2 = N(l) = \frac{EA}{l} (u_2 - u_1) + F_{2p}$$

dove $F_{1p} = -N_p(0)$, $F_{2p} = N_p(l)$ sono le reazioni vincolari dovute al carico p nel problema a).

Le equazioni (10) costituiscono la relazione forza-spostamento cercata; esse possono porsi nella forma matriciale (reintroducendo l'indice 'e'):

$$F^e = K^e q^e - P^e \quad (11)$$

in cui:

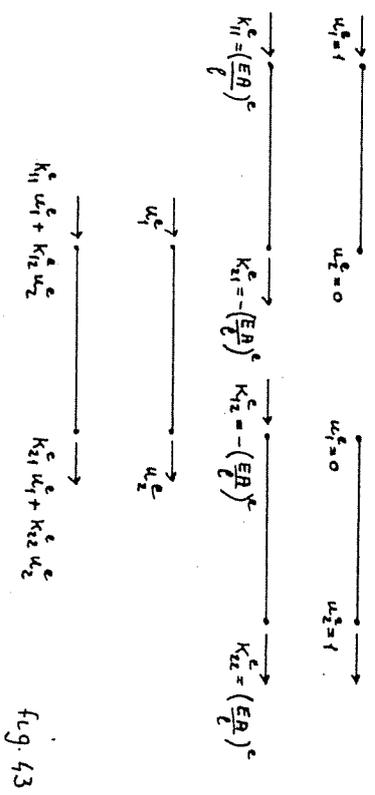
$$F^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}, \quad P^e = \begin{Bmatrix} -F_{1p}^e \\ -F_{2p}^e \end{Bmatrix}, \quad q^e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ed inoltre:

$$K^e = \begin{pmatrix} EA \\ l \end{pmatrix}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nella (11) f^e e' il vettore forze interne; P^e e' il vettore che elenca le forze nodali equivalenti al carico ripartito (cioe' uguali ed opposte alle reazioni dovute al carico ripartito $P^e(x^e)$ nel problema a nodi fissi); q^e e' il vettore spostamenti nodali; K^e la matrice locale di rigidezza. Si noti che K^e e' simmetrica.

Il generico termine K_{ij}^e della matrice di rigidezza puo' essere interpretato come la forza che bisogna applicare in i per ottenere uno spostamento $u_j^e = 1$ e tutti gli altri spostamenti u_j^e ($j \neq i$) uguali a zero (fig. 43a,b). Le forze f^e sono percio' una combinazione lineare delle forze K_{ij}^e , con coefficienti pari alle ampiezze effettive degli spostamenti (fig. 43c); a queste forze vanno sommate le reazioni dovute al carico ripartito.



Tornando al calcolo delle forze P^e e' interessante osservare che possono essere calcolate senza necessita' di determinare la soluzione particolare $u_p(x)$, attraverso un'applicazione del teorema dei lavori virtuali.

A questo scopo si consideri come stato di tensione quello associato alla condizione a nodi fissi ($u \equiv u_p$) e come stato di deformazione quello relativo ai cedimenti vincolari ($\delta u \equiv \delta u_0$). L'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^l EA \epsilon_p \delta \epsilon_0 dx = \int_0^l P \delta u_0 dx + f_p \delta u_1 + f_{2p} \delta u_2, \quad V \delta u_0 \quad (14)$$

Il termine a primo membro rappresenta il lavoro virtuale compiuto da uno stato di tensione elastico $EA \epsilon_p$ in un campo di deformazione $\delta \epsilon_0$ associato ad uno stato di coazione ed e' pertanto nullo per il teorema (1.43). Tenuto conto che (eq.(6))

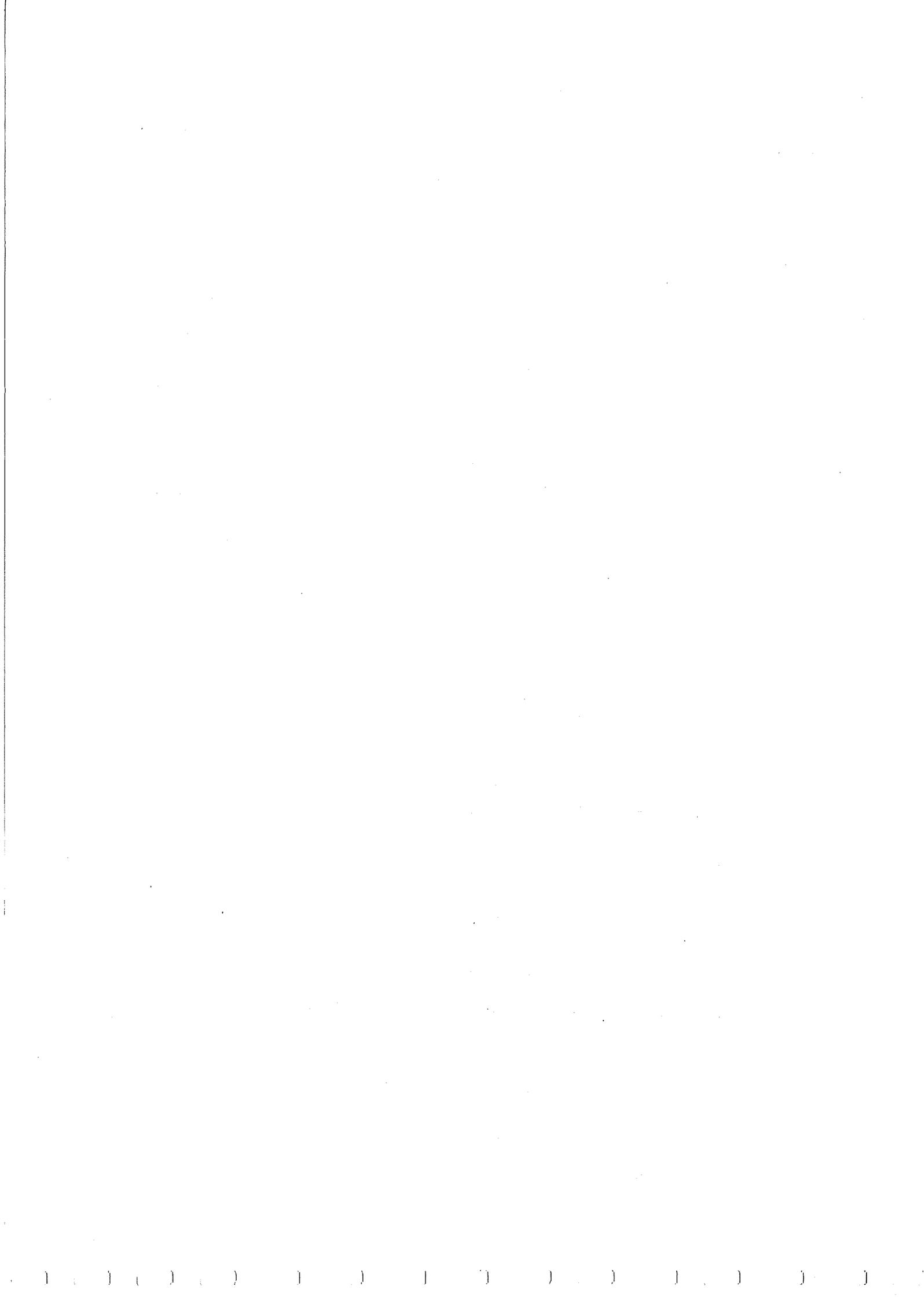
$$\delta u_0(x) = \psi_1(x) \delta u_1 + \psi_2(x) \delta u_2 \quad (15)$$

la (14) fornisce

$$-f_{1p} = \int_0^l P(x) \psi_1(x) dx$$

$$-f_{2p} = \int_0^l P(x) \psi_2(x) dx \quad (16)$$

Le forze equivalenti ai carichi ripartiti $-f_{ip}$ si ottengono pertanto come lavoro del carico $P(x)$ negli spostamenti $\psi_i(x)$



dovuti a cedimenti vincolari unitari, cioè come prodotto scalare di $P(x)$ per le funzioni di interpolazione. Tali forze sono dette forze generalizzate associate ai parametri lagrangiani u_1 ed u_2 . Le forze generalizzate compiono nei parametri lagrangiani lo stesso lavoro che le forze ripartite compiono nel campo di spostamenti compatibile ed equilibrato con i parametri stessi.

A titolo di esempio, se $P = \text{cost}$, il vettore delle forze generalizzate è $P^e = \{P \ell/2, P \ell/2\}^T$.

In definitiva il calcolo di P^e è immediato una volta che sia noto il campo di spostamento $u_0(x)$, cioè si conoscano le funzioni di interpolazione $\psi_i(x)$.

7.2.2 Condizioni globali di equilibrio. Assemblaggio.

Attraverso la tecnica illustrata nel paragrafo precedente è possibile soddisfare tutte le equazioni del problema elastico nei punti interni agli elementi; la soluzione è definita a meno delle costanti arbitrarie q^e che rappresentano gli spostamenti nodali. Per completare la soluzione è necessario imporre le condizioni di equilibrio e congruenza anche ai nodi, in cui in generale (ma non necessariamente) si hanno delle singolarità. Le costanti arbitrarie q^e sono quindi determinate dall'imposizione di queste condizioni che assumono il significato di condizioni al contorno per gli elementi. La tecnica è quindi la stessa di quella adottata nel paragrafo 3.2.1 per risolvere il problema di figura 9, con la sola differenza che le costanti

arbitrarie di integrazione sono state identificate con gli spostamenti nodali.

Le condizioni di congruenza ai nodi sono immediatamente soddisfatte, nello spirito del metodo degli spostamenti, facendo coincidere gli spostamenti locali u_i^e , u_2^e con gli spostamenti globali u_i . In altre parole è sufficiente far corrispondere alla numerazione locale 1,2 la numerazione globale 1,i+1, attraverso lo studio della topologia del sistema. In questo modo gli spostamenti globali dell'estremità comune a due elementi adiacenti risultano uguali e la funzione $u(x)$ è continua nel nodo, come richiesto dalla cinematica del sistema.

Questa operazione può formalmente essere compiuta introducendo la trasformazione lineare

$$q^e = \Omega^e q \quad (17)$$

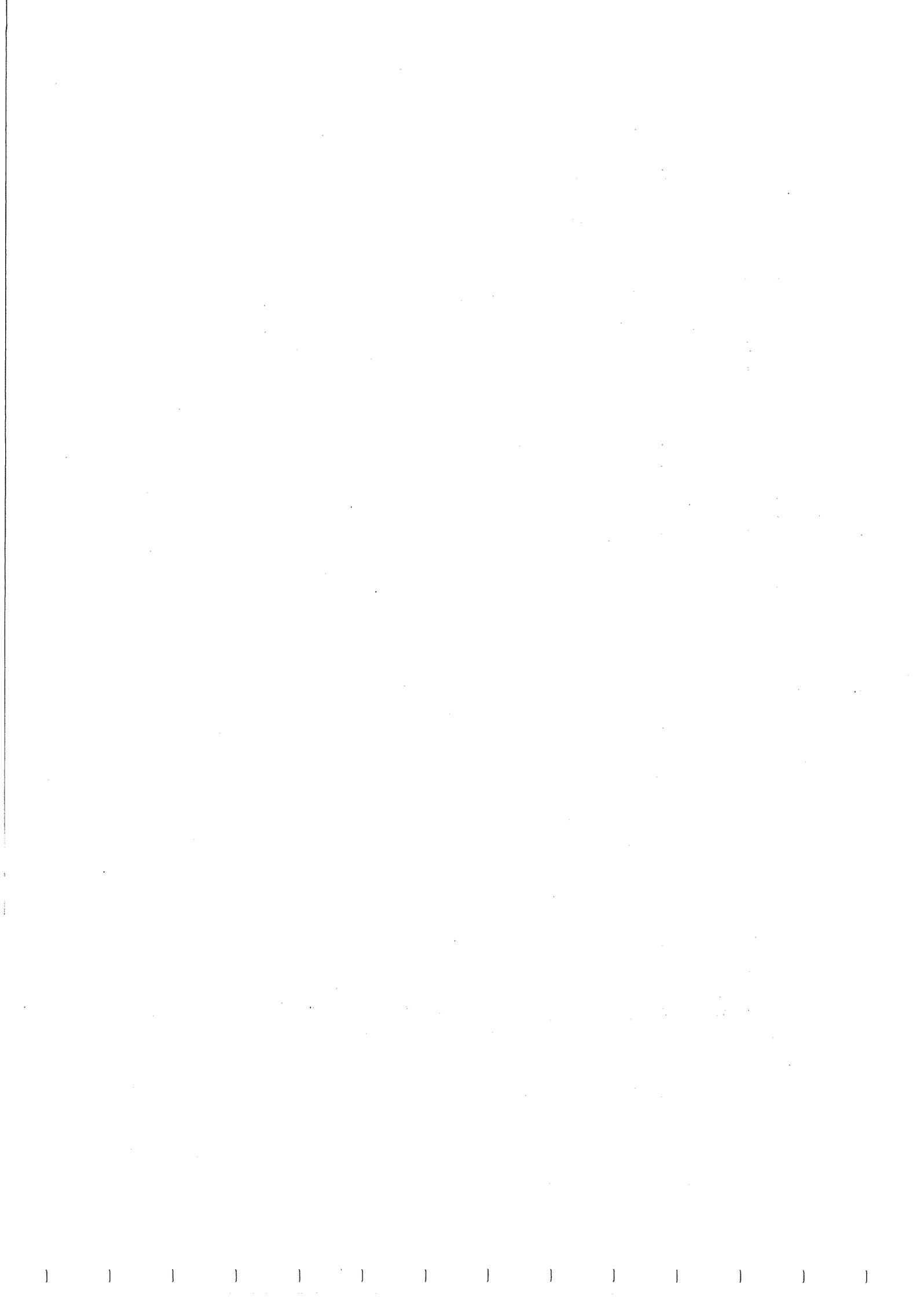
Essa fa corrispondere agli spostamenti globali:

$$q = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_i \ \dots \ u_{n-1} \ u_n\}^T \quad (18)$$

gli spostamenti locali q^e tramite la matrice di estrazione/collocazione Ω^e dell'elemento e . Numerando gli elementi come in fig.40, all'elemento e compreso tra i nodi $i-1$ ed i corrisponde la matrice Ω^e :

$$\Omega^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

\swarrow \searrow
 i -esima colonna
 $(i-1)$ -esima colonna



che estrae dal vettore globale q la $(i-1)$ -esima e la i -esima componente.

Passando a considerare le condizioni di equilibrio ai nodi, queste vanno imposte tenuto conto delle forze esterne attive P_i direttamente applicate e delle forze interne $-f_i$ che le aste concorrenti applicano al nodo (fig. 44).

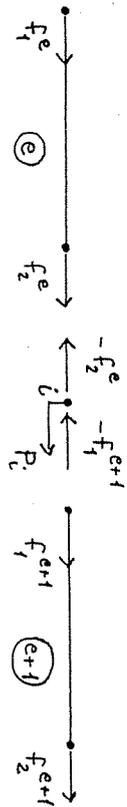


fig. 44

Le condizioni di equilibrio si scrivono:

$$\bar{P} - \sum_{e=1}^m \Omega^e T^e f^e = 0 \quad (19)$$

dove il vettore \bar{P} elenca le forze P_i applicate ai nodi e l'operatore $\Omega^e T^e$ che appare sotto il segno di sommatoria colloca il contributo dell'elemento e-esimo nel vettore globale delle forze interne. Tenuto conto delle (11) e (17) le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\bar{P} - \sum_e \Omega^e T^e K^e \Omega^e q - \sum_e \Omega^e T^e P^e = 0 \quad (20)$$

ovvero

$$K q = P \quad (21)$$

in cui

$$K = \sum_e \Omega^e T^e K^e \Omega^e \quad (22)$$

e' la matrice di rigidezza globale della struttura e

$$P = \bar{P} + \sum_e \Omega^e T^e P^e \quad (23)$$

e' il vettore globale dei carichi, somma delle forze nodali e delle forze equivalenti ai carichi ripartiti. Le operazioni indicate dalle sommatorie che appaiono nelle (22) e (23) sono dette di assemblaggio, rispettivamente della matrice globale di rigidezza e del vettore dei carichi.

L'assemblaggio e' stato formalmente ottenuto tramite le matrici di estrazione/collocazione Ω^e , che sono matrici molto grandi costituite da zeri ed uno. Di norma l'assemblaggio viene realizzato in forma diretta collocando i singoli contributi (K^e , P^e) rispettivamente in K e P e sommandoli. Ad esempio alla numerazione di fig. 11 corrisponde lo schema di assemblaggio di fig. 45.

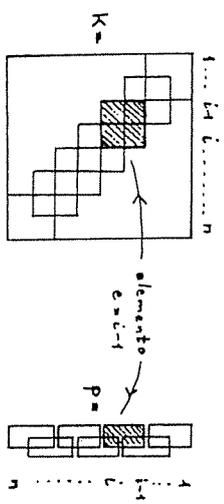
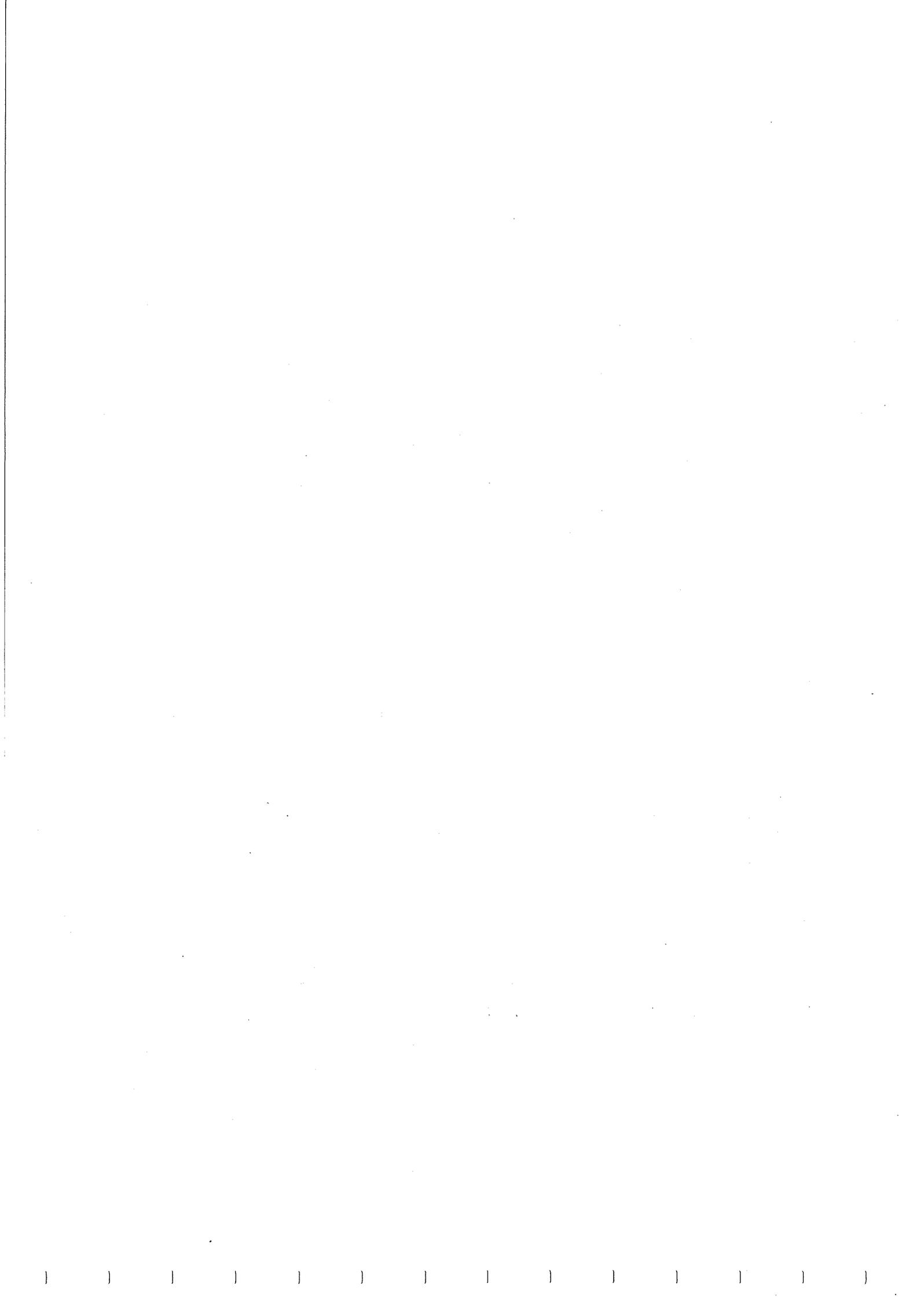


fig. 45

La matrice K e' bandata, tridiagonale; cio' e' conseguenza della numerazione adottata, che quindi risulta la piu' opportuna da un punto di vista computazionale (si pensi ad algoritmi numerici quali ad esempio il metodo di triangolarizzazione di Gauss). La matrice K risulta inoltre simmetrica e singolare. La prima proprieta' discende dalla



simmetria di K^e e dalla legge di assemblaggio (22); la seconda dipende dal fatto che, non avendo ancora introdotto i vincoli, il problema omogeneo $Kq = 0$ deve ammettere una soluzione non banale che rappresenti i moti rigidi del sistema.

7.2.3 Condizioni di vincolo

La terza fase della formulazione richiede l'introduzione nelle equazioni di equilibrio (21) di condizioni di vincolo geometriche atte ad eliminare i moti rigidi del sistema e a rimuovere quindi le singolarità di K . Qui si considera il caso di condizioni del tipo $u_i = \bar{u}_i$; condizioni più generali saranno esaminate in seguito.

Si supponga che il sistema in fig.40 sia vincolato in A , cosicché i risultati $u_i = \bar{u}_i$. È necessario perciò considerare nelle equazioni di equilibrio relative al nodo 1, anche la reazione R_1 che il vincolo applica all'asta. Il sistema di n equazioni di equilibrio (21) (una per ciascun nodo) contiene quindi $n-1$ incognite geometriche (gli spostamenti u_2, u_3, \dots, u_n) ed una incognita meccanica (la reazione R_1). In forma esplicita il sistema si scrive:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & & \\ & K_{21} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & K_{2n} & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Da queste equazioni e' possibile estrarre un sistema di equazioni "pure" negli spostamenti, ignorando le equazioni relative ai nodi vincolati (+). Si ottiene il sistema

$$\hat{K} \hat{q} = \hat{P} \quad (25)$$

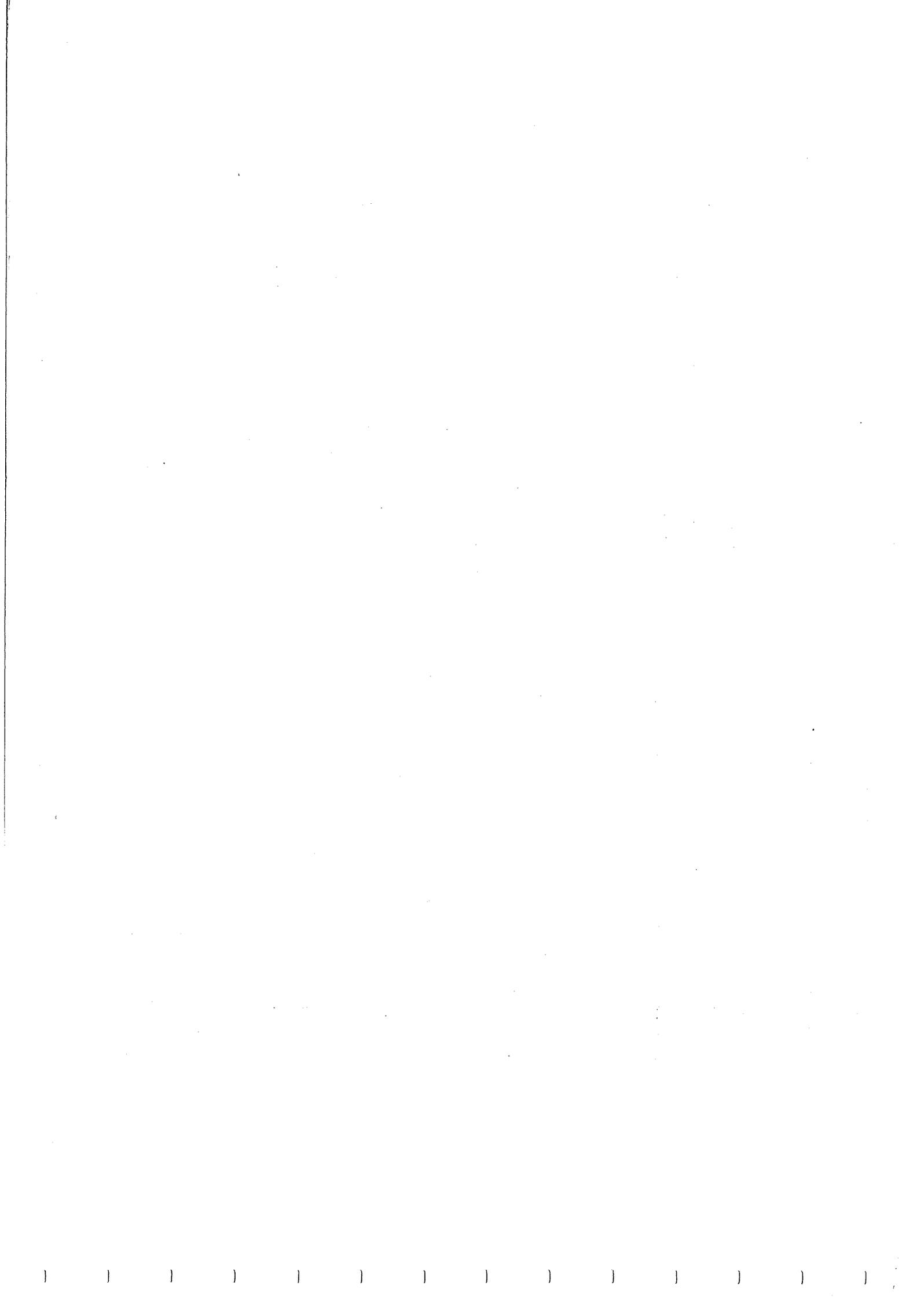
di dimensione $(n-1) \times (n-1)$; in forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & & & & \\ & \dots & & & \\ & & K_{2n} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} K_{21} \\ \vdots \\ K_{n1} \end{Bmatrix} \bar{u}_1 \quad (26)$$

La matrice di rigidezza \hat{K} che appare nella (25) e' ottenuta dalla matrice K relativa al sistema non vincolato cancellando le righe e le colonne corrispondenti ai nodi vincolati; a secondo membro, nel vettore \hat{P} , appaiono dei carichi equivalenti ai cedimenti vincolari, costituiti dalle colonne di K già cancellate, moltiplicate per i cedimenti imposti. Risolto il problema (25) e' possibile calcolare R_1 dalla prima equazione delle (24), non ancora utilizzata.

L'introduzione dei vincoli richiede dunque una contrazione della matrice K , il che può non essere comodo in sede di implementazione dell'algoritmo. Il seguente metodo alternativo, poco elegante ma tuttavia efficace nelle applicazioni, permette di conservare le dimensioni ori-

(+) Si noti l'analogia con il sistema di corpi rigidi trattato nel cap.2, per il quale e' $\bar{u}_A = 0$.



ginarie della matrice e consiste: a) nel sommare un numero $\alpha \gg \max(|K_{ij}|)$ ai termini sulla diagonale di K corrispondenti ai nodi vincolati; b) nel sostituire a termine noto il prodotto $\alpha \bar{u}_i$. Poiché il termine sulla diagonale è dominante la soluzione fornisce $u_i \approx \bar{u}_i$ entro i limiti delle usuali approssimazioni numeriche.

7.2.4 Calcolo di spostamenti, deformazioni e tensioni

Risolto il sistema di equazioni algebriche lineari (23) e' necessario determinare deformazioni e tensioni seguendo a ritroso, come sempre accade nel metodo degli spostamenti, il percorso logico che ha condotto alla formulazione delle equazioni risolventi. Nell'ordine e' necessario compiere le seguenti operazioni per il generico elemento e :

- a) dal vettore degli spostamenti globali q si estrae, tramite la (17), il vettore degli spostamenti locali q^e ;
- b) attraverso le funzioni di interpolazione $\psi_i(x)$ si calcola il campo di spostamenti $u_0(x)$ e, noto $u_p(x)$, lo spostamento risultante (5);
- c) dalla (8) si determina il campo di deformazione;
- d) dalla (9) lo stato di tensione.

Alternativamente, operando in maniera piu' vantaggiosa, calcolati gli spostamenti locali q^e , dalle (11) si ricavano le forze di estremita' e quindi le tensioni in base a considerazioni di equilibrio. La conoscenza della soluzione particolare a nodi fissi $u_p(x)$, $\epsilon_p(x)$, $N_p(x)$,

relativa ai carichi ripartiti, non risulta pertanto necessaria.

7.2.5 Esempio illustrativo

Si consideri il sistema in fig.46 costituito da un'asta di caratteristiche elastiche costanti a tratti, vincolata agli estremi, sottoposta ad un carico uniformemente ripartito P e ad una forza $P = Pa$. Considerando i punti di discontinuita' del carico e della rigidezza assiale come punti nodali si ottiene un sistema costituito da $n=5$ nodi ed $m=4$ elementi.

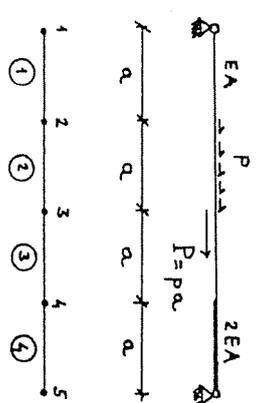


fig. 46.

Le matrici di rigidezza locali (13) sono:

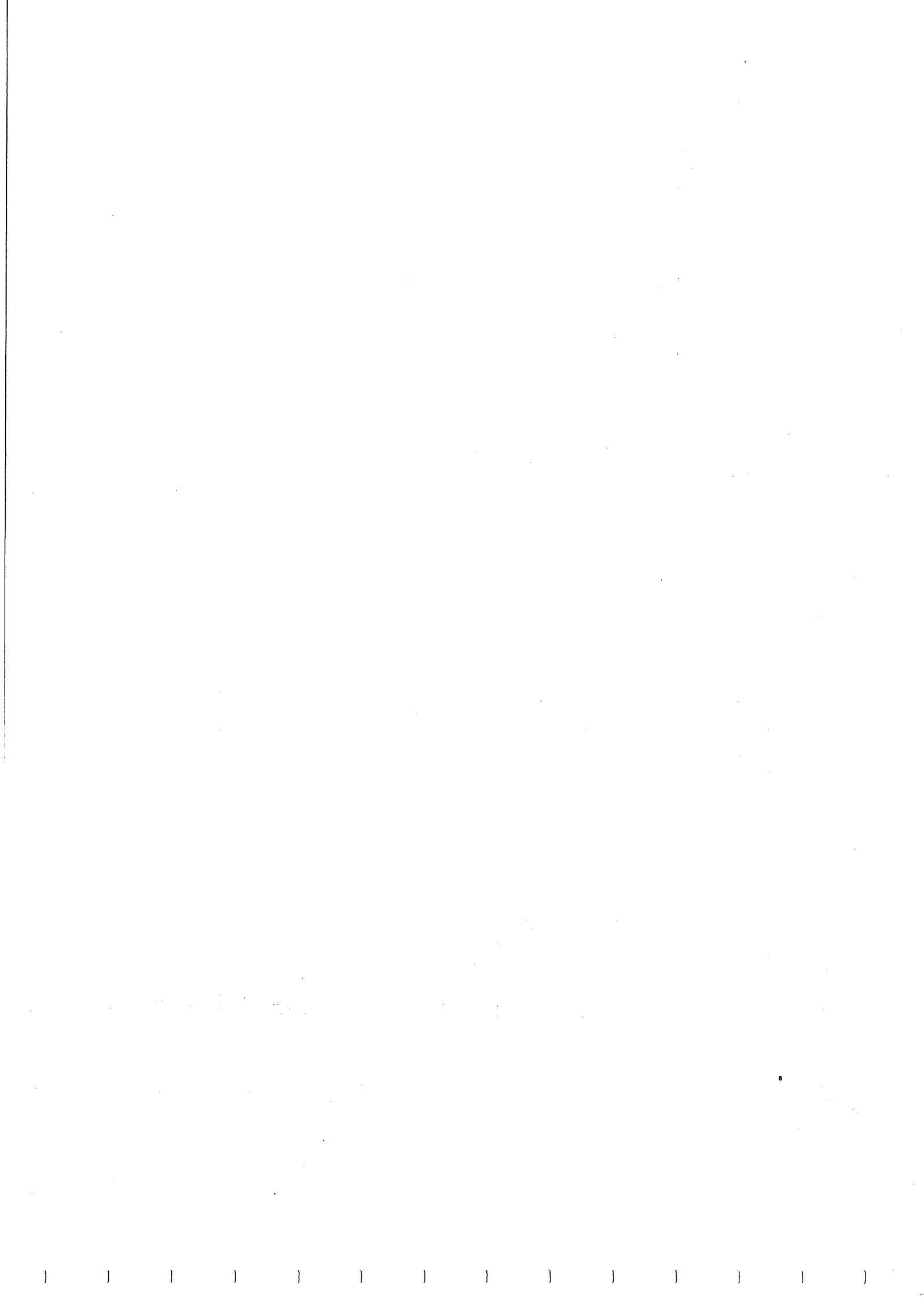
$$K^{(1)} \equiv K^{(2)} \equiv K^{(3)} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K^{(4)} = \frac{2EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e i vettori carichi equivalenti (12):

$$P^{(1)} = P^{(2)} = P^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad P^{(4)} = \begin{Bmatrix} Pa/2 \\ Pa/2 \end{Bmatrix}$$

Assemblando la matrice di rigidezza globale e il vettore dei carichi P secondo lo schema di fig.45 si ha:

$$K = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & . & . & . \\ -1 & 2 & -1 & . & . \\ . & -1 & 2 & -1 & . \\ . & . & -1 & 3 & -2 \\ . & . & . & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Pa \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Pa/2 \\ Pa/2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



dove nel vettore dei carichi compare il contributo della forza nodale P e di quella ripartita P' .
L'introduzione dei vincoli richiede la cancellazione della prima e quinta riga e delle corrispondenti colonne della matrice K , in quanto $u_1 = u_5 = 0$. Il sistema risolvibile e' perciò:

$$\frac{EA}{\alpha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che fornisce:

$$\hat{q} \equiv \{ u_2 \ u_3 \ u_4 \}^T = \frac{Pa^2}{2EA} \{ 2 \ 3 \ 1 \}^T$$

da cui, ritornando al vettore q :

$$q = \frac{Pa^2}{2EA} \{ 0 \ 2 \ 3 \ 1 \ 0 \}^T$$

I vettori dei parametri lagrangiani locali, estratti dal vettore q , risultano per i quattro elementi:

$$q^{(1)} = \frac{Pa^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad q^{(2)} = \frac{Pa^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}, \quad q^{(3)} = \frac{Pa^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q^{(4)} = \frac{Pa^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni in ogni elemento e' necessario determinare prima la soluzione particolare $u_p^{(i)}(x)$, relativa all'elemento 2. Risolvendo il problema (3) per $P = \cos t$, $l = \alpha$, si ricava:

$$u_p^{(2)}(x) = \frac{Pa^2}{2EA} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2} \right)$$

da cui:

$$E_p^{(2)}(x) = \frac{Pa}{2EA} \left(1 - 2 \frac{x}{\alpha} \right)$$

$$N_p^{(2)}(x) = \frac{Pa}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{\alpha} \right)$$

In particolare il campo di tensione (9) risulta:

$$N^{(1)}(x) = Pa$$

$$N^{(2)}(x) = P(\alpha - x)$$

$$N^{(3)}(x) = -Pa$$

$$N^{(4)}(x) = -Pa$$

Alternativamente, il legame (11) fornisce le forze di estremita' dalle quali e' possibile, in base a considerazioni di equilibrio, determinare lo stato di sforzo. Ad esempio per l'elemento 2 e':

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Pa/2 \\ Pa/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Pa \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tenuto conto del carico ripartito, si ritrova la legge $N^{(2)}(x)$ prima determinata.

7.3 Continuo polare monodimensionale: trave

I concetti precedentemente esposti per l'asta si generalizzano facilmente al caso della trave e dei sistemi di travi.

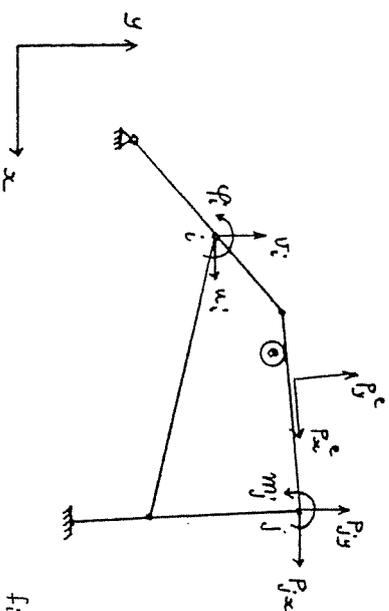
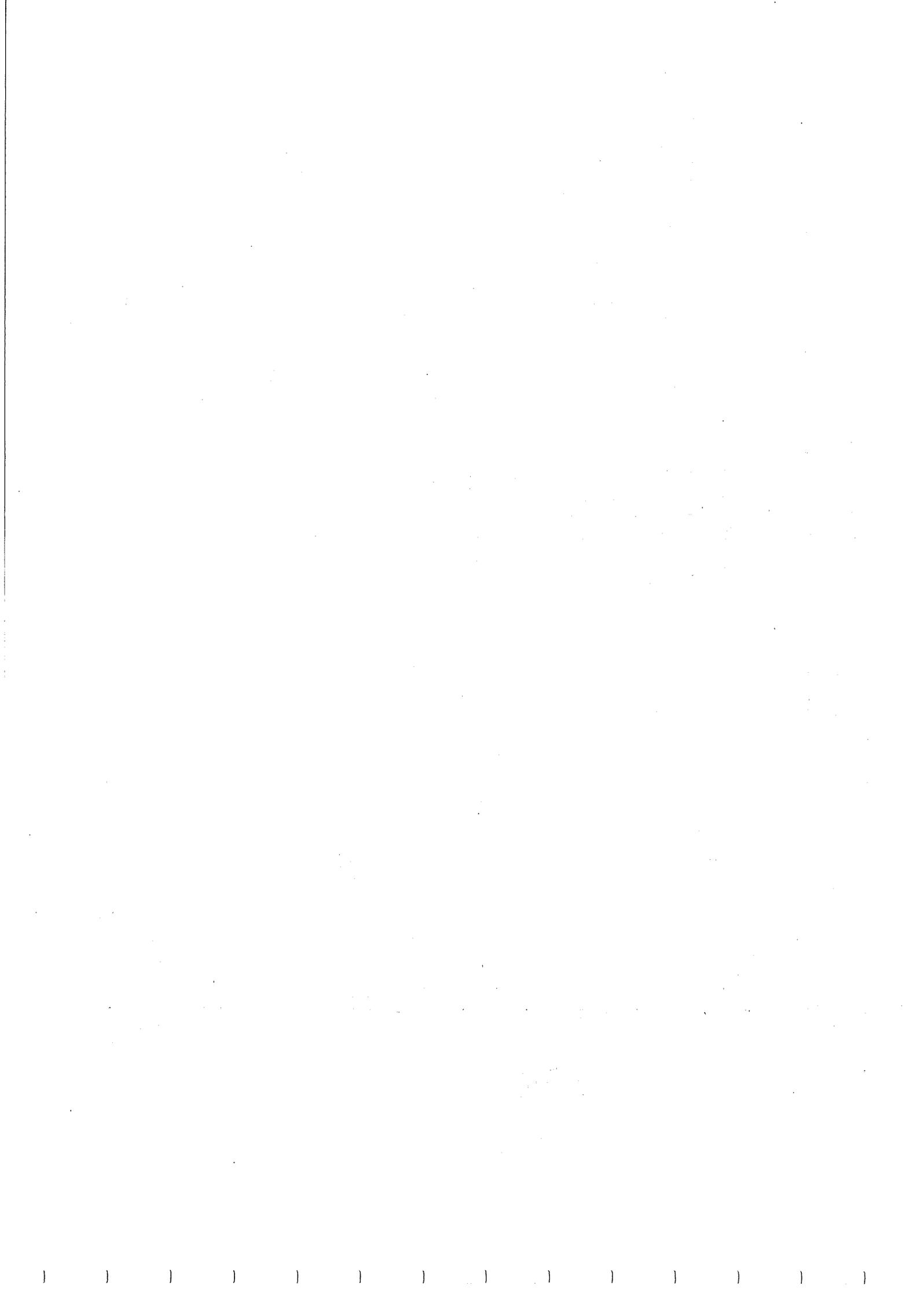


fig. 48



Si consideri un sistema di travi indeformabili a taglio, costituito da n nodi ed m elementi, sottoposto all'azione di forze ripartite e concentrate nei nodi (fig. 48). Il vettore dei parametri di configurazione incogniti elenca $3n$ grandezze

$$q = \{ u_1, v_1, \varphi_1, \dots, u_i, v_i, \varphi_i, \dots, u_n, v_n, \varphi_n \}^T \quad (27)$$

dove u, v sono le componenti di traslazione e φ la rotazione di ciascun nodo. Applicando il metodo già illustrato si vogliono formulare le equazioni di equilibrio (21) per il sistema in esame; allo scopo si sviluppano nell'ordine le quattro fasi del procedimento definite all'inizio del paragrafo 7.2.

7.3.1 Matrice di rigidità

Si consideri il generico elemento e di trave compreso tra i nodi 1 e 2 (numerazione locale) e si introduca un sistema d'assi locale (fig. 49).

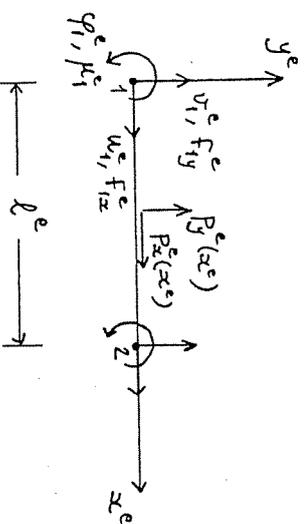


Fig. 49

Il vettore degli spostamenti locali e'

$$q^e = \{ u_1^e, v_1^e, \varphi_1^e, u_2^e, v_2^e, \varphi_2^e \}^T \quad (28)$$

In corrispondenza dei nodi agiscono le forze (interne)

$$f^e = \{ f_{1x}^e, f_{1y}^e, \mu_1^e, f_{2x}^e, f_{2y}^e, \mu_2^e \}^T \quad (29)$$

e sull'elemento le forze (esterne) ripartite $P_x^e(x^e), P_y^e(x^e)$; per semplicità si considerano nulle le coppie ripartite.

La prima fase della formulazione discreta richiede la determinazione della relazione forza-spostamento, cioè la determinazione della matrice di rigidità locale. È necessario a tal fine integrare le equazioni differenziali di equilibrio (5.49) (si omette l'indice e)

$$EA u'' + Px = 0 \quad (30)$$

$$EI v'''' + m' - P_y = 0$$

con le condizioni geometriche

$$u(0) = u_1, \quad v(0) = v_1, \quad v'(0) = \varphi_1$$

$$u(l) = u_2, \quad v(l) = v_2, \quad v'(l) = \varphi_2 \quad (31)$$

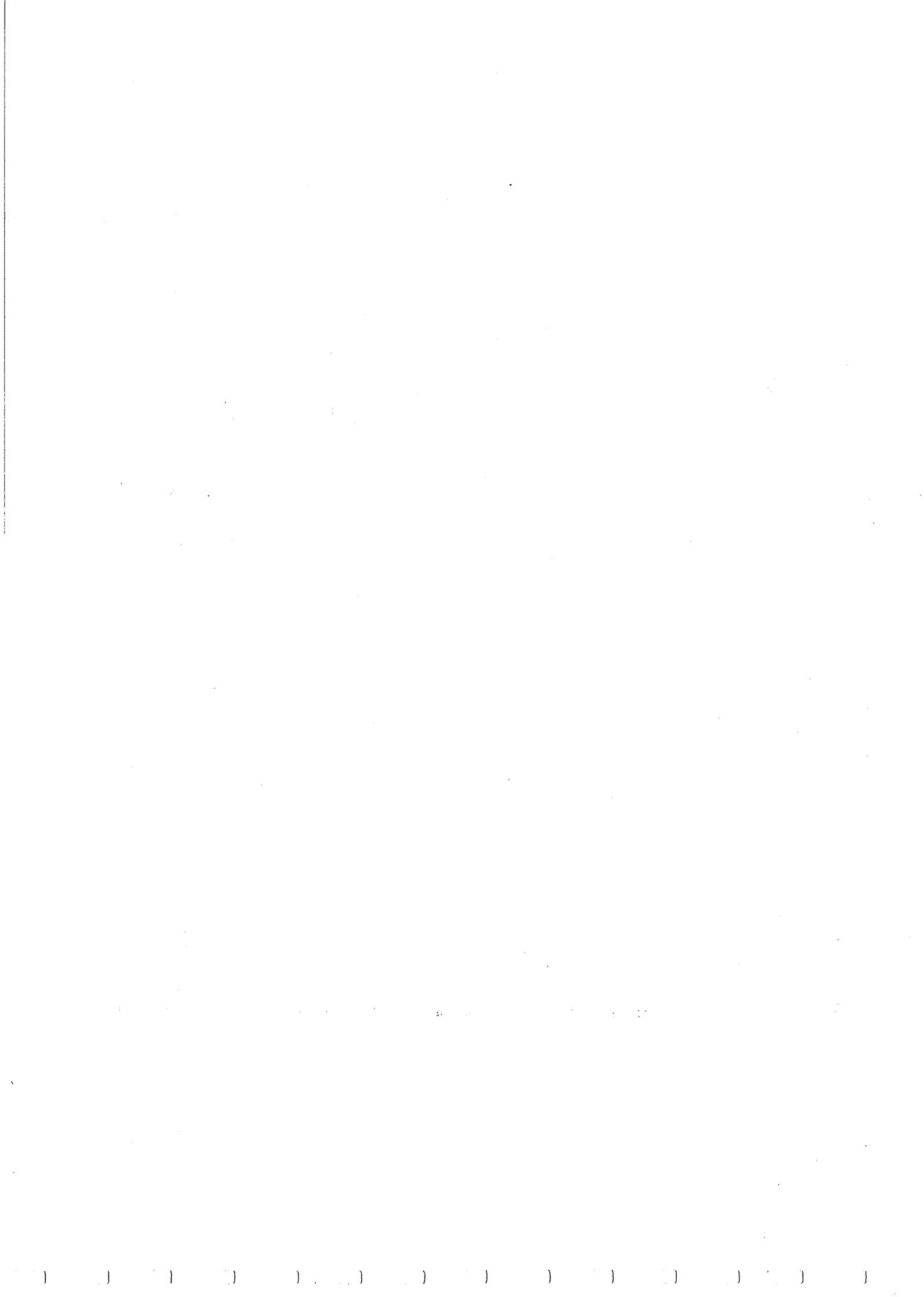
Detta $u_p(x), v_p(x)$ la soluzione particolare del problema a nodi fissi (trave doppiamente incastrata), la soluzione generale del problema omogeneo risulta:

$$u_0(x) = \psi_1(x) u_1 + \psi_2(x) u_2 \quad (32)$$

$$v_0(x) = \psi_3(x) v_1 + \psi_4(x) \varphi_1 + \psi_5(x) v_2 + \psi_6(x) \varphi_2$$

dove $\psi_1(x), \psi_2(x)$ sono definite dalle (6) e le rimanenti funzioni di interpolazione risultano:





vettore globale dei carichi P . A tal fine si consideri il generico elemento e di nodi i, j (numerazione globale) il cui asse locale x^e formi un angolo α^e con l'asse x del riferimento globale (fig. 51).

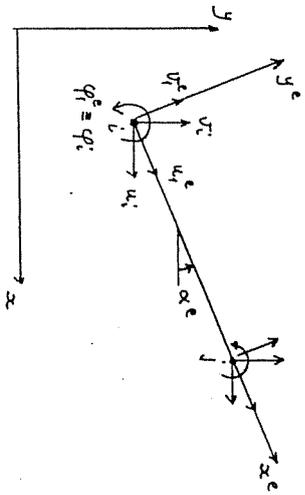


fig. 51

Per mettere in relazione le componenti di spostamento locale e globale e' necessario tener conto, oltre che della topologia (corrispondenza tra le due numerazioni) anche del diverso orientamento degli assi. Entrambe le trasformazioni sono lineari per cui la legge si scrive

$$q^e = T^e \Omega^e q \quad (38)$$

in cui Ω^e e' la matrice di estrazione/collocazione e T^e la matrice rotazione. Per l'elemento in fig. 51 si ha:

$$\Omega^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

→ nodo i
→ nodo j

ed inoltre:

$$T^e = \begin{bmatrix} T^e & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & T^e \end{bmatrix} \quad (40)$$

in cui:

$$T^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & \sin \alpha^e & 0 \\ -\sin \alpha^e & \cos \alpha^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Le condizioni di equilibrio dei nodi nel riferimento globale si scrivono:

$$\bar{P} - \sum_{e=1}^n \Omega^e T^e f^e = 0 \quad (42)$$

in cui $T^e f^e$ sono forze interne proiettate nel riferimento globale e \bar{P} e' il vettore dei carichi nodali

$$\bar{P} = \{ P_x \ P_y \ M, \ P_x \ P_y \ M_2, \dots, P_x \ P_y \ M_n \}^T \quad (43)$$

Tenuto conto delle (11) e (38) le equazioni si scrivono nella forma (21) in cui

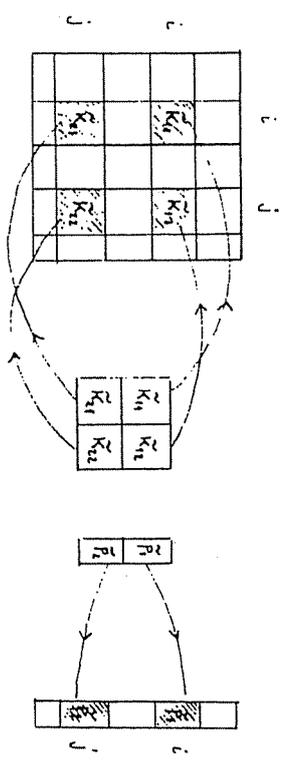
$$P = \bar{P} + \sum_e \Omega^e T^e P^e$$

$$K = \sum_e \Omega^e T^e K^e T^e \Omega^e \quad (44)$$

Come gia' osservato, da un punto di vista operativo non e' conveniente far uso delle matrici Ω ma e' opportuno assemblare P e K in forma diretta, calcolando per ciascun



elemento il vettore $\tilde{p}^c = T^e T^c p^c$ e la matrice $\tilde{K}^c = T^e K^c T^c$, per poi collocarli e sommarli secondo lo schema di fig.52.



7.3.3 Condizioni di vincolo

Nel caso semplice di condizioni di vincolo del tipo $w_i = \bar{w}_i$, $v_i = \bar{v}_i$, $q_i = \bar{q}_i$ valgono le considerazioni svolte nel paragrafo 7.2.3 ed il procedimento operativo illustrato. Qui si vuole considerare il caso piu' generale in cui le condizioni di vincolo siano espresse attraverso una combinazione lineare dei parametri di configurazione

$$A q = z \quad (45)$$

in cui z e' un vettore di termini noti di dimensione $M \times 1$ ed A e' una matrice $M \times N$, essendo M la molteplicita' globale dei vincoli ed $N=3n$ il numero dei gradi di liberta' del sistema non vincolato. La (45) naturalmente comprende il caso gia' trattato, nonche' quello in cui i cedimenti vincolari avvengono secondo direzioni non coincidenti con quelle degli assi globali. Inoltre contempla condizioni di vincolo piu' generali, quali ad esempio quelle di rigidita'

di uno o piu' elementi: in tal caso A , o una sua sottomatrice, coincide con la matrice cinematica del corpo rigido.

Le M condizioni di vincolo (45) riducono ad $N-M$ il numero dei gradi di liberta' del sistema. Detto \hat{q} il vettore dei parametri indipendenti e' possibile riscrivere la (45) nella forma

$$\begin{bmatrix} A_q \\ A_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q} \\ \dots \\ q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix} \quad (46)$$

dalla quale si ricavano M parametri in funzione dei rimanenti

$$q_0 = A_0^{-1} z - A_0^{-1} A_q \hat{q} \quad (47)$$

La (47) mostra che la scelta dei parametri \hat{q} non puo' essere arbitraria ma e' subordinata alla condizione che A_0 sia non singolare. Tra i parametri q e \hat{q} sussiste dunque la relazione lineare non omogenea

$$\begin{Bmatrix} \hat{q} \\ q_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -A_0^{-1} A_q \end{bmatrix} \hat{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_0^{-1} z \end{bmatrix} \quad (48)$$

ovvero

$$q = H \hat{q} + s \quad (48')$$



Si studi ora come si modificano le equazioni di equilibrio $Kq = P$ per effetto della trasformazione (48'). Sostituendo le (48') si ha:

$$K(H\hat{q} + s) = P + P_{react} \quad (49)$$

dove P_{react} sono le M reazioni vincolari che nascono per effetto delle M condizioni di vincolo. Le (49) costituiscono un sistema di N equazioni in $N-M$ incognite \hat{q} ed M incognite P_{react} ; per ottenere delle equazioni pure negli spostamenti e' necessario combinare linearmente le equazioni ed estrarne $N-M$. L'operazione puo' essere facilmente compiuta osservando che, per l'ipotesi di vincolo perfetto P_{react} compie lavoro virtuale nullo in ogni spostamento cinematicamente ammissibile, cioe' per ogni δq che rispetta la condizione

$$\delta q = \delta(H\hat{q} + s) = H^T \delta \hat{q}, \quad A \delta \hat{q} \quad (50)$$

Deve essere perciò:

$$P_{react} = \delta q^T P_{react} = \delta \hat{q}^T H^T P_{react} = 0, \quad A \delta \hat{q} \quad (51)$$

da cui

$$H^T P_{react} = 0 \quad (52)$$

Premoltiplicando allora la (19) per H^T , in virtu' della (52) si eliminano le reazioni vincolari e si ottiene il sistema (25) $\hat{K}\hat{q} = \hat{P}$ in cui:

$$\hat{K} = H^T K H \quad (53)$$

$$\hat{P} = H^T (P - Ks)$$

Si noti che K segue la legge di trasformazione di un tensore e che \hat{P} tiene conto del termine noto S della trasformazione non omogenea.

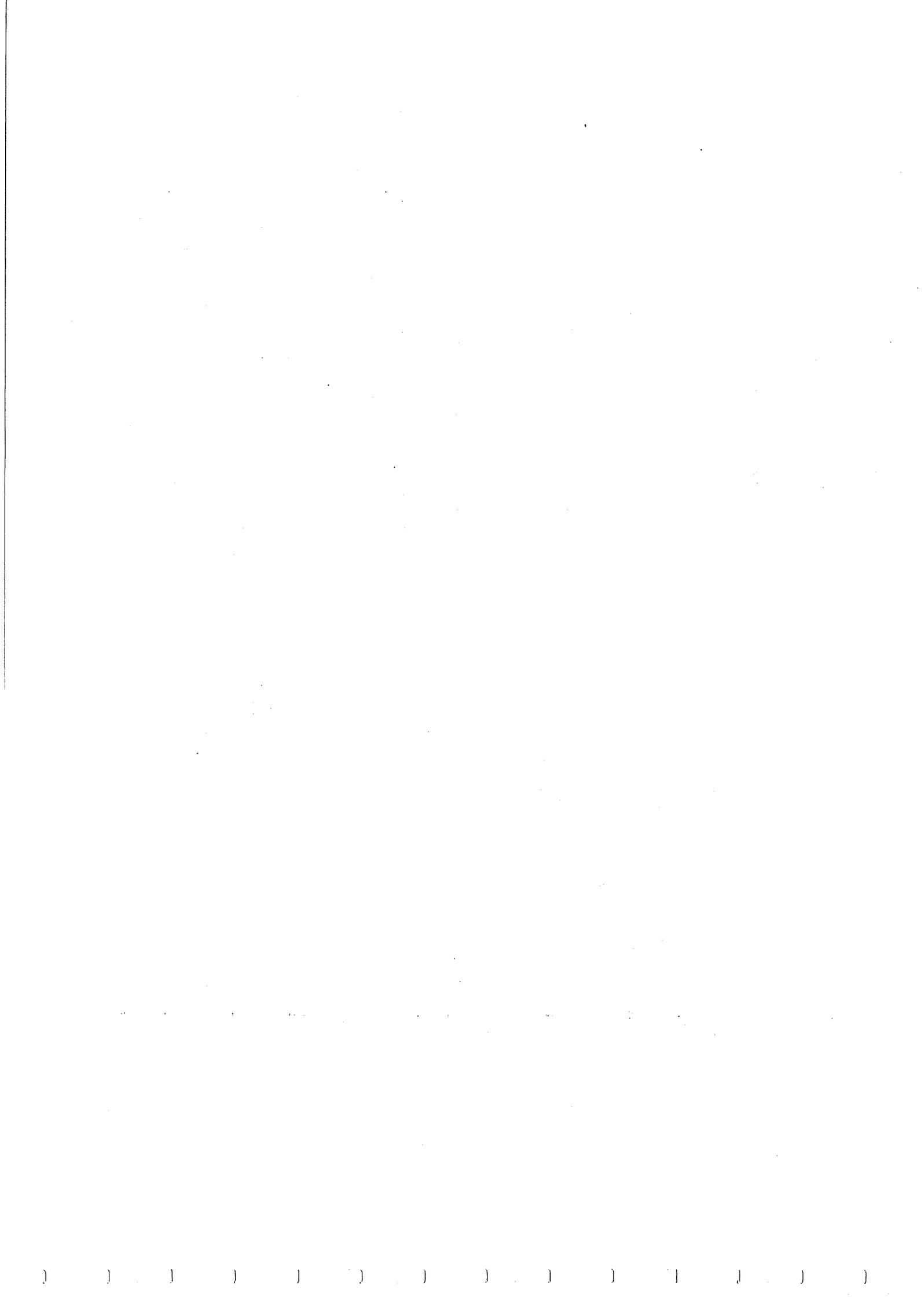
7.3.4 Calcolo di spostamenti, deformazioni e tensioni

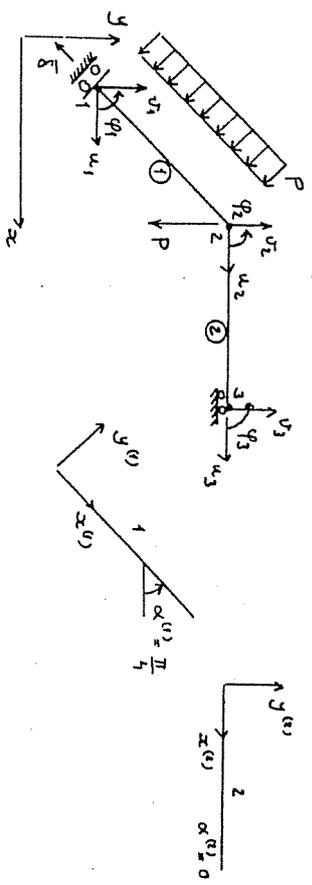
Risolto il problema $\hat{K}\hat{q} = \hat{P}$ il calcolo delle grandezze di elemento segue il procedimento gia' illustrato nel paragrafo 7.2.4. In particolare, dalla (48'), noto \hat{q} si ricava q e per ciascun elemento delle (38) si calcola q^e . Tramite la matrice di rigidita' locale, note le forze equivalenti ai carichi ripartiti (eq.(11)), e' possibile calcolare le forze di estremita', da cui le sollecitazioni. Alternativamente, tramite le (32) (tenuto conto della soluzione a nodi fissi) si determina il campo di spostamento da cui per derivazione si ottiene il campo di deformazione e poi quello di tensione.

7.3.5 Esempio: sistema di due travi

Si consideri il semplice sistema illustrato in figura, costituito da due travi di uguale lunghezza l ed uguali caratteristiche elastiche, sottoposto ad un carico ripartito P , ad una forza P e ad un cedimento vincolare δ . Il vettore delle variabili di configurazione q e' costituito da nove componenti di spostamento, tre per ciascun nodo, misurate nel riferimento globale xy :

$$q = \{u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2, u_3, v_3, \varphi_3\}^T$$





Scelto un riferimento locale per ciascuna asta (vedi figura) le matrici locali di rigidezza (37) sono:

$$K^{(1)} = K^{(2)} = \begin{bmatrix} c_4 & \cdot & \cdot & -c_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_1 & c_3 & \cdot & -c_1 & c_3 \\ \cdot & -c_3 & c_2 & \cdot & -c_3 & c_2 \\ -c_4 & \cdot & \cdot & c_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -c_1 & -c_3 & \cdot & c_1 & -c_3 \\ \cdot & c_3 & c_2 & \cdot & -c_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

in cui

$$c_1 = \frac{12EI}{l^3}, \quad c_2 = \frac{4EI}{l}, \quad c_3 = \frac{6EI}{l^2}, \quad c_4 = \frac{EA}{l}$$

I vettori carichi locali (36) risultano

$$P^{(1)} = \left\{ 0 \quad -P \frac{l}{2} \quad -P \frac{l^2}{12} \quad 0 \quad -P \frac{l}{2} \quad P \frac{l^2}{12} \right\}^T$$

$$P^{(2)} = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T$$

in quanto nella soluzione (particolare) a nodi fissi l'asta 2 e' scarica e l'asta 1 e' sollecitata alle estremita' da reazioni vincolari uguali a $-P^{(1)}$.
Le matrici T^e che tengono conto dell'orientazione dei riferimenti locali $x^e y^e$ nel riferimento globale $x y$ si calcolano dalle (40) e (41) sostituendo i valori $\alpha^{(1)} = \pi/2$ e $\alpha^{(2)} = 0$ e si ricavano:

$$T^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le grandezze $\tilde{P}^e = T^e P^e$ e $\tilde{K}^e = T^e K^e T^e$ risultano allora

$$\tilde{K}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1+c_4 & c_1-c_4 & -\sqrt{2}c_3 & -(c_1+c_4) & c_1-c_4 & -\sqrt{2}c_3 \\ c_1-c_4 & c_1+c_4 & \sqrt{2}c_3 & c_1-c_4 & c_1+c_4 & \sqrt{2}c_3 \\ -\sqrt{2}c_3 & \sqrt{2}c_3 & 2c_2 & \sqrt{2}c_3 & -\sqrt{2}c_3 & 2c_2 \\ -(c_1+c_4) & c_1-c_4 & \sqrt{2}c_3 & c_1+c_4 & c_1-c_4 & \sqrt{2}c_3 \\ c_1-c_4 & -(c_1+c_4) & -\sqrt{2}c_3 & c_1-c_4 & c_1+c_4 & -\sqrt{2}c_3 \\ -\sqrt{2}c_3 & \sqrt{2}c_3 & 2c_2 & \sqrt{2}c_3 & -\sqrt{2}c_3 & 2c_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{(1)} = \left\{ P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l^2}{12}, P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l\sqrt{2}}{4}, P \frac{l^2}{12} \right\}^T$$

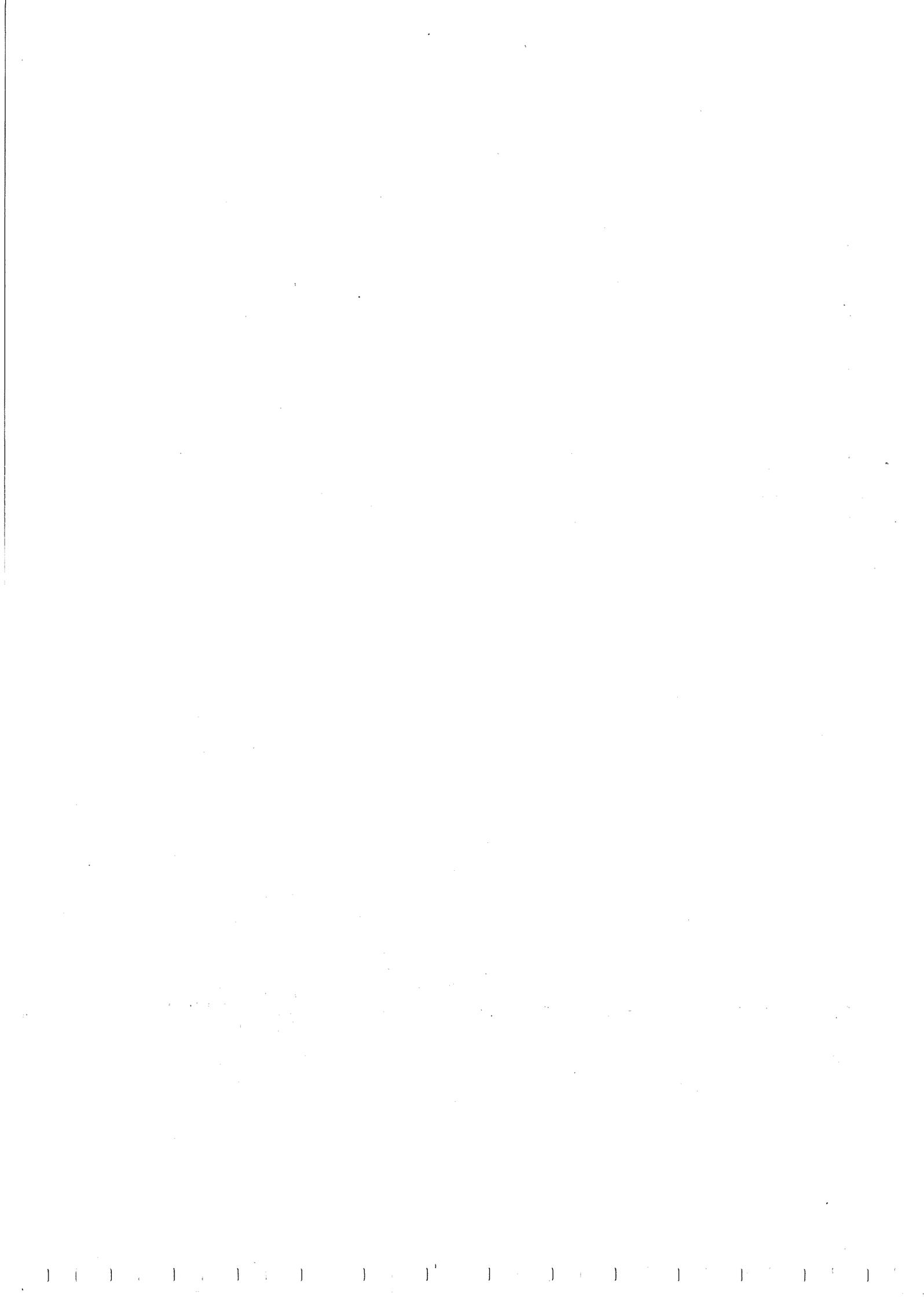
$$\tilde{K}^{(2)} = K^{(2)}, \quad \tilde{P}^{(2)} = P^{(2)}$$

Assemblando le due matrici \tilde{K} si ottiene:

c_1+c_4	c_1-c_4	$-\sqrt{2}c_3$	$-(c_1+c_4)$	c_1-c_4	$-\sqrt{2}c_3$	0	0	0
c_1-c_4	c_1+c_4	$\sqrt{2}c_3$	c_1-c_4	c_1+c_4	$\sqrt{2}c_3$	0	0	0
$-\sqrt{2}c_3$	$\sqrt{2}c_3$	$2c_2$	$\sqrt{2}c_3$	$-\sqrt{2}c_3$	$2c_2$	0	0	0
$-(c_1+c_4)$	c_1-c_4	$\sqrt{2}c_3$	c_1+c_4	c_1-c_4	$\sqrt{2}c_3$	$-c_1$	0	0
c_1-c_4	$-(c_1+c_4)$	$-\sqrt{2}c_3$	c_1-c_4	c_1+c_4	$-\sqrt{2}c_3$	0	$-c_1$	c_3
$-\sqrt{2}c_3$	$\sqrt{2}c_3$	$2c_2$	$\sqrt{2}c_3$	$-\sqrt{2}c_3$	$2c_2$	0	0	c_2
0	0	0	$-c_1$	0	0	c_4	0	0
0	0	0	0	$-c_1$	$-c_3$	0	c_1	$-c_3$
0	0	0	0	c_3	c_2	0	$-c_3$	c_2

Assemblando i due vettori \tilde{P} e tenuto conto della forza applicata al nodo 2 si ha:

$$P = \left\{ P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l^2}{12}, P \frac{l\sqrt{2}}{4}, -P \frac{l\sqrt{2}}{4}, P, P \frac{l^2}{12}, 0, 0, 0 \right\}^T$$



A questo punto del procedimento e' necessario tenere conto delle condizioni di vincolo. I due glifi nei nodi 1 e 3 impongono che sia

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (u_1 + v_1) = -\bar{\delta}, \quad \varphi_1 = v_3 = \varphi_3 = 0$$

Le condizioni di annullamento delle variabili φ_1, v_3, u_3 si ottengono semplicemente cancellando la terza, ottava e nona riga e colonna nella matrice K e le corrispondenti componenti nel vettore P . Si ottiene cosi' il sistema 6×6 :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1+c_4 & c_4-c_1 & -(c_1+c_4) & c_1-c_4 & -\sqrt{2}c_3 & 0 \\ c_1-c_1 & c_1+c_4 & c_1-c_4 & -(c_1+c_4) & \sqrt{2}c_3 & 0 \\ -(c_1+c_4) & c_1-c_4 & c_1+3c_4 & c_4-c_1 & \sqrt{2}c_3 & -2c_4 \\ c_1-c_4 & -(c_1+c_4) & c_4-c_1 & 3c_1+c_4 & (2-\sqrt{2})c_3 & 0 \\ -\sqrt{2}c_3 & \sqrt{2}c_3 & \sqrt{2}c_3 & (2-\sqrt{2})c_3 & 4c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_4 & 0 & 0 & 2c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P\sqrt{2} \\ -P\sqrt{2} \\ P\sqrt{2} \\ -P\sqrt{2} \\ P\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in cui u_1 e v_1 non sono indipendenti, in quanto devono soddisfare la condizione relativa al cedimento vincolare $\bar{\delta}$. L'imposizione della relazione di vincolo puo' essere effettuata applicando la tecnica illustrata nel paragrafo 7.3.3; a titolo esemplificativo si consideri quale ulteriore vincolo la condizione di inestensibilita' dell'asta 2, che si scrive:

$$u_3 - u_2 = 0$$

I sei parametri $u_1, v_1, u_2, v_2, \varphi_2, u_3$ devono quindi soddisfare due relazioni di vincolo che, in forma matriciale, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\bar{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sono cioe' del tipo (45). Le relazioni di vincolo possono essere risolte in corrispondenza di un minore 2×2 non nullo per fornire due componenti di spostamento in funzione delle altre quattro; ad esempio

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}\bar{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La legge che trasforma le sei componenti del vettore q nelle quattro del vettore \hat{q} e' pertanto:

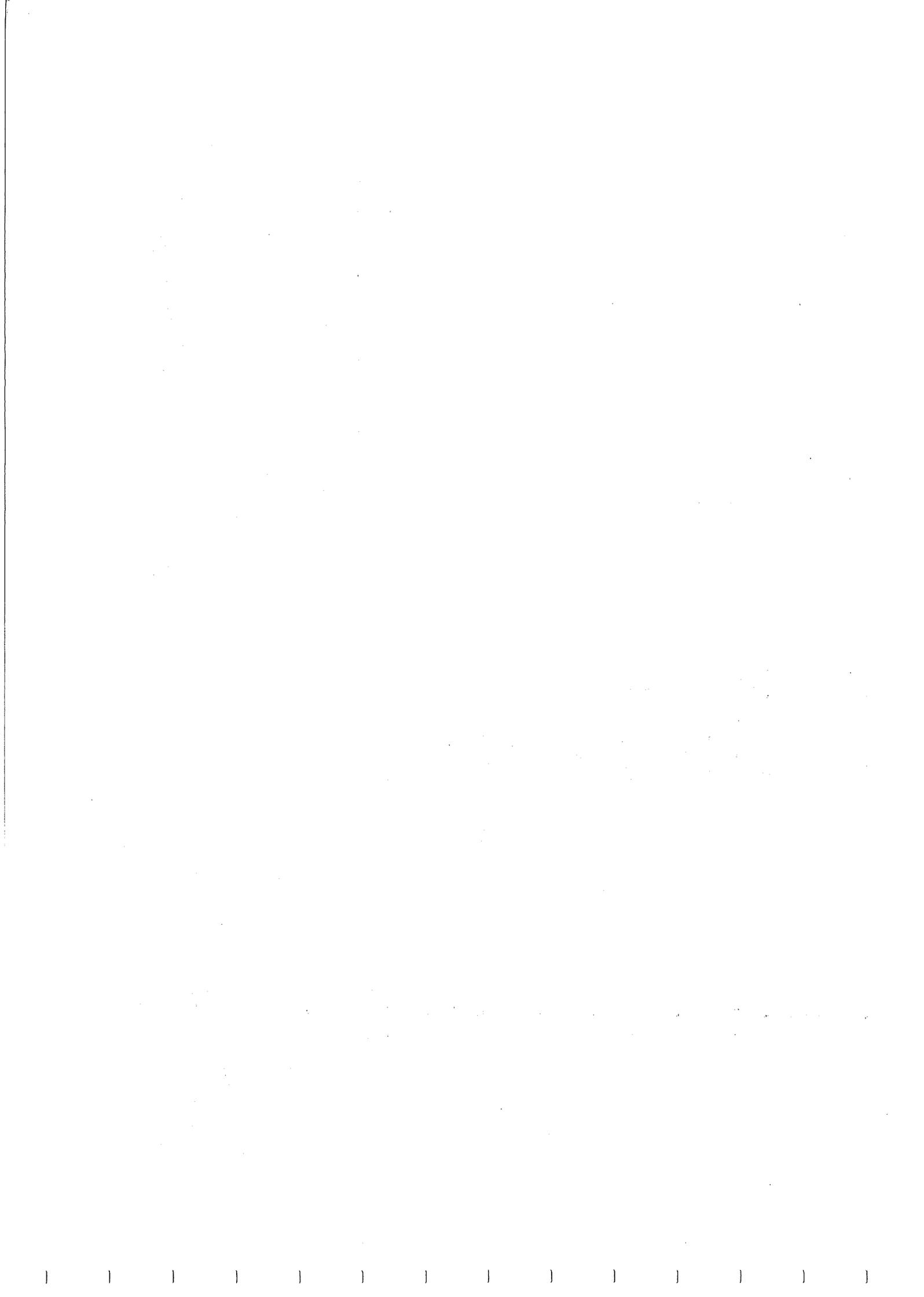
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}\bar{\delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In cui, nella notazione (48'), la matrice 6×4 e' la matrice H e il vettore 6×1 e' il vettore dei termini noti S . Applicando le trasformazioni (53) si ottiene:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4c_1 & 2c_1 & -2\sqrt{2}c_3 & -2c_1 \\ 2c_1 & 3c_1+c_4 & (2-\sqrt{2})c_3 & c_4-c_1 \\ -2\sqrt{2}c_3 & (2-\sqrt{2})c_3 & 4c_2 & \sqrt{2}c_3 \\ -2c_1 & c_4-c_1 & \sqrt{2}c_3 & c_1+c_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P} = \left\{ P\sqrt{2} \quad -P\sqrt{2} + P \quad \frac{P\sqrt{2}}{2} \quad P\sqrt{2} \right\}^T + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\delta} \left\{ -2c_1 \quad -(c_1+c_4) \quad c_3\sqrt{2} \quad c_1-c_4 \right\}^T$$

Si noti che l'operazione di postmoltiplicazione di K per la matrice H corrisponde semplicemente alla sostituzione $v_1 = -u_1$ e $u_2 = u_3$, quindi a sottrarre la seconda colonna dalla prima e a sommare la terza colonna alla sesta; l'operazione di premoltiplicazione per H^T sia della matrice K che del vettore P corrisponde a sottrarre membro a membro le prime due equazioni e a sommare la terza e la sesta equazione. Le due equazioni cosi' ottenute (corrispondenti a prima e quarta riga di \hat{K}) rappresentano rispettivamente la condizione di equilibrio del nodo 1 nella direzione di scorrimento del glifo (in cui non appare la reazione vincolare) e l'equilibrio non alla traslazione secondo x dell'asta 2, considerata come corpo (assialmente) rigido. Il sistema $\hat{K}\hat{q} = \hat{P}$ permette di determinare le quattro incognite del problema.



7.3.6 Sistemi reticolari

Un caso particolare di sistema di travi e' rappresentato dalle strutture reticolari, sistemi costituiti da travi incernierate alle estremita', sottoposti esclusivamente a forze applicate ai nodi. Poiche' le travi sono sollecitate soltanto assialmente il loro comportamento meccanico e' descritto dal modello di asta immerso in uno spazio bidimensionale (o tridimensionale). Tutte le grandezze, locali e globali, che intervengono nella formulazione discreta del problema elastico possono peraltro facilmente dedursi dal modello di trave eliminando i gradi di liberta' rotazionali (in quanto tutti i punti materiali del sistema, e in particolare i nodi, non sono dotati di orientazione) ed inoltre ponendo uguale a zero la rigidezza flessionale EI che appare nella matrice di rigidezza locale. Gli spostamenti e le forze nodali del sistema sono percio'

$$q = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n \}^T$$

$$P = \{ P_{1x} \ P_{1y} \ P_{2x} \ P_{2y} \ \dots \ P_{nx} \ P_{ny} \}^T$$

ciascuno in numero di $2n$; la matrice di rigidezza locale e'

$$K^e = \begin{pmatrix} EB \\ \rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed e' associata a forze e spostamenti locali

Si noti che le forze ortogonali all'asta (f_y) sono nulle e che quelle dirette secondo l'asta (f_x) dipendono solo dagli spostamenti assiali u_1 e u_2 , in accordo all'espressione (13) di K^e relativa al problema monodimensionale.

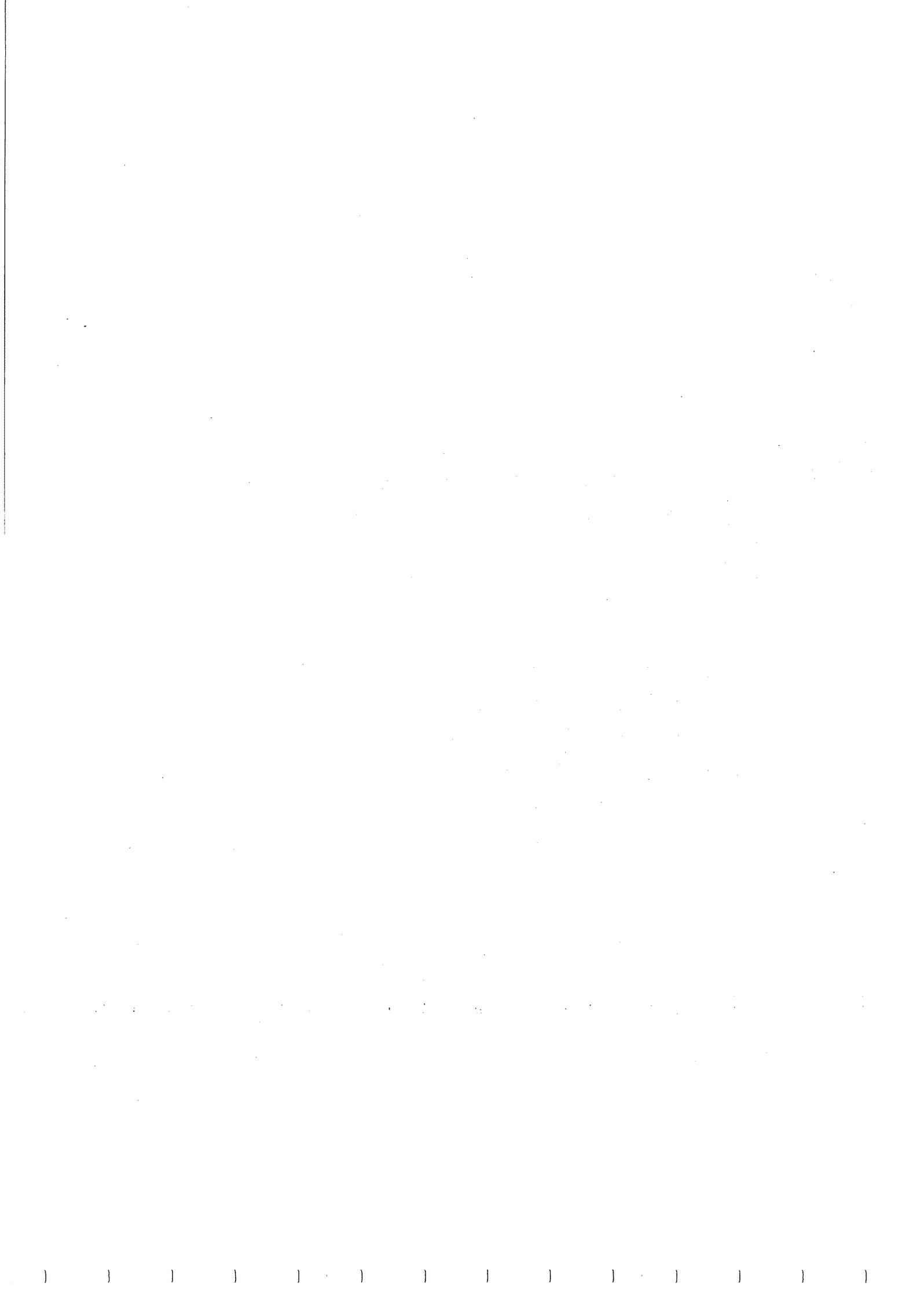
$$f^e = \begin{Bmatrix} f_{1x}^e \\ f_{1y}^e \\ f_{2x}^e \\ f_{2y}^e \end{Bmatrix}, \quad q^e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix}$$

La matrice \bar{T}^e che tiene conto dell'orientazione dell'asta 'e' nel riferimento globale risulta

$$\bar{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & \sin \alpha^e \\ -\sin \alpha^e & \cos \alpha^e \end{bmatrix}$$

e la matrice T^e , di dimensioni 4×4 , si ottiene dalla (40).

Assemblando le matrici di rigidezza K^e secondo la legge (44) si ricava infine il sistema $Kq = P$; si noti che il vettore dei carichi consta delle sole forze nodali e quindi non richiede operazioni di assemblaggio.



8 METODI DI DISCRETIZZAZIONE

8.1 Introduzione

Il problema elastico relativo ad un sistema continuo richiede la determinazione di funzioni spostamento, tensione e deformazione definite sull'intero dominio occupato dal corpo, costituisce cioè un problema di campo. Le equazioni differenziali che lo governano sono peraltro molto difficilmente integrabili in forma esatta, fatta eccezione per condizioni geometriche, di carico e di vincolo molto regolari e del tutto particolari; inoltre anche metodi analitici approssimati, quali sviluppi in serie di Taylor e Fourier, risultano spesso molto laboriosi e quindi di sconsigliabile impiego. Nella gran parte delle applicazioni si rende perciò necessario ricorrere a metodi numerici approssimati che trasformano il problema differenziale in un problema algebrico e sono orientati all'impiego dell'elaboratore elettronico. Questi metodi sono detti di discretizzazione in quanto riducono il problema continuo (con infinite incognite) ad un problema discreto (con un numero finito di incognite). Tra questi il metodo degli elementi finiti e' di gran lunga il piu' importante e rappresenta oggi la piu' potente tecnica di calcolo disponibile. Nel seguito si da' un cenno, necessariamente limitato, sullo spirito del metodo e sulle problematiche ad esso connesse; si fa precedere l'illustrazione da quella del metodo di Ritz da cui il metodo degli elementi finiti puo'

pensarsi discendere come caso particolare. Entrambi i metodi sono presentati seguendo l'approccio agli spostamenti, di piu' largo uso del metodo delle forze in problemi di analisi automatica delle strutture.

8.2 Metodo di Ritz

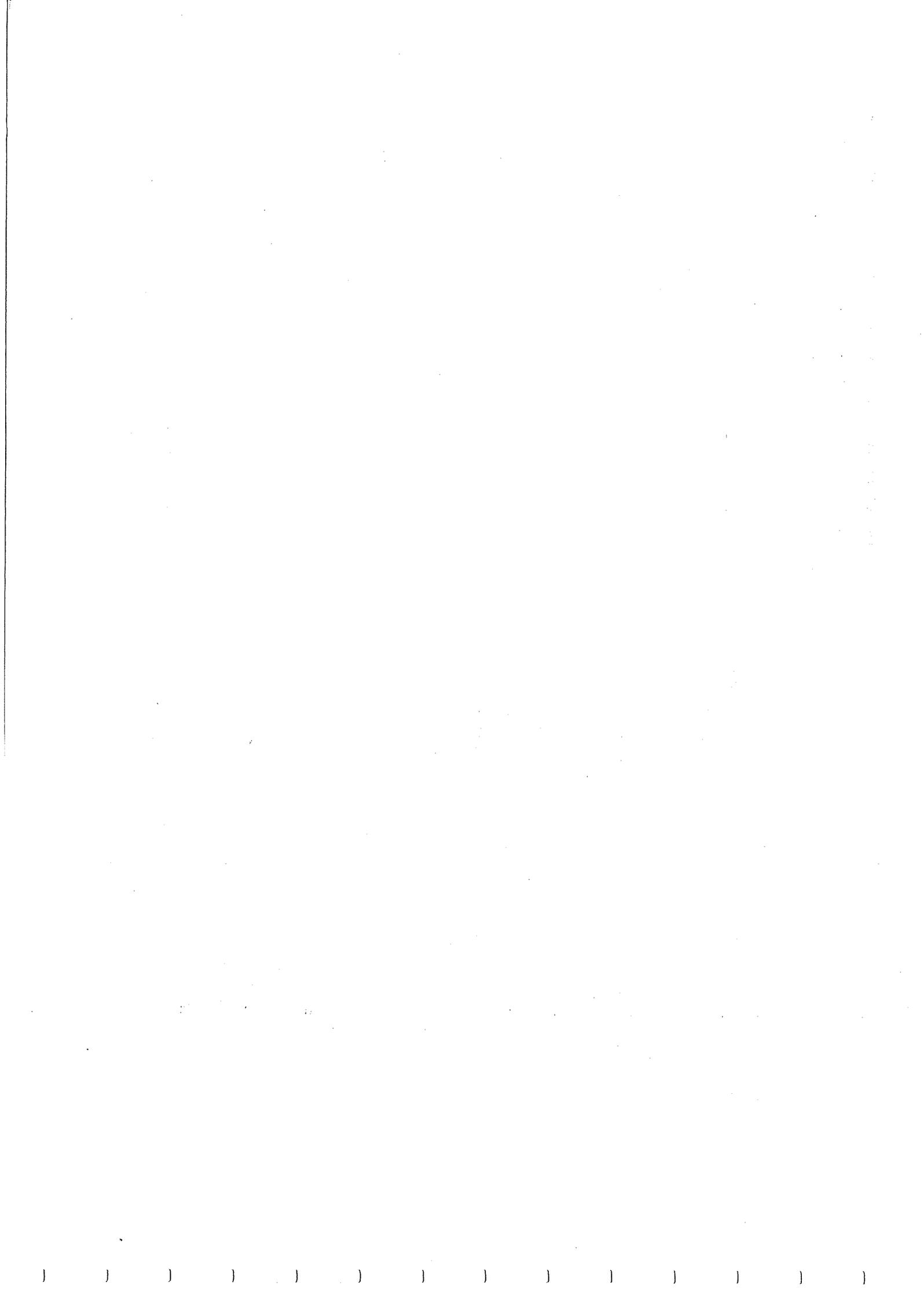
L'idea fondamentale del metodo di Ritz e' quella di esprimere le variabili di configurazione $u(x)$ nella forma

$$u(x) = Y(x) q \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (1)$$

dove $Y(x)$ e' una matrice di funzioni note (funzioni di forma) e q e' il vettore dei parametri lagrangiani, che assumono il significato di ampiezza delle funzioni di forma. Perche' la (1) descriva una configurazione cinematicamente ammissibile per ogni valore di q , tutte le funzioni che compongono la matrice $Y(x)$ devono soddisfare le condizioni al contorno geometriche, deve cioè essere $\psi_{ij}'(x) = 0$ su $\partial \mathcal{D}_u$ (+).

La configurazione equilibrata e' determinata nello spirito del metodo degli spostamenti seguendo la formulazione variazionale, imponendo cioè che l'energia potenziale totale (1.26) sia minima nella classe \mathcal{E} delle configurazioni compatibili (1). Il campo di deformazione $\epsilon(x)$ compatibile con gli spostamenti (1) e'

(+) Le condizioni al contorno sono assunte di tipo omogeneo. A questo caso ci si puo' sempre ridurre attraverso un opportuno cambio di variabile (vedi Appendice).



$$\mathcal{E}(x) = D \Psi(x) q = E(x) q \quad \text{in } \mathcal{E} \quad (2)$$

dove $E(x) = D \Psi(x)$ e' una matrice di funzioni note. Si osservi che, perche' alle funzioni $\Psi(x)$ sia applicabile l'operatore differenziale D , le funzioni di forma devono essere continue e derivabili fino all'ordine richiesto dal problema cinematico. Con la (2) l'energia potenziale totale (1.12) si scrive:

$$V(q) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} q^T E^T C E q \, dV - \int_{\mathcal{E}} q^T \Psi^T b \, dV - \int_{\mathcal{S}_f} q^T \Psi^T f \, dS \quad (3)$$

Imponendo la stazionarieta' in $\tilde{\mathcal{E}}$ si ha

$$\delta V = \delta q^T \left(\int_{\mathcal{E}} E^T C E \, dV \, q - \int_{\mathcal{E}} \Psi^T b \, dV - \int_{\mathcal{S}_f} \Psi^T f \, dS \right) = 0 \quad (4)$$

da cui si ottiene il sistema di equazioni

$$K q = P \quad (5)$$

dove

$$K = \int_{\mathcal{E}} E^T C E \, dV \quad (6)$$

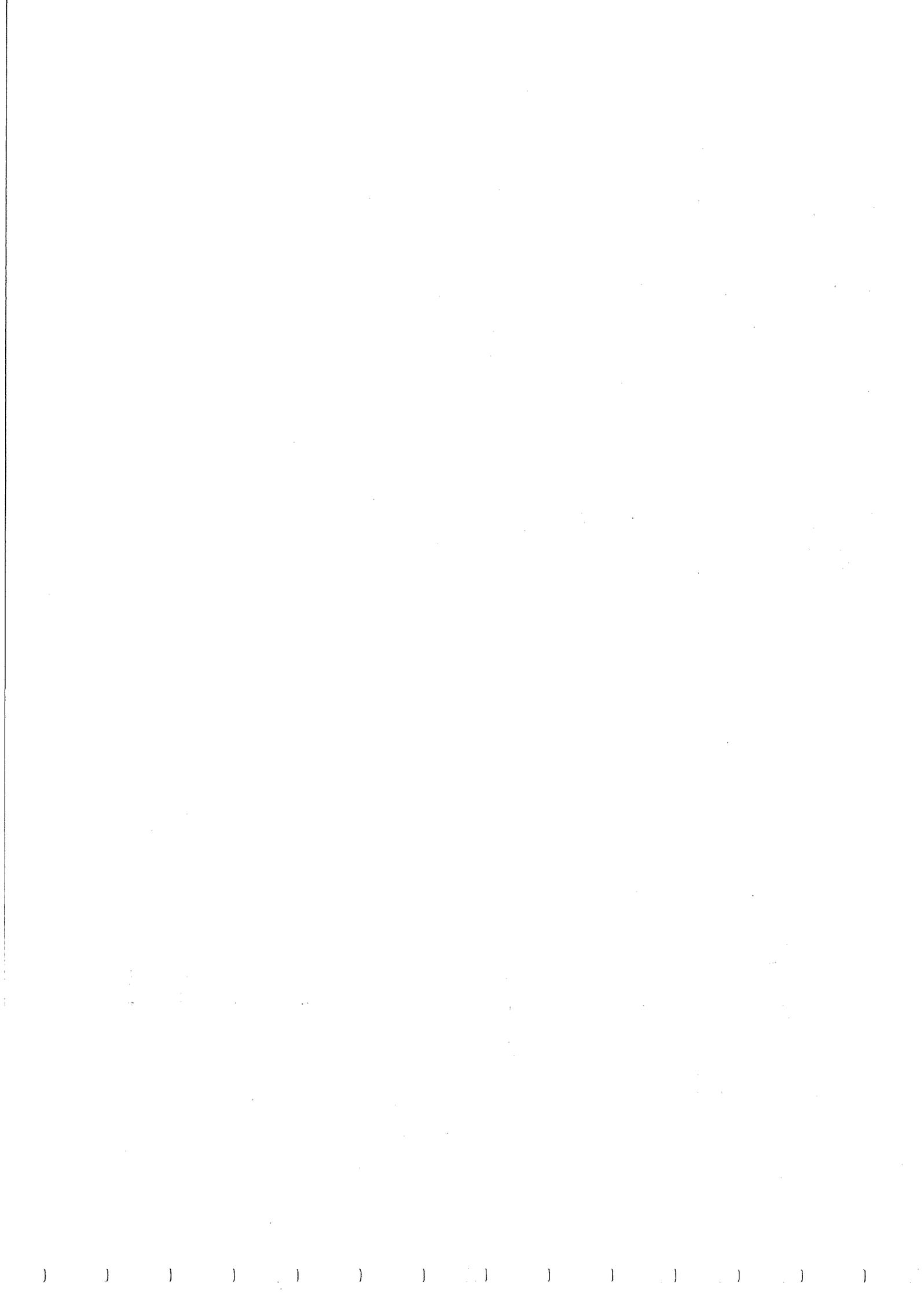
$$P = \int_{\mathcal{E}} \Psi^T b \, dV + \int_{\mathcal{S}_f} \Psi^T f \, dS$$

K e' la matrice di rigidita' del sistema, simmetrica in quanto $C = C^T$; e' il vettore delle forze generalizzate, definito come lavoro compiuto dalle forze di volume e

di superficie nelle funzioni di forma; piu' specificamente l' i -esima forza generalizzata P_i e' il lavoro compiuto dalle forze attive negli spostamenti $u(x)$ conseguenti a $q_i = 1$, $q_j = 0$, con $j \neq i$.

Le equazioni (5) costituiscono le condizioni di equilibrio del sistema in termini di spostamento q . Determinati i parametri lagrangiani, la (1) fornisce il campo di spostamento, la (2) quello di deformazione e il legame costitutivo $\mathcal{G} = C \mathcal{E}$ quello di tensione. Naturalmente la soluzione che si determina e' approssimata, in quanto la (1) non rappresenta la piu' generale configurazione compatibile; essa descrive infatti uno spazio $\tilde{\mathcal{E}}$ di dimensione finita contenuto nello spazio \mathcal{E} delle configurazioni compatibili, di dimensione infinita (spazio di funzioni). Il principio variazionale $\delta V = 0$ individua pertanto la configurazione a cui corrisponde un valore stazionario (ed anche minimo) di V in $\tilde{\mathcal{E}}$, che non necessariamente coincide con il valore stazionario di V in \mathcal{E} . In definitiva, pertanto, se la soluzione esatta (incognita) e' esprimibile nella forma (1) il metodo di Ritz la determina correttamente, altrimenti la soluzione corrisponde ad un valore approssimato per eccesso dell'energia potenziale totale. Poiche' risulta, dalle (3) e (6),

$$V(q) = \frac{1}{2} q^T K q - q^T P \quad (7)$$



alla configurazione $q = K^{-1}P$ e' associato il valore minimo di V in $\tilde{\mathcal{E}}$ $V_{min} = -1/2 q^T P$ mentre l'energia potenziale elastica $U = 1/2 q^T K q$ assume il valore $U = 1/2 q^T P = -V_{min}$. Poiche' V_{min} e' approssimata per eccesso, U e' approssimata per difetto, per cui il metodo di Ritz sottostima gli spostamenti, ovvero sovrastima la rigidita della struttura.

Le condizioni di equilibrio (5) vanno considerate come condizioni di equilibrio in media (K e P sono infatti definite da integrali) per cui la soluzione, in generale, viola le condizioni puntuali di equilibrio. In particolare le condizioni al contorno meccaniche non sono soddisfatte a meno che le funzioni di forma $\psi_i(x)$ non siano tali da soddisfare ognuna indipendentemente. Poiche' peraltro e' generalmente molto difficile determinare funzioni che soddisfano sia le condizioni geometriche che quelle meccaniche, quasi sempre ci si limita a soddisfare le sole condizioni al contorno geometriche e ad aumentare il numero delle funzioni approssimanti.

Riguardo la convergenza del procedimento bastera' dire che se le funzioni di forma appartengono ad un insieme completo (+), la congruenza e' monotona al crescere del

(+) Un insieme di funzioni $\psi_i(x)$ e' detto completo se, per ogni $w(x)$ continua a tratti e'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} [w(x) - \sum_{i=1}^n \psi_i(x) q_i]^2 dx = 0$$

se cioe' si ha convergenza in media. Se $w(x)$ e' continua in $[x_1, x_2]$ la serie converge a $w(x)$, salvo al piu' nei punti di estrema' dell'intervallo.

loro numero n . Una misura della convergenza puo' essere ottenuta confrontando i valori successivi assunti da V_{min} all'aumentare di n . Esempi di insiemi completi sono le funzioni polinomiali e trigonometriche nonche' le autofunzioni di problemi differenziali autoaggiunti.

Per concludere si vuole osservare che l'equazione di equilibrio $Kq = P$ puo' essere ottenuta nello stesso spirito del metodo di Ritz sostituendo la (1) nell'equazione dei lavori virtuali piuttosto che nel funzionale energia potenziale totale, seguendo quindi la formulazione integrale in luogo di quella variazionale. Il metodo e' detto di Galerkin e puo' essere riconosciuto come caso particolare del metodo dei residui pesati. Le equazioni cui si perviene sono le stesse di quelle fornite dal metodo di Ritz.

8.3 Applicazioni del metodo di Ritz

Si presentano due applicazioni del metodo di Ritz, relative rispettivamente ad una trave e ad una piastra.

a) Trave

Si consideri una trave indeformabile a taglio, sottoposta a carichi trasversali $P(x)$. L'unica variabile di configurazione e' lo spostamento trasversale $v(x)$ (essendo $w(x) \equiv 0$), che viene espresso come

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) q_i = \Psi^T q \quad (8)$$

dove Ψ e' una matrice $1 \times n$. La deformazione $\chi(x) = v''$ risulta percio'



$$\begin{bmatrix} 1 & 128 \\ 128 & \frac{2304}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = - \frac{P \rho^3}{64 EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Se si considera solo il primo termine ($n=1$) dello sviluppo (8) si ottiene la soluzione:

$$q_1^{(1)} = - \frac{P \rho^3}{64 EI}$$

Alla quale corrisponde il campo di spostamenti e tensioni:

$$v^{(1)}(x) = - \frac{P \rho^3}{64 EI} \left(1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$M^{(1)}(x) = EI v^{(1)''}(x) = \frac{P \rho}{8} = \text{cost}$$

$$T^{(1)}(x) = -EI v^{(1)'''}(x) = 0$$

Confrontando i risultati approssimati con quelli esatti si ha:

$$\frac{v_c^{(1)}}{v_c} = \frac{3}{4}, \quad \frac{H_c^{(1)}}{H_c} = \frac{1}{2}$$

L'energia potenziale totale corrispondente vale:

$$V_{min}^{(1)} = - \frac{1}{2} q^T P = - \frac{1}{128} \frac{P^2 \rho^3}{EI}$$

Passando a considerare uno sviluppo con due termini ($n=2$) la soluzione del sistema $Kq = P$ fornisce

$$q_1^{(2)} = - \frac{13}{512} \frac{P \rho^3}{EI}, \quad q_2^{(2)} = \frac{1}{1024} \frac{P \rho^3}{EI}$$

da cui

$$v^{(2)}(x) = - \frac{P \rho^3}{64 EI} \left[\frac{13}{8} \left(1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right) - \frac{5}{16} \left(1 - 16 \frac{x^4}{\ell^4} \right) \right]$$

$$M^{(2)}(x) = \frac{13}{64} P \rho - \frac{15}{16} P \frac{x^2}{\ell}$$

$$T^{(2)}(x) = \frac{30}{16} P \frac{x}{\ell}$$

In particolare si ha:

$$\frac{v_c^{(2)}}{v_c} = 0.984, \quad \frac{H_c^{(2)}}{H_c} = 0.812$$

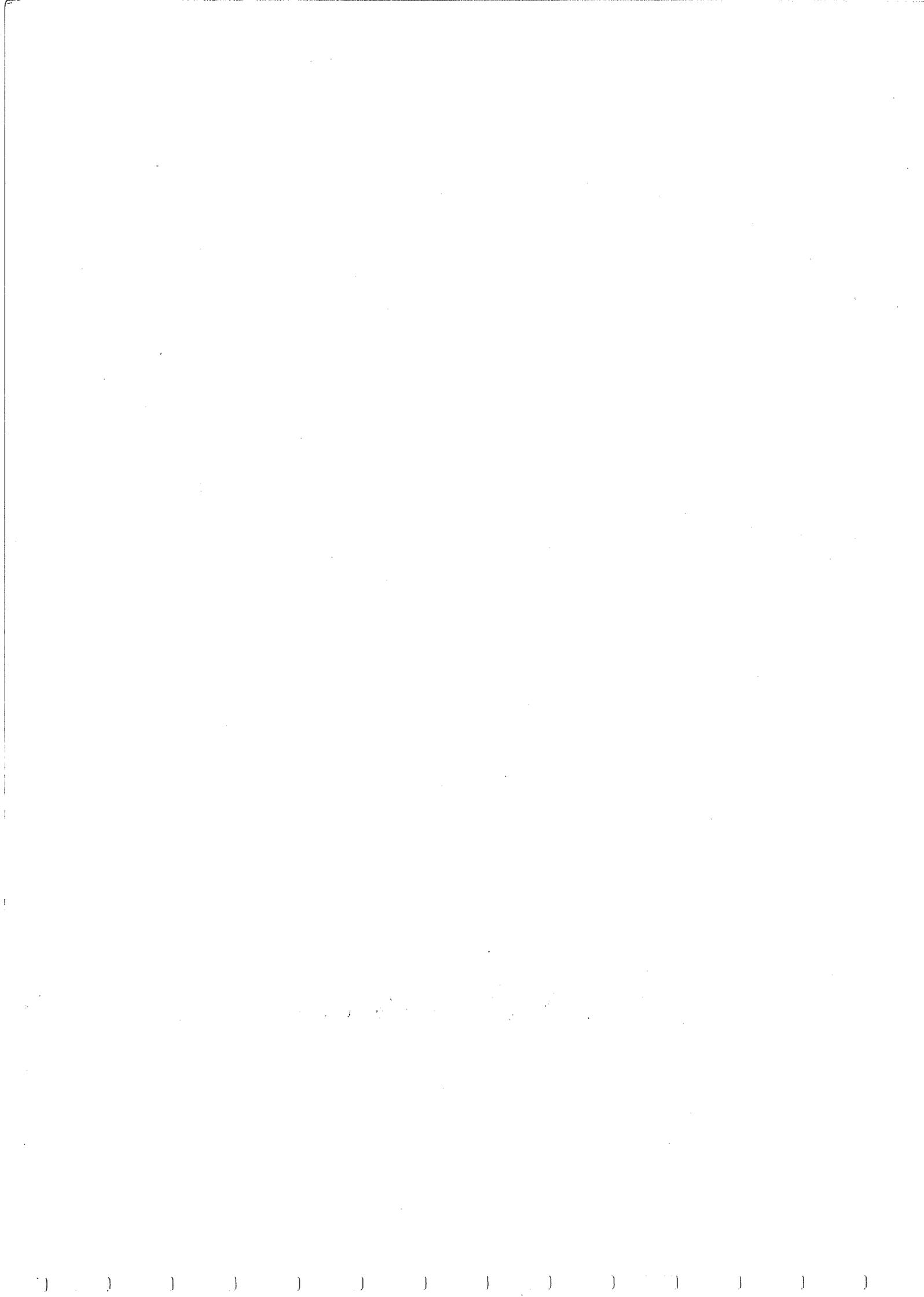
ed inoltre

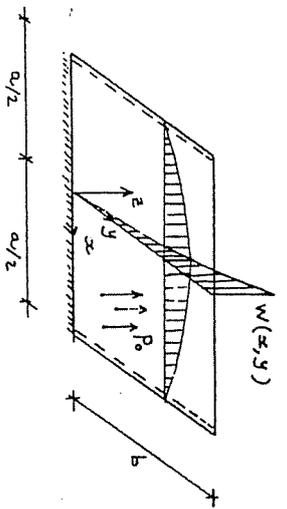
$$V_{min}^{(2)} = - \frac{P^2 \rho^3}{97.5 EI}$$

Si vede quindi che la soluzione con due termini e la soluzione esatta sono molto vicine in termini di spostamenti, non altrettanto in termini di tensioni. Cio' dipende dal fatto che quest'ultime sono calcolate attraverso operazioni di derivazione. Si noti inoltre che, come gia' osservato, la rigidezza della trave e' sovrastimata dal metodo di Ritz cosicche' gli spostamenti risultano piu' piccoli di quelli effettivi. In fig.53 i diagrammi delle sollecitazioni relativi alle due approssimazioni $n=1$, $n=2$ sono confrontati con quelli esatti.

b) Piastrea

Come secondo esempio del metodo si consideri la piastra in figura, appoggiata su due lati opposti, incastrata su un lato e libera sul quarto, sottoposta ad un carico uniformemente ripartito P_0 .





Se la piastra e' sottile, la configurazione variata e' descritta dall'unica funzione $w(x,y)$, di classe C^1 , soggetta alle condizioni geometriche:

$$w(\pm \frac{a}{2}, x) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w_y(x, 0) = 0$$

La discretizzazione del sistema si ottiene ponendo

$$w(x, y) = \Psi^T(x, y) q$$

dove la matrice riga Ψ^T contiene delle funzioni di due variabili di classe C^1 , che soddisfano ciascuna le condizioni al contorno geometriche. Le funzioni di forma possono utilmente essere ottenute come prodotti di funzioni della sola x e della sola y , ad esempio polinomi o funzioni trigonometriche: $\psi_i(x, y) = X_i(x) Y_i(y)$. Nel caso in esame deve essere:

$$X_i(\pm a/2) = 0, \quad Y_i(0) = 0, \quad Y_i'(0) = 0$$

Si puo' quindi assumere

$$X_i(x) = 1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^{2i}, \quad Y_i(y) = y^{i+1} \quad (i=1, 2, \dots)$$

oppure

$$X_i(x) = \cos(2i-1)\pi \frac{x}{a}, \quad Y_i(y) = 1 - \cos \frac{i\pi y}{b} \quad (i=1, 2, \dots)$$

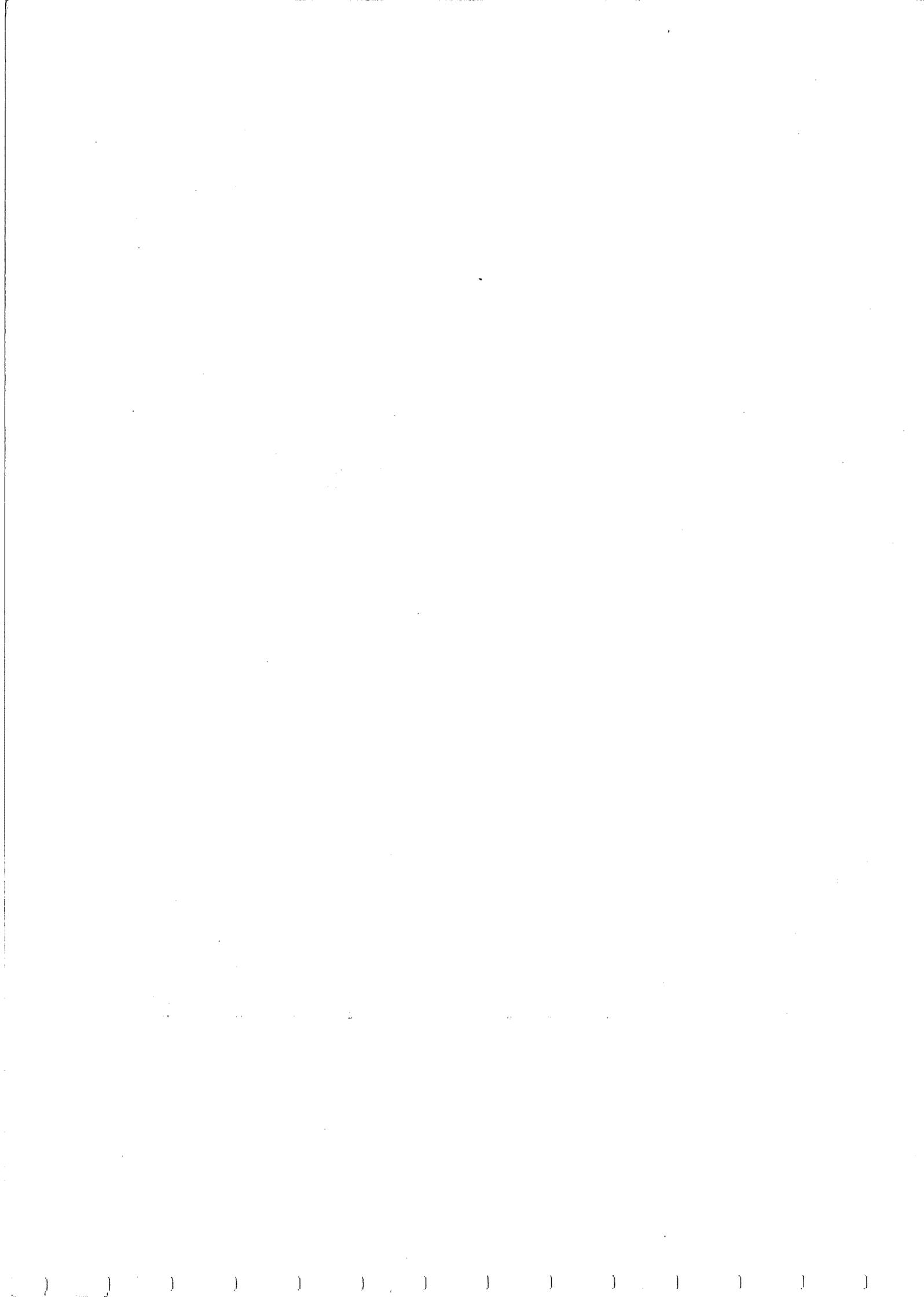
o anche una qualsiasi loro combinazione. Si noti che mentre le funzioni trigonometriche in x soddisfano anche le condizioni meccaniche (momento M_x nullo al bordo) le funzioni polinomiali non le soddisfano. La convergenza del procedimento sara' pertanto piu' lenta nel caso dei polinomi. Facendo riferimento alla tabella che segue si puo' ad esempio assumere

$$w(x, y) = q_1 \left[1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2\right]^2 y^2 + q_2 \left[1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2\right] y^3 + q_3 \left[1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^4\right] y^2 \dots$$

La soluzione $w(x, y)$ viene in tal modo sistematicamente migliorata aumentando il grado dei polinomi contemporaneamente nelle due direzioni.

$w(x, y)$	y^2	y^3	y^4	...
$1 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2$	q_1	q_2	q_4	
$1 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^4$	q_3	q_5		
$1 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^6$	q_6			

Sostituendo l'espressione di $w(x, y)$ nell'energia potenziale totale (6.38) ed effettuando le integrazioni si ottiene il sistema risolvente nei parametri lagrangiani q_i . Ad esempio, limitando lo sviluppo al solo termine in q_1 si ha:



$$w_{,xx} = -\frac{8}{a_2^2} y^2 q_1$$

$$w_{,yy} = 2 \left(1 - 4 \frac{x^2}{a_2^2} \right) q_1$$

$$w_{,xy} = -16 \frac{xy}{a_2^2} q_1$$

e quindi

$$V = \frac{D_f}{2} q_1^2 \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \int_0^b \left[\frac{64}{a_1^2} y^4 + 4 \left(1 - 4 \frac{x^2}{a_2^2} \right)^2 - 32 \left(1 - 4 \frac{x^2}{a_2^2} \right) \frac{y^2}{a_2} + 512 (1-\nu) \frac{x^2 y^2}{a_1^2} \right] dx dy - P_0 q_1 \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \int_0^b \left(1 - 4 \frac{x^2}{a_2^2} \right) y^2 dx dy$$

Integrando si ottiene:

$$V = \frac{1}{2} k q_1^2 - P q_1$$

in cui

$$k = \frac{32}{45} D_f \ell^2 (61 - 50\nu)$$

$$P = \frac{2}{9} P_0 \ell^4$$

avendo assunto $a = b = \ell$ (piastra quadrata). Imponendo la stazionarietà $\delta V / \delta q_1 = 0$ si ottiene $q_1 = P/k$ e dalla (6.30) si ricavano le sollecitazioni:

$$M_x = 2 D_f \left[-4 \frac{y^2}{\ell^2} + \nu \left(1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right) \right] \frac{P}{k}$$

$$M_y = 2 D_f \left[\left(1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right) - 4 \nu \frac{y^2}{\ell^2} \right] \frac{P}{k}$$

$$M_{xy} = -16 D_f (1-\nu) \frac{xy}{\ell^2} \frac{P}{k}$$

Si noti che, se si trascura l'effetto Poisson, M_x varia solo secondo y ed M_y solo secondo x ed in particolare sono violate le condizioni al contorno meccaniche; cioè, è conseguenza del basso ordine del polinomio, per cui l'approssimazione ottenuta è piuttosto scadente.

8.4 Metodo degli elementi finiti e metodo di Ritz

Il maggiore limite di applicabilità del metodo di Ritz è legato alla necessità di determinare funzioni di forma che (a) siano definite su tutto il dominio e che (b) rispettino le condizioni al contorno geometriche. Per tali ragioni il metodo non è di fatto impiegabile quando il dominio ha forma complessa, risultando impossibile soddisfare tutte le condizioni al contorno.

Un miglioramento decisivo del procedimento è offerto dal metodo degli elementi finiti che può pensarsi discendere da quello di Ritz introducendo le seguenti varianti. Il dominio \mathcal{D} è suddiviso in sottodomini \mathcal{D}^e che prendono il nome di elementi finiti. All'interno dei singoli sottodomini le variabili di configurazione sono espresse come combinazioni lineari a coefficienti incogniti di funzioni note. Scegliendo opportunamente le funzioni, i coefficienti sono identificati con gli spostamenti di alcuni punti, i nodi dell'elemento, giacenti sulla frontiera $\partial \mathcal{D}^e$ (eventualmente altri nodi possono essere situati in \mathcal{D}^e). Gli spostamenti del generico punto dell'elemento sono quindi espressi in funzione degli spostamenti dei nodi

dell'elemento; le funzioni di forma della combinazione lineare assumono perciò il significato di funzioni di interpolazione. Si realizza pertanto un' approssimazione locale, anziché globale, delle variabili di stato e l'unione delle funzioni che descrivono il campo di spostamento nei singoli elementi fornisce perciò un' approssimazione a tratti del campo in tutto il dominio

8.

Il grosso vantaggio operativo dell'approssimazione locale risiede nel fatto che le funzioni di interpolazione non devono soddisfare condizioni al contorno geometriche ma solo (e non necessariamente) certi requisiti di continuità attraverso la frontiera dei singoli elementi. E' possibile in questo nodo approssimare il campo di spostamenti anche in domini di forma molto complessa, a patto di effettuare una suddivisione in elementi (maglia o mesh) piuttosto fitta in corrispondenza del contorno.

Si noti la stretta analogia del metodo degli elementi finiti con la formulazione discreta del metodo degli spostamenti relativa ai continui monodimensionali di asta e di trave (cap.7). Anche in quel caso, infatti, la descrizione del campo di spostamenti e' di tipo locale e le funzioni di forma assumono il significato di funzioni di interpolazione. La differenza sostanziale risiede nel fatto che in quel caso tali funzioni sono esatte (nell'ambito del modello matematico sviluppato) in quanto descrivono correttamente il campo di spostamento dell'elemento

conseguente a certi spostamenti assegnati ai nodi, cioè soddisfano sia il requisito della compatibilità interna che quello dell'equilibrio; le funzioni sono state infatti determinate integrando in modo esatto le equazioni differenziali del problema elastico. Nel metodo degli elementi finiti, invece, così come in quello di Ritz, le funzioni di interpolazione sono solo congruenti ma non equilibrate e quindi il risultato cui si perviene e' approssimato. L'impossibilità di determinare delle funzioni di interpolazione "esatte" per un continuo bidimensionale o tridimensionale dipende dal fatto che il campo di spostamento non e' univocamente determinato dalla conoscenza degli spostamenti di certi punti isolati della frontiera (i nodi) bensì da quella di tutti i punti che giacciono sulla frontiera. Detto in altre parole, mentre il contatto tra elementi monodimensionali e' puntuale, il contatto tra elementi bidimensionali e' lineare e tra elementi bidimensionali e' superficiale cosicché anche se si assumono come incognite gli spostamenti dei punti interelementari il problema in due o tre dimensioni resta un problema differenziale, anziché ridursi ad uno algebrico.

Riassumendo, la tecnica di discretizzazione in elementi finiti applicata alle aste e alle travi fornisce la soluzione esatta (se le funzioni di interpolazione sono esatte (+)), applicata ad altri continui fornisce una

(+) Ad esempio per una trave a sezione variabile, invece che integrare un'equazione differenziale (segue pag. succ.)



soluzione approssimata.

8.5 Derivazione generale delle equazioni di equilibrio secondo il metodo degli elementi finiti

Si suddivide il dominio occupato dal sistema in m sottodomini \mathcal{D}^e ($e=1,2,\dots,m$), sulla frontiera dei quali si individuano dei punti nodali (fig. 54).

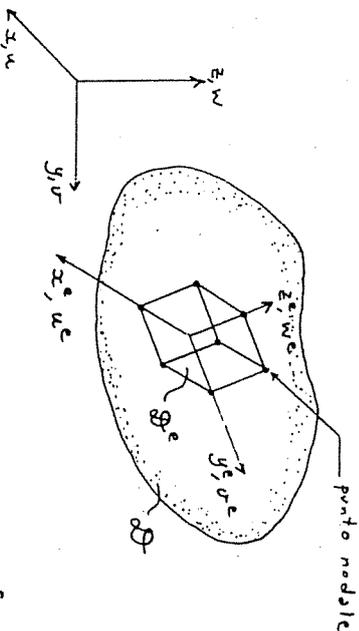


fig. 54

Facendo riferimento ad un sistema d'assi locale il campo di spostamento $u^e(x^e)$ all'interno di \mathcal{D}^e può essere espresso in funzione degli spostamenti dei punti nodali q^e attraverso funzioni di interpolazione $\Psi^e(x^e)$ sufficientemente regolari:

$$u^e(x^e) = \Psi^T(x^e) q^e \quad \text{in } \mathcal{D}^e \quad (11)$$

(segue) a coefficienti variabili, si possono assumere come funzioni di interpolazione le funzioni della trave a sezione costante, suddividendo la trave stessa in più elementi nell'ottica di un procedimento approssimato.

Seguendo allora il procedimento illustrato a proposito del metodo di Ritz (eq.(1)-(6)) l'energia potenziale totale dell' e -esimo elemento si scrive:

$$V^e(q^e) = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e - q^{eT} P^e \quad (12)$$

in cui

$$K^e = \int_{\mathcal{D}^e} E^e{}^T C^e E^e dV \quad (13)$$

$$P^e = \int_{\mathcal{D}^e} \Psi^{eT} b^e dV + \int_{\partial \mathcal{D}^e} \Psi^{eT} f^e dS$$

sono rispettivamente la matrice di rigidità locale e il vettore dei carichi locale; e' inoltre $E^e(x^e) = D \Psi^e(x^e)$.

Si noti che, per il significato che ora assumono i parametri q^e , la i -esima forza generalizzata P_i^e rappresenta il lavoro compiuto dalle forze attive nel campo di spostamento conseguente a spostamenti nodali $q_i^e = 1$, $q_j^e = 0$ ($j \neq i$).

L'energia potenziale totale del sistema si ottiene sommando le energie di tutti gli elementi:

$$V(q^e) = \sum_{e=1}^m V^e(q^e) \quad (14)$$

La funzione (14) fornisce l'energia posseduta dal sistema nella generica configurazione individuata dai parametri di spostamento locale di ciascun elemento. Affinche' la configurazione sia congruente, lo spostamento di un nodo appartenente a più elementi adiacenti, anche se misurato in riferimenti locali diversi, deve essere il medesimo.

Detto allora q il vettore degli spostamenti nodali riferiti ad un sistema d'assi globale, gli spostamenti dei nodi dell' e -esimo elemento nel riferimento locale ad esso solidale sono (vedi eq. (7.38))

$$q^e = T^e \Omega^e q \quad (15)$$

in cui Ω^e e' la matrice di estrazione/collocazione e T^e la matrice rotazione. Sostituendo la (15) nella (14) si ha:

$$\begin{aligned} V(q) &= q^T \sum_{e=1}^m [\Omega^e T^e K^e T^e \Omega^e q - \Omega^e T^e P^e] = \\ &= q^T K q - q^T P \end{aligned} \quad (16)$$

in cui

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^m \Omega^e T^e K^e T^e \Omega^e \\ P &= \sum_{e=1}^m \Omega^e T^e P^e \end{aligned} \quad (17)$$

K e P sono rispettivamente la matrice globale di rigidezza e il vettore globale dei carichi. Le (17) coincidono con le (7.44) (a parte le forze attive nodali qui non considerate) relative ai sistemi naturalmente discreti; l'operazione di assemblaggio puo' perciò essere effettuata in forma diretta, come gia' discusso, a partire dalla grandezza di elemento (13).

Dalla condizione di stazionarieta' di V si ottengono le equazioni di equilibrio

$$K q = P \quad (18)$$

alle quali vanno imposte le condizioni di vincolo secondo le stesse modalita' illustrate nel paragrafo 7.3.3.

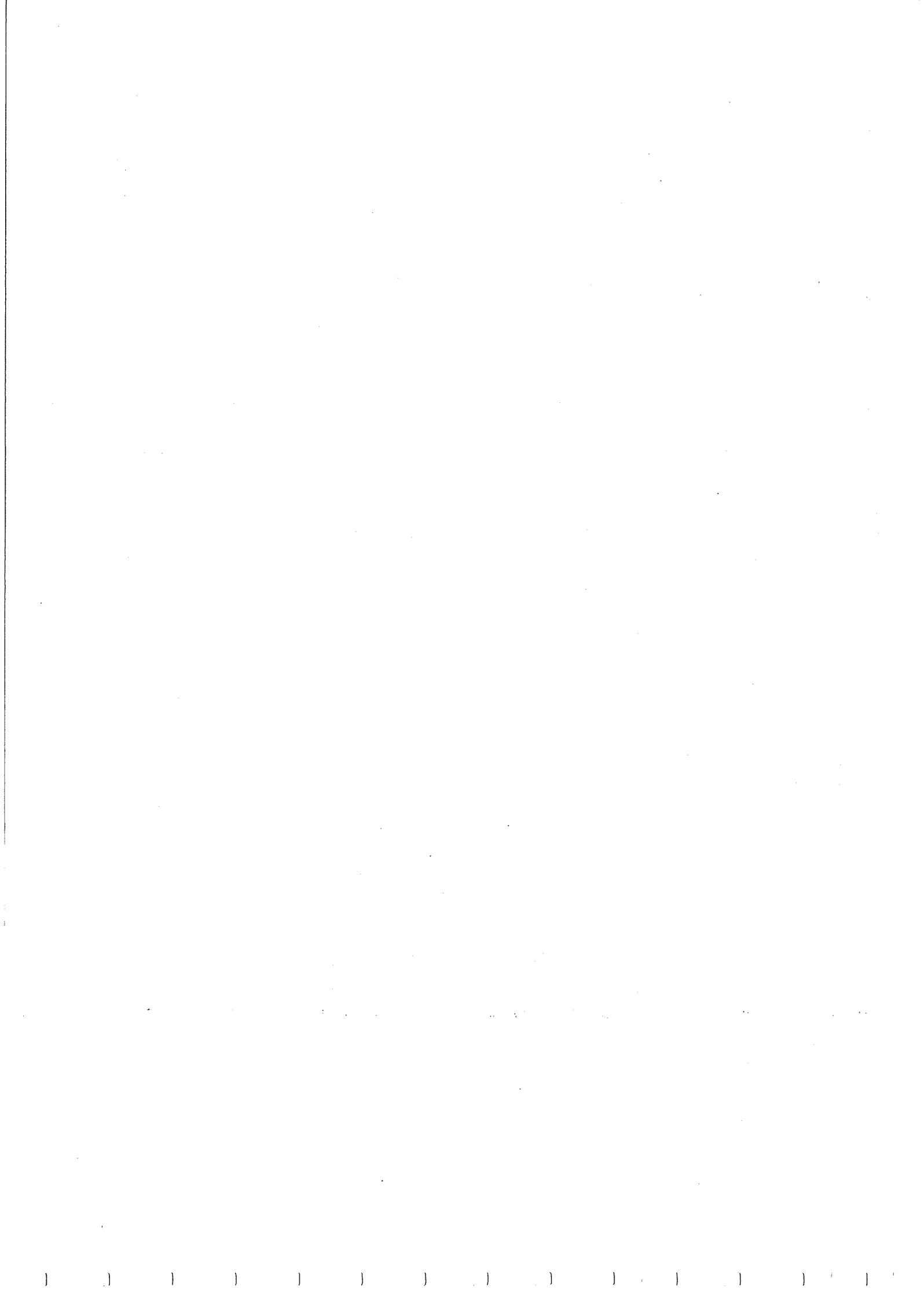
In conclusione va osservato che le condizioni di equilibrio del sistema, come accade nel metodo di Ritz, sono soddisfatte soltanto in media. Le condizioni di congruenza, invece, sono soddisfatte puntualmente all'interno di ciascun elemento (stante la regolarita' delle funzioni di interpolazione) ma non tra elementi adiacenti. La compatibilita' e' infatti assicurata solo in corrispondenza dei nodi, dove vengono eguagliate le variabili di configurazione, ma in generale violata nei restanti punti della frontiera. Sull'argomento si tornera' nel seguito.

8.6 Funzioni di interpolazione, matrice di rigidezza e vettore dei carichi locali.

Si vuole ora mostrare un procedimento di calcolo abbastanza generale per derivare, fissata la forma dell'elemento e il numero e la posizione dei punti nodali, le funzioni di interpolazione e le grandezze di elemento, matrice di rigidezza e vettore dei carichi. Poiche' in questo paragrafo tutte le grandezze sono riferite agli assi locali, si ammettera' sistematicamente l'indice 'e'.

Sia $u(x)$ il vettore delle variabili (locali) di configurazione. Convenendo di utilizzare funzioni di interpolazione di tipo polinomiale si ha

$$u(x) = \Phi(x) \alpha \quad (19)$$



in cui Φ e' una matrice di polinomi ed α un vettore di coefficienti arbitrari (coordinate generalizzate). Per ricondurre la (19) alla forma (11), in cui i parametri lagrangiani sono identificati negli spostamenti nodali q , e' necessario esprimere α in funzione di q . Calcolando la (19) in corrispondenza dei nodi di coordinate x_i ed eguagliando agli spostamenti q si ha:

$$q = J \alpha \quad (20)$$

in cui J e' una matrice di costanti. Perche' la (20) sia invertibile J deve essere quadrata, con $\det J \neq 0$, per cui il numero delle coordinate generalizzate deve essere uguale al numero dei parametri di spostamento nodale dell'elemento.

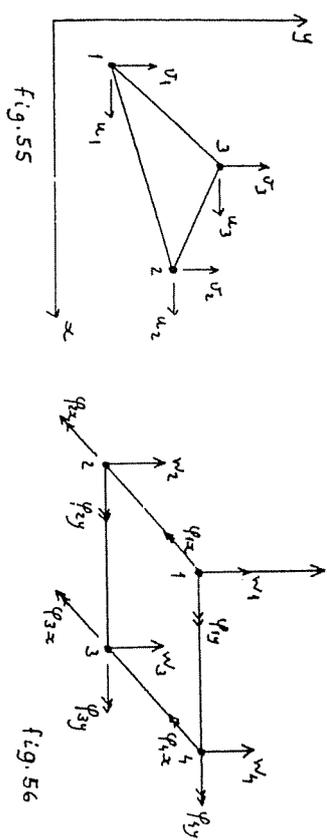
Ricavando α dalla (20) e sostituendo nella (19) si ha infine

$$u(x) = \Phi(x) J^{-1} q = \Psi(x) q \quad (21)$$

e quindi risulta $\Psi(x) = \Phi(x) J^{-1}$.

Il procedimento illustrato, molto semplice nella formulazione, risulta tuttavia spesso oneroso in quanto richiede l'inversione della matrice J (in forma algebrica o numerica). L'alternativa e' percio' quella di determinare direttamente "per ispezione" le funzioni di interpolazione, utilizzando particolari sistemi di riferimento o funzioni opportune che valgano 1 in un nodo e 0 negli altri. Questi metodi non verranno analizzati in questa sede.

A titolo di esempio si vogliono qui sviluppare due semplici elementi finiti, rispettivamente di lastra e di piastra, illustrati nelle figure 55 e 56.



a) elemento triangolare di lastra (6 g.d.l.)

Il campo di spostamento e' rappresentato dalle due funzioni scalari $u(x)$, $v(x)$ alle quali e' richiesta continuita' di classe C^0 (in quanto nell'operatore cinematico D appaiono derivate d'ordine massimo pari ad 1). Poiche' i nodi dell'elemento sono tre e' necessario introdurre tre coordinate generalizzate per ciascuna componente di spostamento; si puo' quindi assumere come funzione di interpolazione un polinomio completo di primo grado per entrambe le variabili:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (22)$$

In forma matriciale si ha:

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha\} \\ \{\beta\} \end{Bmatrix} \quad (23)$$



in cui α e β sono vettori a tre componenti. Calcolando la (23) nei punti nodali si ha

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ed analogamente per v_1, v_2, v_3 . Invertendo la (24) si trova

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

dove $2A = \det J$ e' il doppio dell'area del triangolo, avendo numerato i nodi in verso antiorario. Si noti che J e' non singolare se i vertici del triangolo sono non allineati.

Sostituendo le (25) nella (23) e riordinando si ottiene

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

in cui le funzioni di interpolazione ψ_i sono:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \psi_2(x, y) &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \psi_3(x, y) &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \quad (26)$$

Si noti che $\psi_1(x_1, y_1) = 1$, $\psi_1(x_2, y_2) = \psi_1(x_3, y_3) = 0$ ed analoghe. Le funzioni $\psi_i(x, y)$ sono diagrammate in fig. 57.

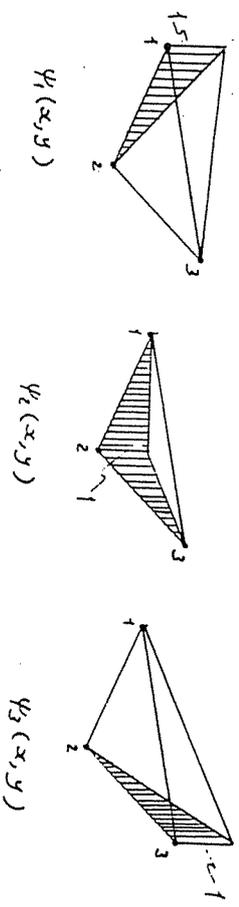
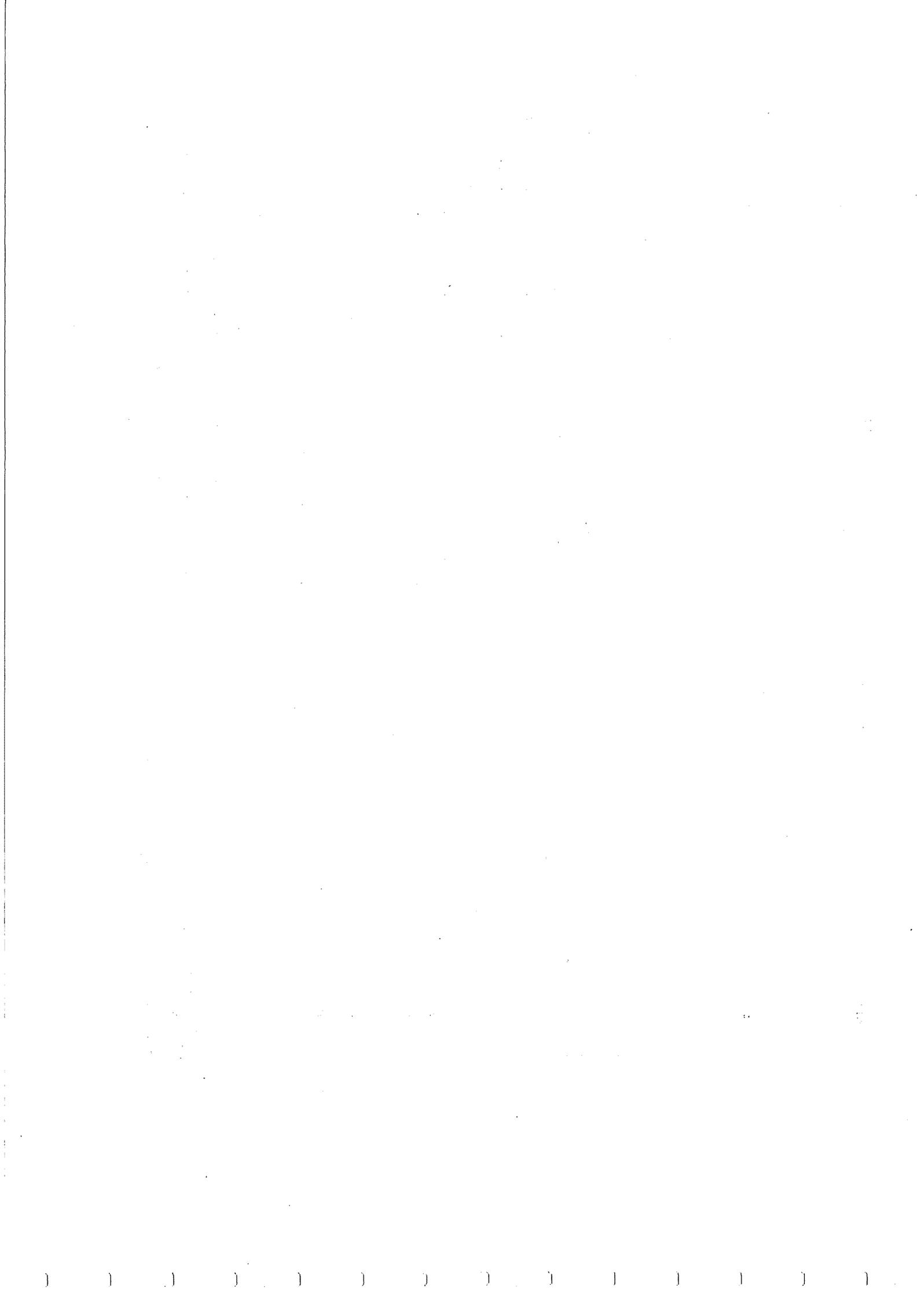


fig. 57

Una importante conseguenza della linearita' di $\psi_i(x, y)$ e' che, considerato un assemblaggio di piu' elementi, il campo di spostamento e' continuo anche nei punti di frontiera degli elementi, cioe' le funzioni $u(x, y), v(x, y)$ si mantengono continue nel passare da un elemento ad un altro adiacente. Poiche' infatti gli spostamenti su un lato comune a due triangoli adiacenti variano linearmente, l'uguaglianza degli spostamenti dei nodi comuni implica l'uguaglianza degli spostamenti di tutti i punti del lato, e quindi continuita' interelementare. Questa circostanza si verifica tutte le volte che lo spostamento in un punto di un lato dipende solo dagli spostamenti dei nodi che giacciono sullo stesso lato, e non dagli spostamenti degli altri nodi dell'elemento. Elementi finiti che soddisfano questa condizione sono detti compatibili, in quanto la compatibilita' e' assicurata in tutti i punti del



dominio \mathcal{D} dell'assemblaggio, compresi quelli appartenenti al contorno degli elementi.

Passando a considerare il campo di deformazione all'interno dell'elemento e' necessario applicare l'operatore cinematico D (eq.(4.2)) al vettore spostamento (25); si ottiene $\varepsilon = D^T q = E q$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,x} & 0 & \psi_{2,x} & 0 & \psi_{3,x} & 0 \\ 0 & \psi_{1,y} & 0 & \psi_{2,y} & 0 & \psi_{3,y} \\ \psi_{1,y} & \psi_{1,x} & \psi_{2,y} & \psi_{2,x} & \psi_{3,y} & \psi_{3,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Poiche' nella matrice $E(x)$ appaiono le derivate prime delle funzioni di interpolazione (26), E e' una matrice di costanti, e le deformazioni sono costanti nell'elemento.

Come conseguenza anche le tensioni sono costanti, e quindi discontinue attraverso i bordi interelementari.

La matrice di rigidezza dell'elemento si ottiene dalla (13₁), tenuto conto del legame costitutivo espresso dall'operatore elastico C (eq.(4.10)); poiche' l'integrando e' costante risulta $K = (E^T C E) A$, la cui espressione esplicita e' facilmente determinabile e non e' qui riportata per brevitaa'.

Per quanto riguarda il vettore dei carichi nodali e' necessario calcolare gli integrali (13₂):

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \int_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_1 \\ 0 & \psi_2 \\ 0 & \psi_2 \\ 0 & \psi_3 \\ 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} dx dy + \int_{\partial \mathcal{D}_f} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_1 \\ 0 & \psi_2 \\ 0 & \psi_2 \\ 0 & \psi_3 \\ 0 & \psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} ds \quad (28)$$

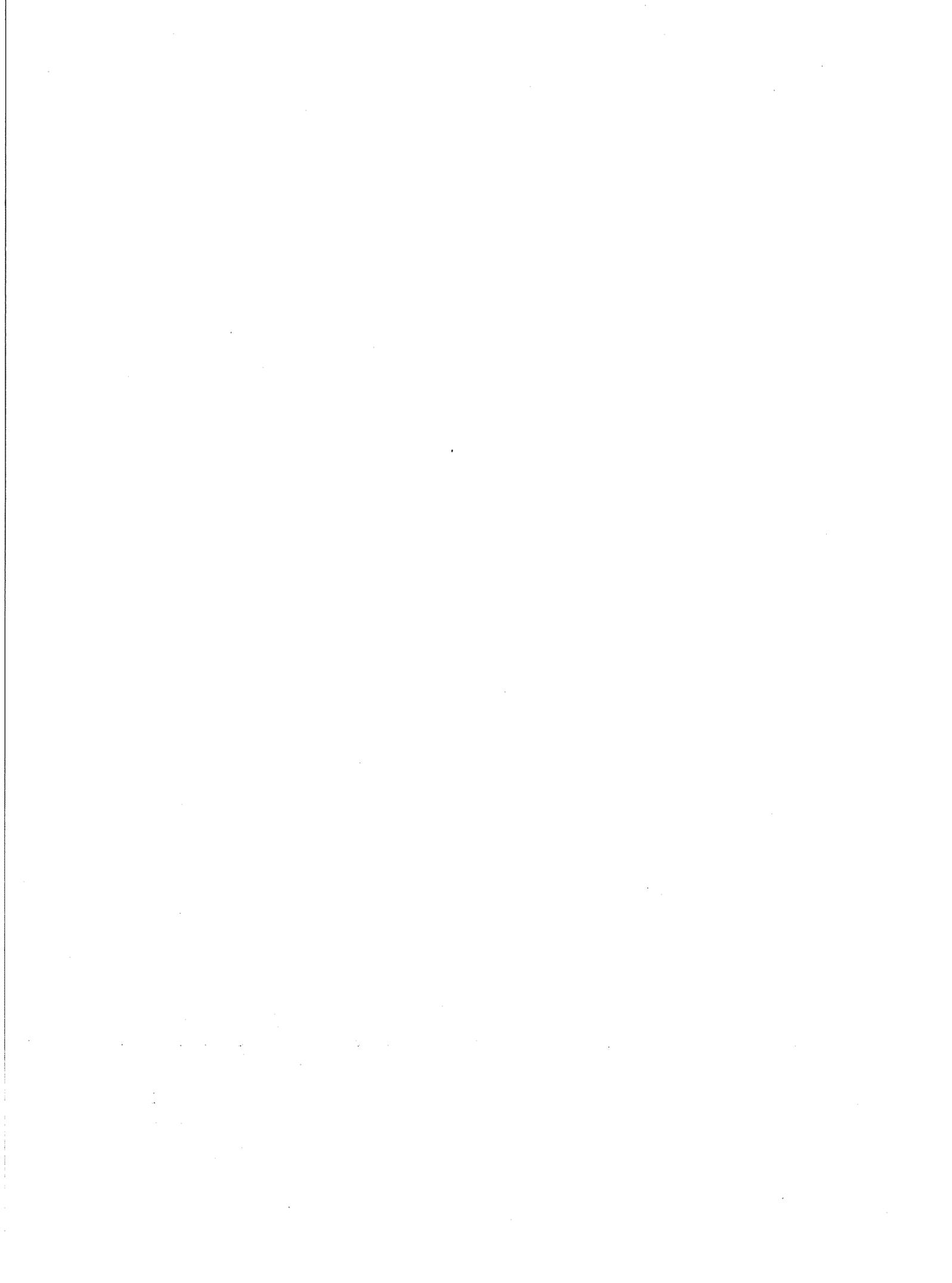
in cui $b = b(x,y)$, $f = f(x(s),y(s))$, dove s e' un'ascissa definita su $\partial \mathcal{D}$. Si noti che il secondo integrale della (28) e' esteso alla sola porzione della frontiera che l'elemento ha (eventualmente) in comune con la frontiera della lastra. Ad esempio, se l'elemento ha solo il lato 1-2 giacente sul bordo della lastra, poiche' e' $\psi_3(s) \equiv 0$ (fig.57), sono diverse da zero le sole forze nodali relative ai nodi 1 e 2. Orientando s dal nodo 1 al nodo 2 e' $\psi_1 = 1 - \frac{s}{l}$ e $\psi_2 = \frac{s}{l}$, dove l e' la lunghezza del lato 1-2; risulta allora per esempio:

$$P_{1x} = \int_0^l \left(1 - \frac{s}{l}\right) f_x(s) ds \quad (29)$$

ed analoghe.

b) elemento quadrangolare di piastra (12 g.d.l.)

Considerando una piastra indeformabile a taglio il campo di spostamento e' rappresentato dall'unica funzione $w(x,y)$, che deve essere continua di classe C^1 (in quanto nell'operatore cinematico D (6.22) appaiono derivate



secondo). In ogni nodo risultano definiti tre gradi di libertà, la traslazione w e le rotazioni $\varphi_x = w_y$ e $\varphi_y = -w_x$, cosicché l'elemento a quattro nodi ha complessivamente dodici g.d.l. e si rende necessario introdurre un polinomio con dodici termini. Ad esempio:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} xy^2 \quad (30)$$

e quindi

$$\Phi = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^2 y \quad xy^2] \quad (31)$$

I termini in $\alpha_1 \div \alpha_{10}$ costituiscono un polinomio completo di terzo grado al quale sono stati aggiunti due termini quartici (simmetrici in x, y per rispettare l'invarianza dell'elemento). Si noti che, poiché la funzione w è cubica sui lati dell'elemento $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, i quattro g.d.l. (spostamento e rotazione secondo l'asse normale al lato) sono sufficienti ad identificarla univocamente e ad assicurare quindi la continuità interelementare di w e della sua derivata $w_{,s}$ in direzione tangente al bordo; tuttavia la derivata normale $w_{,n}$ varia sul lato con legge parabolica e quindi non dipende solo dai rimanenti due g.d.l. dei nodi appartenenti al lato, ma anche dagli altri g.d.l.. Come conseguenza la continuità di $w_{,n}$ non è assicurata nei punti di frontiera degli elementi, e quindi l'elemento finito in questione è non compatibile.

Calcolando le derivate della (30) si ha:

$$w_{,x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (32)$$

$$w_{,y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2$$

Applicando le (30) e (32) al calcolo degli spostamenti nodali

$$w_i = w(x_i, y_i), \quad \varphi_{ix} = w_{,y}(x_i, y_i), \quad \varphi_{iy} = -w_{,x}(x_i, y_i) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (33)$$

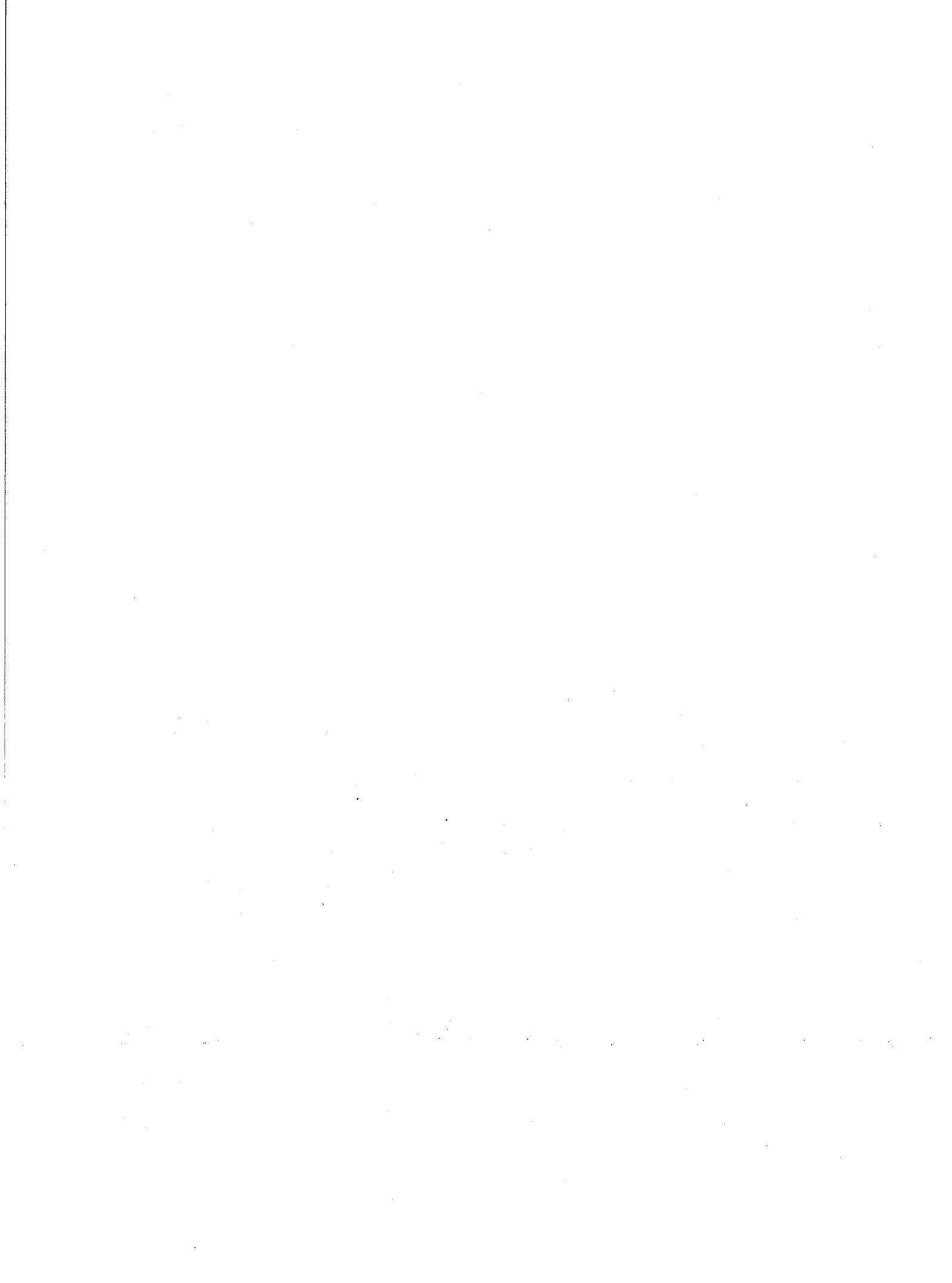
si ottiene $q_i = J_i \alpha$:

$$\begin{cases} w_i \\ \varphi_{ix} \\ \varphi_{iy} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_{12} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (34)$$

e quindi

$$q = \begin{cases} [q_1] \\ [q_2] \\ [q_3] \\ [q_4] \end{cases}, \quad J = \begin{bmatrix} [J_1] \\ [J_2] \\ [J_3] \\ [J_4] \end{bmatrix} \quad (35)$$

dove si può mostrare che la matrice J (12x12) è non singolare. Effettuando il prodotto ΦJ^{-1} si ottiene la matrice Ψ (1x12) delle funzioni di interpolazione e l'analisi segue la strada già indicata. Si osservi solo che le deformazioni e le tensioni, ottenute come derivate



seconde dello spostamento, variano ora con legge quadratica all'interno dell'elemento.

8.7 Convergenza del metodo degli elementi finiti

Un aspetto molto importante di qualsiasi procedimento approssimato di soluzione e' quello della convergenza. Nel caso specifico del metodo degli elementi finiti la questione si pone in questi termini: all'aumentare del numero degli elementi finiti con cui e' discretizzato un dominio, la soluzione approssimata del problema elastico converge alla soluzione esatta? Da un punto di vista strettamente matematico sono stati stabiliti dei criteri di convergenza che valgono se il processo di infittimento della maglia e' effettuato nel rispetto delle seguenti norme:

- a) ogni punto del dominio deve appartenere ad un elemento;
- b) la maglia piu' fitta deve contenere le maglie piu' rade;
- c) le funzioni di interpolazione non devono variare all'infittirsi della maglia. (+)

In queste condizioni si ha convergenza monotona se le funzioni di interpolazione soddisfano i seguenti requisiti:

(+) Riguardo la prima condizione e' necessario osservare che se il corpo ha superficie laterale curva (o bordo curvo) non e' possibile rispettarla se si utilizzano elementi finiti poliedrici (o poligonali). Tuttavia la sperimentazione numerica mostra che la convergenza e' ugualmente ottenuta, anche se non garantita matematicamente.

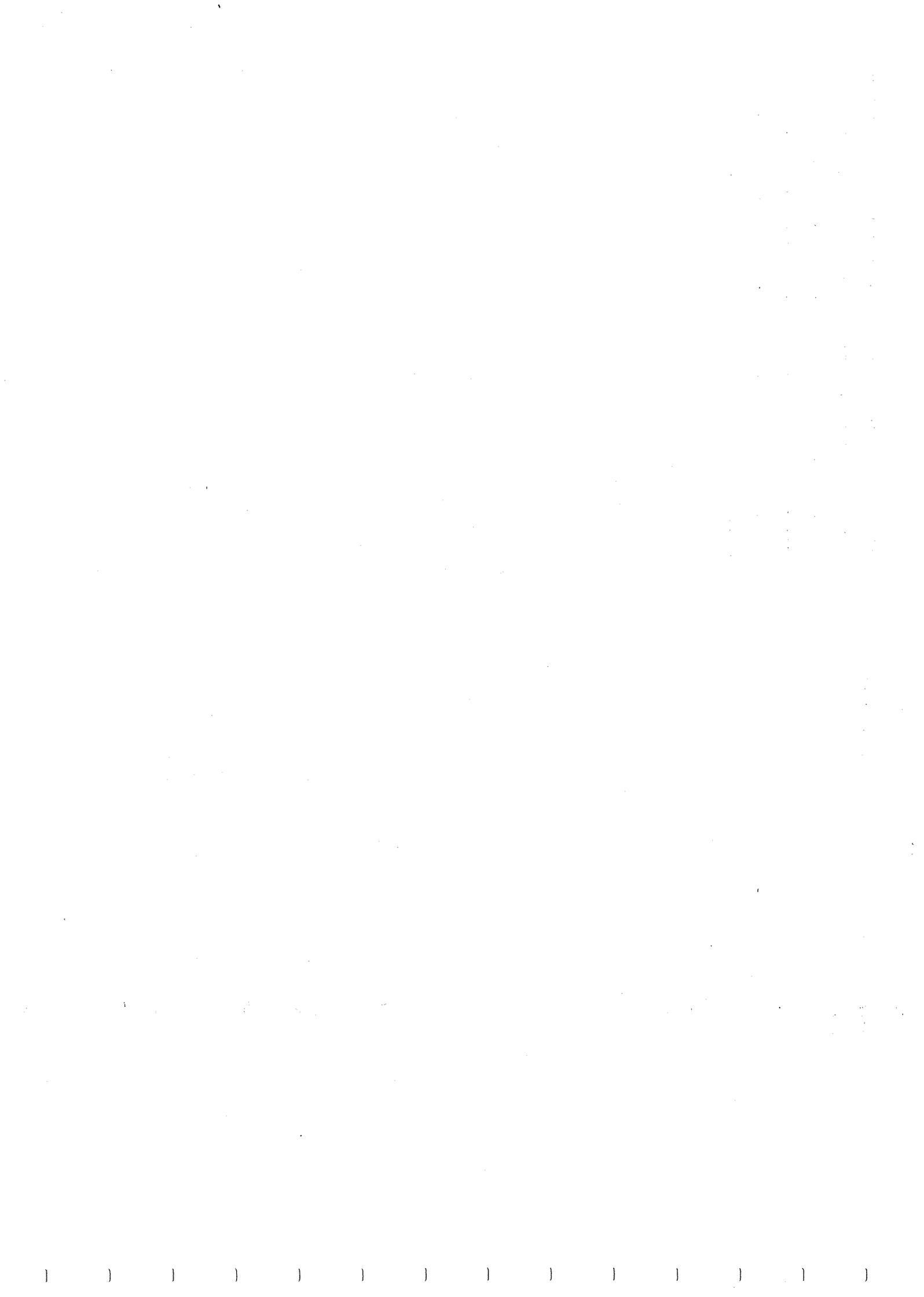
1) possono rappresentare ogni spostamento rigido e stato di deformazione costante (condizione di completezza);

2) assicurano lungo i bordi interelementari continuita' di classe C^{h-1} delle variabili di configurazione, dove n e' l'ordine massimo di derivazione che appare nell'operatore cinematico, e quindi nell'energia potenziale totale (condizione di compatibilita').

Un elemento finito che rispetti entrambi i requisiti e' detto compatibile e completo, e se la maglia e' infittita secondo i criteri a), b), e c) prima detti, assicura convergenza monotona alla soluzione (convergenza dall'alto dell'energia potenziale totale).

La necessita' di rappresentare uno spostamento rigido dell'elemento appare chiara se si pensa ad esempio ad una mansola sottoposta all'azione di una forza applicata in un punto A diverso dall'estremo libero B: la parte di trave compresa tra A e B non e' sollecitata e ruota rigidamente, apportando un contributo nullo all'energia potenziale totale. Qualsiasi contributo diverso da zero costituisce pertanto un errore nella soluzione che non puo' tendere a zero all'aumentare del numero degli elementi.

La necessita' di descrivere un generico stato di deformazione costante all'interno dell'elemento si giustifica pensando che, comunque complicata sia la legge con cui variano le deformazioni nel dominio, quando le dimensioni dell'elemento tendono a zero all'infittirsi della

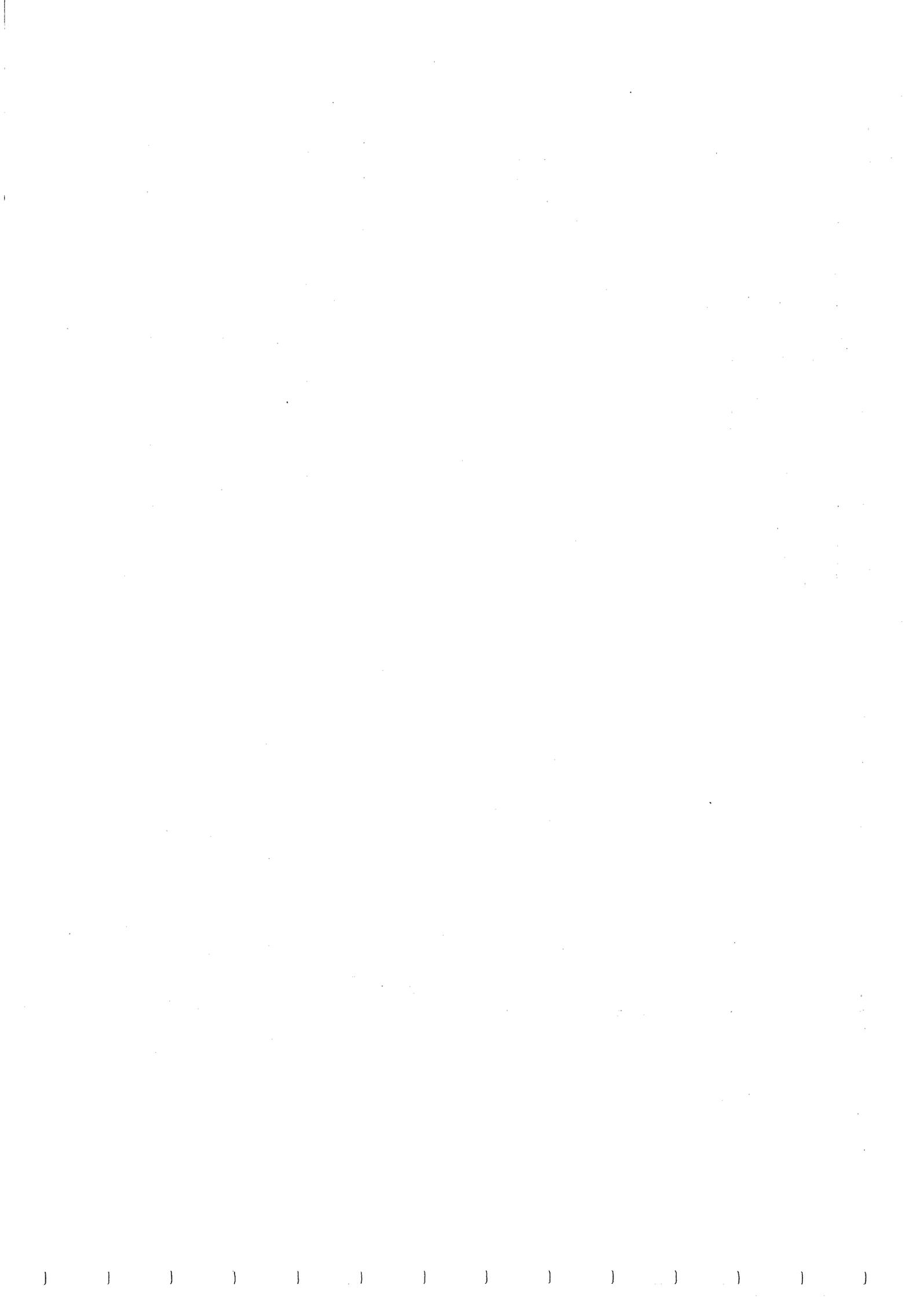


maglia, le deformazioni tendono ad un valore costante nell'elemento.

La condizione di compatibilita', infine, assicura che la soluzione appartiene ad un insieme contenuto nello spazio delle configurazioni ammissibili, da cui la caratteristica di convergenza dall'alto.

Riguardo la condizione di completezza si osserva che l'elemento finito triangolare di lastra soddisfa entrambi i requisiti: le (22) mostrano infatti che, se $\alpha_2 = \beta_3 = 0$, e $\alpha_3 = -\beta_2$ il moto e' rigido piano; e inoltre dalle (27) si vede che le deformazioni sono costanti nell'elemento. Analoghe considerazioni valgono per l'elemento quadrangolare di piastra (eq.(32)), per cui entrambi gli elementi analizzati sono completi. Si e' gia' osservato pero' che mentre l'elemento di lastra e' anche compatibile (in quanto le funzioni w e v sono continue lungo i bordi) l'elemento di piastra e' non compatibile, in quanto la derivata della funzione w normale ai bordi e' discontinua. Questa circostanza e' di carattere generale: mentre risulta solitamente agevole formulare elementi finiti con continuita' di classe C^0 (asta, lastra, trave e piastra deformabili a taglio) non risulta altrettanto facile assicurare continuita' di classe C^1 (trave e piastra indeformabili a taglio). Questo e' il motivo per cui negli ultimi anni molto lavoro e' stato svolto in letteratura sulla formulazione di elementi di piastre (e volte) in cui spostamenti e rotazioni sono assunti come variabili

indipendenti. Va comunque osservato che elementi completi ma non compatibili hanno mostrato nelle applicazioni velocita' di convergenza anche superiori a quelle di elementi compatibili; la convergenza e' pero' non monotona e si perde quindi la vantaggiosa caratteristica di limite superiore dell'energia potenziale totale.



9. TEORIA LINEARIZZATA: CONTINUI LABILI E BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO.

9.1 Introduzione

Il problema elastico trattato nei precedenti capitoli e' stato formulato in un ambito puramente lineare; in particolare le relazioni cinematiche deformazioni-spostamenti sono state determinate nell'ipotesi di spostamenti infinitesimi, le equazioni di equilibrio sono state imposte nella configurazione indeformata del corpo, e la legge costitutiva e' stata assunta lineare. La teoria che discende da queste ipotesi e' detta teoria lineare ed e' caratterizzata da proporzionalita' tra cause ed effetti nonche' additivita' di cause e di effetti (principio di sovrapposizione).

La teoria lineare puo' essere applicata con successo per descrivere una larghissima classe di fenomeni meccanici non solo da un punto di vista qualitativo, ma anche quantitativo. Tuttavia esistono particolari fenomenologie che non possono essere descritte neppure qualitativamente da essa. In questi casi risulta necessario abbandonare alcune delle ipotesi semplificative e formulare un modello nonlineare piu' ricco, anche se naturalmente piu' complesso, del semplice modello lineare.

Le teorie nonlineari si distinguono tra loro per la messa in conto delle nonlinearita' geometriche del sistema o delle nonlinearita' del materiale (o di entrambe). Le prime

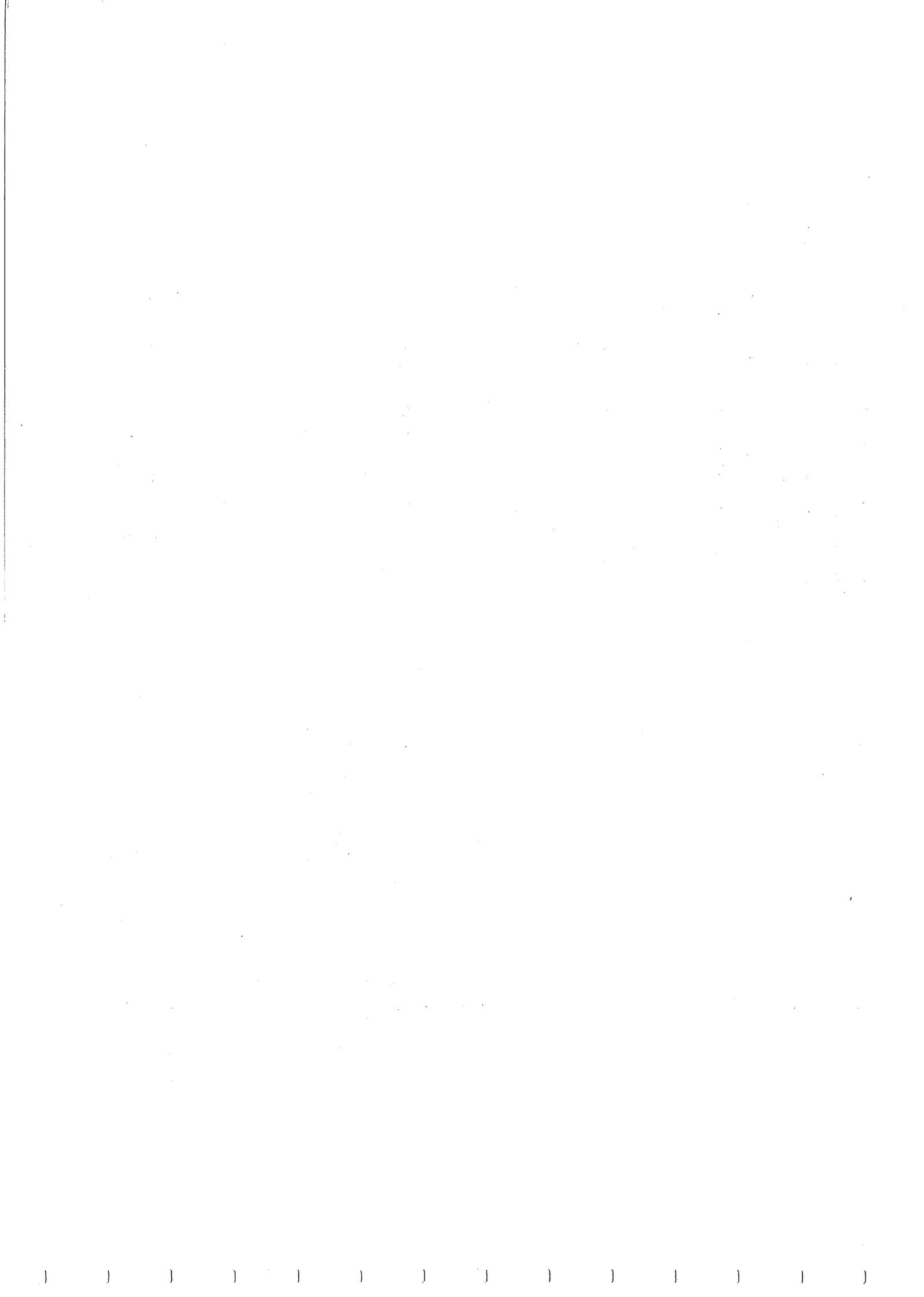
nascono da uno studio della cinematica in cui gli spostamenti sono assunti di grandezza finita e le condizioni di equilibrio sono imposte nella configurazione deformata; le seconde descrivono un comportamento del materiale piu' generale di quello semplicemente elastico lineare. Uno studio approfondito della problematica delle teorie nonlineari esula dagli scopi di questo corso e trova posto in sedi specializzate. Ci si limitera' pertanto ad illustrare come, mettendo in conto nel modello anche il piu' basso grado di nonlinearity geometrica, sia possibile formulare una teoria sufficiente a descrivere aspetti meccanici qualitativamente importanti che non possono essere analizzati con la teoria lineare. Questa teoria e' detta linearizzata e costituisce l'oggetto dello studio sviluppato in questo capitolo.

9.2 Esempio introduttivo: il pendolo

I concetti fondamentali della teoria linearizzata sono illustrati con riferimento ad un semplice modello ad un grado di liberta'. Viene dato ampio risalto all'interpretazione meccanica delle equazioni.

9.2.1 Rigidezza geometrica. Sistema labile

Si consideri un pendolo matematico piano (fig. 58a), costituito da un filo inestensibile e da una massa m di peso $P = m g$. Nella configurazione di riposo, assunta come



riferimento, la massa e' in equilibrio sotto l'azione di P e della reazione del filo $N = P$. Il filo si dice essere in uno stato di presolliecitazione.

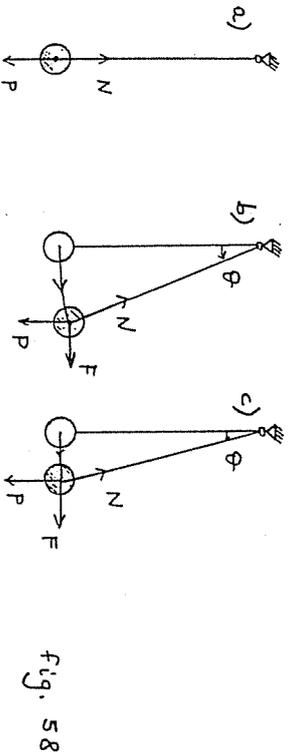


fig. 58

Si consideri ora una forza orizzontale F applicata alla massa m . In base all'analisi sviluppata nella teoria lineare si potrebbe concludere che "poiche' il pendolo e' un sistema labile l'equilibrio e' impossibile". L'asserzione e' manifestamente errata e va corretta come segue: "poiche' il pendolo e' un sistema labile l'equilibrio e' impossibile nella configurazione di riferimento". La teoria lineare, infatti, prevede l'imposizione dell'equilibrio nello stato indeformato; cioe' naturalmente non esclude che l'equilibrio possa sussistere in una (o piu') configurazioni diverse da quella di riferimento. Per verificare l'esistenza di soluzioni equilibrate e' necessario pertanto scrivere delle equazioni nella generica configurazione individuata dall'angolo Θ (fig. 58b). Si ha:

$$P - N \cos \Theta = 0$$

$$F - N \sin \Theta = 0$$

(1)

da cui si ricava lo sforzo nel filo e la configurazione equilibrata incognita:

$$N = \frac{P}{\cos \Theta}, \quad \Theta = \arctg \frac{F}{P} \quad (2)$$

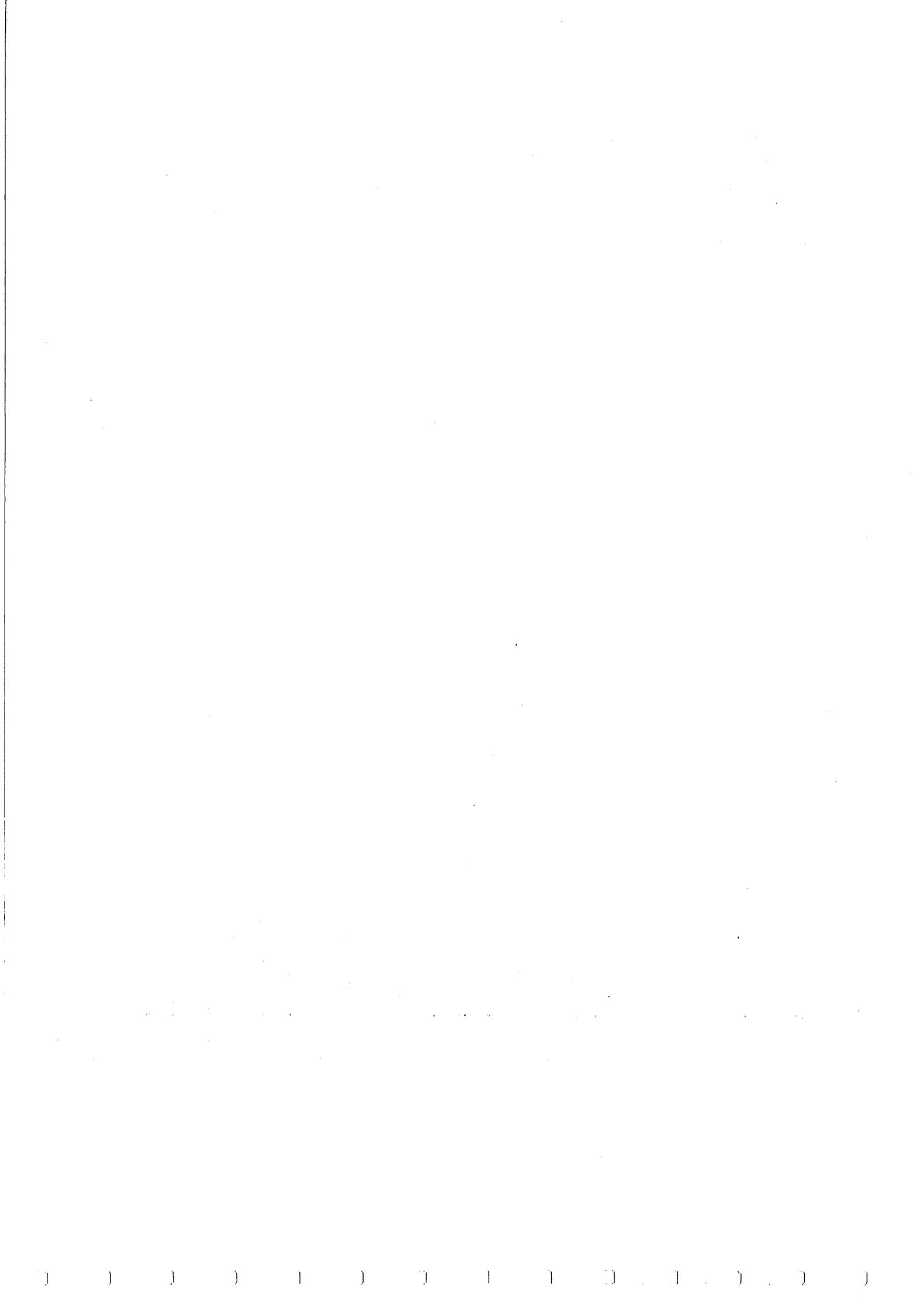
Le equazioni (1) sono geometricamente esatte e rappresentano le equazioni non lineari di equilibrio del pendolo, per il quale dunque l'equilibrio sussiste in una configurazione deformata.

Si considerino ora valori di Θ infinitamente piccoli: e' possibile allora sviluppare in serie le (1) ed assumere, con un errore d'ordine Θ^2 , $\sin \Theta = \Theta$ e $\cos \Theta = 1$. Si ottiene

$$N = P, \quad P\Theta = F \quad (3)$$

Le (3), lineari in Θ , sono le equazioni di equilibrio della teoria linearizzata. Esse rappresentano le condizioni di equilibrio imposte in una configurazione deformata infinitamente prossima a quella di riferimento, individuata cioe' da una cinematica lineare (fig. 58c).

Le (3) esprimono questo semplice concetto meccanico: per Θ sufficientemente piccolo la proiezione verticale della forza N e' circa uguale ad N mentre la proiezione orizzontale e' diversa da zero, pari ad $N\Theta$. L'equilibrio in direzione verticale, che sussisteva nella configurazione di riferimento prima dell'applicazione di F , non e' percio' disturbato dalla variazione (infinitesima) di geometria in quanto N equilibra ancora P . L'effetto della variazione



di geometria si risente invece nella nascita della componente orizzontale $N\theta = P\theta$ che è disponibile per equilibrare la forza F . $P\theta$ rappresenta perciò una forza proporzionale allo spostamento che si oppone alla variazione di geometria, e' cioè del tipo delle forze di richiamo elastico. Il coefficiente di proporzionalità non è però una costante elastica ma una forza (o tensione) che dipende dallo stato di presolliecitazione; per questo motivo la forza di richiamo è detta geometrica e la rigidezza del sistema è detta rigidezza geometrica, in quanto non dipende dalle caratteristiche elastiche del sistema (in questo problema peraltro del tutto assenti) ma solo dalla geometria.

Generalizzando, la rigidezza geometrica rappresenta l'inerzia di un sistema presolliecitato a mutare configurazione, anche in assenza di deformazioni elastiche. Le forze geometriche nascono per effetto dello squilibrio tra forze e tensioni preesistenti causato dalla variazione di geometria. In generale la rigidezza geometrica è tanto maggiore quanto maggiore è la presolliecitazione: nell'esempio del pendolo la rigidezza cresce con il peso della massa e si annulla con essa; per $P=0$ ed $F \neq 0$ non può sussistere equilibrio (nell'intorno di $\theta = 0$) per assenza di rigidezza geometrica del sistema. In particolare, nella teoria linearizzata non vale la sovrapposizione degli effetti.

Si notino le differenze di ipotesi e di procedimento fra la teoria lineare e quella linearizzata: entrambe

assumono che gli spostamenti siano infinitamente piccoli (cinematica lineare); la teoria lineare considera però l'equilibrio nella configurazione di riferimento, la teoria linearizzata in quella deformata (al primo ordine negli spostamenti). La conseguenza è che le forze ora appaiono nella parte omogenea delle equazioni di equilibrio (come coefficienti di rigidezza geometrica) cosicché se esse variano durante il processo di carico la rigidezza varia e il comportamento del sistema è nonlineare. In definitiva le equazioni della teoria linearizzata sono lineari negli spostamenti, ma quadratiche nel prodotto carichi-spostamenti.

9.2.2 Biforcazione dell'equilibrio

La rigidezza geometrica di un sistema può naturalmente coesistere con la rigidezza elastica. Se la massa m del pendolo è vincolata da una molla elastica lineare di rigidezza K disposta orizzontalmente (fig. 59) l'equazione (linearizzata) di equilibrio alla traslazione si scrive

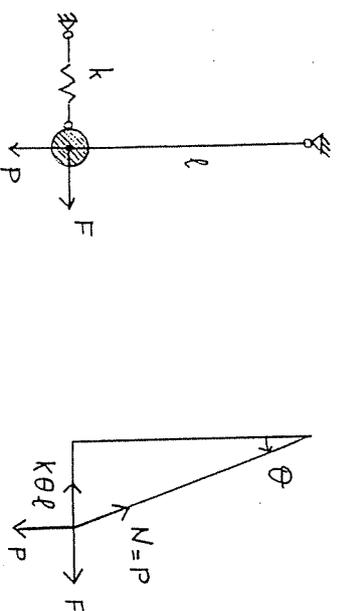
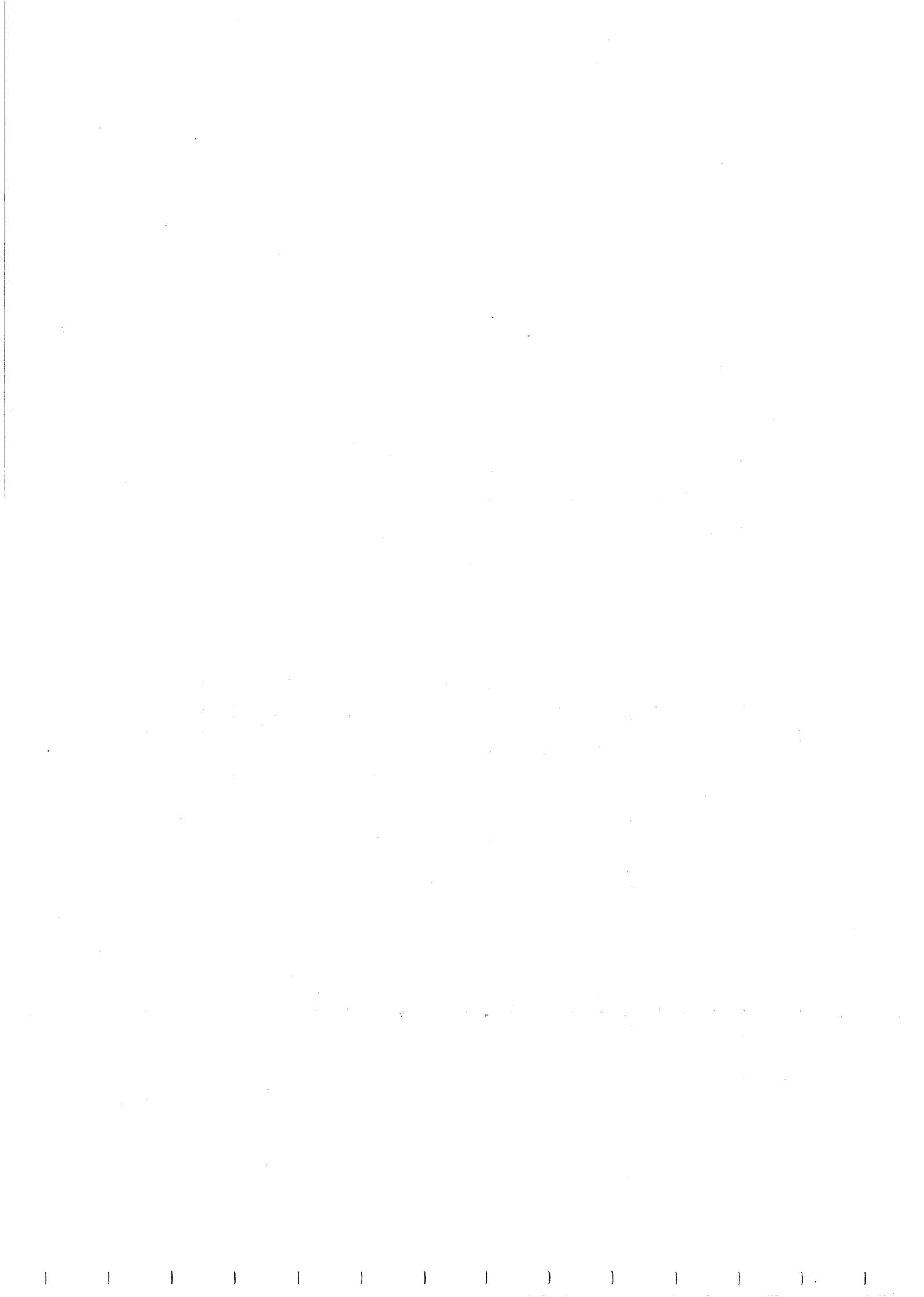


fig. 59



$$(K\ell + P)\Theta = F$$

(4)

in cui $K\ell$ e' la rigidezza elastica e P quella geometrica. Solitamente l'effetto geometrico e' trascurabile rispetto a quello elastico; si pensi infatti ad un sistema continuo: le forze geometriche sono proporzionali alle pretensioni σ_0 , quelle elastiche al modulo elastico $E \gg \sigma_0$. In questi casi, peraltro i piu' comuni, si puo' senz'altro applicare la teoria lineare. Tuttavia, anche quando il termine geometrico non e' trascurabile (P dell'ordine di $K\ell$ nell'esempio) la teoria lineare da' risultati qualitativamente esatti, anche se quantitativamente errati. Cio' dipende dal fatto che la rigidezza geometrica e' positiva, cioe' si somma a quella elastica per dare una forza opposta alla forza attiva F .

Una situazione affatto diversa si ha quando la rigidezza geometrica e' negativa, il che accade quando la forza geometrica e' concorde con quella attiva, come si ha ad esempio nel pendolo rovescio in fig. 60a (in cui il filo sia sostituito da un'asta rigida).

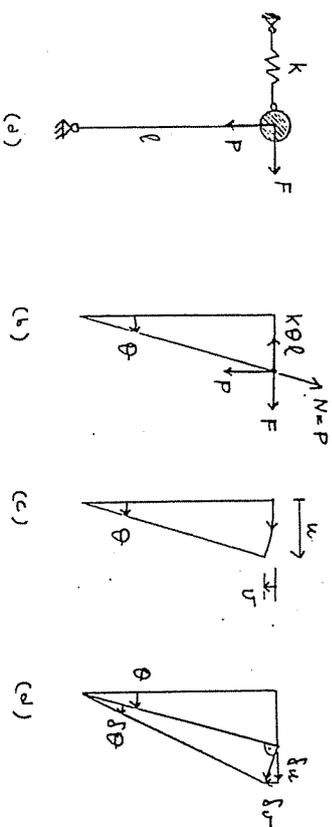


fig. 60

In questo caso la condizione di equilibrio si scrive (fig. 60b)

$$(K\ell - P)\Theta = F$$

(5)

Si studi dapprima il problema omogeneo $F = 0$. La (5) ammette la soluzione banale $\Theta = 0$ (asta rettilinea) e la soluzione non banale $\Theta \neq 0$ per $P = P_c$, dove

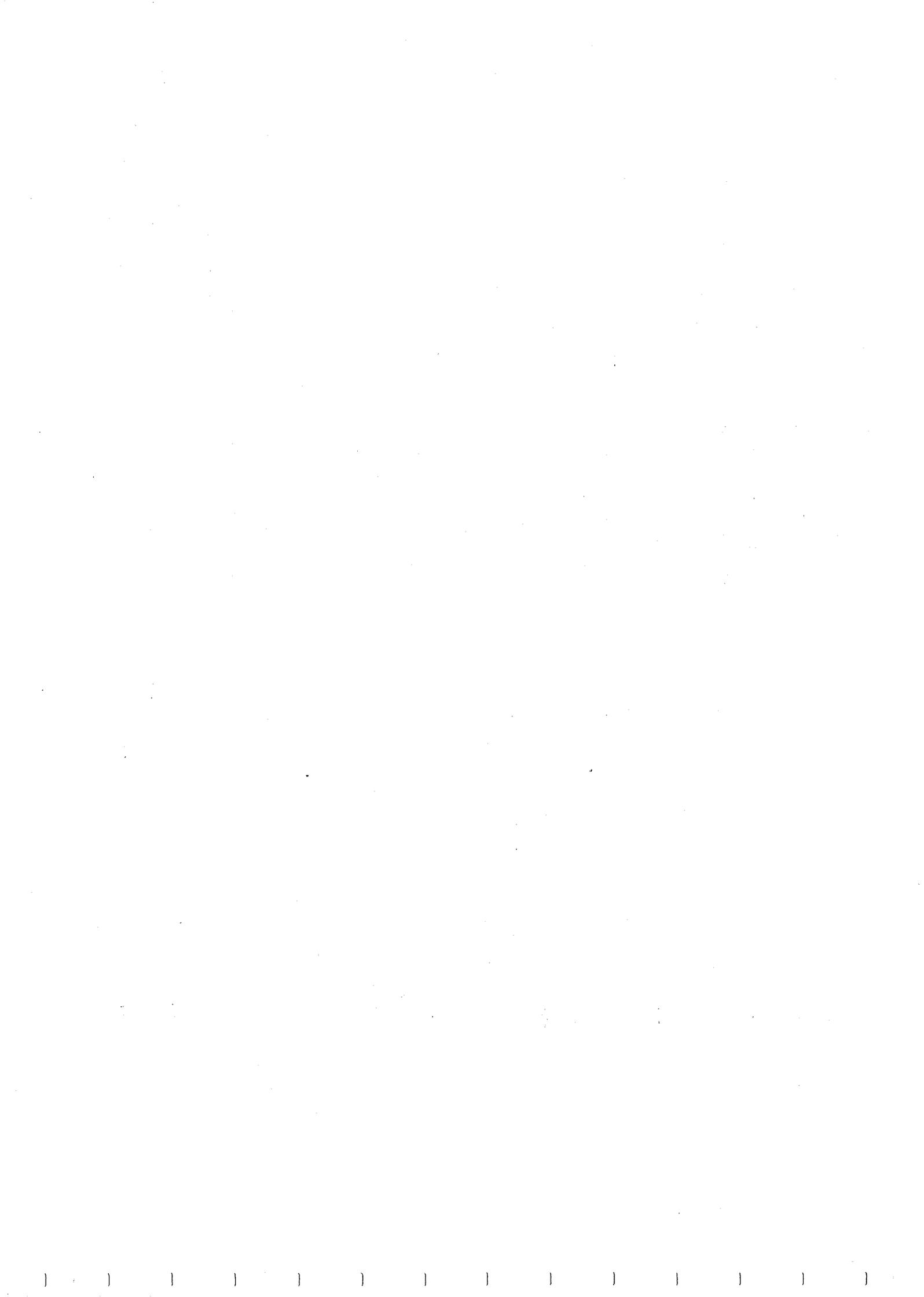
$$P_c = K\ell$$

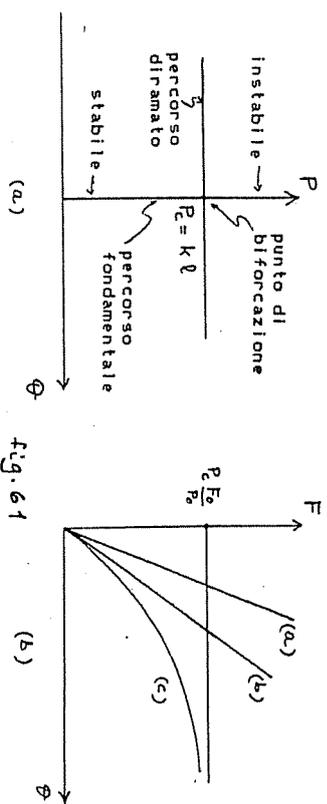
(6)

e' detto carico critico. Il carico critico ha un significato meccanico molto importante: rappresenta il piu' piccolo valore del carico per il quale coesistono due (o piu') configurazioni di equilibrio, per il quale cioe' viene meno l'unicita' della soluzione del problema elastico, assicurata dal teorema di Kirchhoff in un ambito strettamente lineare.

Se si diagrammano (fig. 61a) le soluzioni della (5) in un piano P, Θ , a $P = P_c$ corrisponde un punto di biforcazione, punto d'intersezione di due (o piu') rami di equilibrio. Nella teoria della stabilita' si dimostra che i punti del percorso $\Theta = 0$ (percorso fondamentale) corrispondenti a $P > P_c$ sono caratterizzati da equilibrio instabile, e quindi non sono raggiungibili dal sistema (+).

(+) Questo risultato puo' anche essere ottenuto in base alle considerazioni che seguono. Per $P < P_c$ la rigidezza elastica e' in valore assoluto maggiore di quella geometrica cosicche' se si assegna al sistema una piccola perturbazione, il sistema tende a ritornare nella configurazione iniziale (o il moto e' confinato in un intorno di questa) e l'equilibrio e' stabile; per $P > P_c$ la rigidezza geometrica e' maggiore di (segue)





La teoria linearizzata, sfortunatamente, non e' in grado di fornire informazioni circa il percorso diramato, che appare come una curva piatta caratterizzata da un illusorio equilibrio indifferente. Un'analisi piu' approfondita richiede infatti necessariamente l'impiego della teoria nonlineare che apre tutto un capitolo della Scienza delle Costruzioni che non puo' essere affrontato in questa sede. Bastera' soltanto dire che la teoria linearizzata, molto semplice, e' in grado di fornire l'esatto valore di P_c nelle piu' comuni applicazioni e nelle ipotesi di calcolo usualmente accettate, fornendo una stima, ancorche' incompleta, del grado di sicurezza della struttura nei riguardi dei fenomeni di 'instabilita'. Tali fenomeni non possono ovviamente essere predetti facendo uso della teoria lineare.

Passando a considerare il problema non omogeneo (5), la soluzione e':

(+) (segue pag. preced.) quella elastica e quindi, assegnata una perturbazione, il sistema si allontana indefinitamente dalla configurazione di equilibrio, che pertanto e' instabile.

$$\Theta = \frac{F}{k l} \frac{1}{1 - P/P_c} \quad (7)$$

avendo fatto uso della (6). Nella (7) $F/k l$ e' la soluzione del problema lineare e $(1 - P/P_c)^{-1}$ e' detto fattore di amplificazione. La (7) e' diagrammata in fig. 6.1b in tre casi: a) $P = 0$, b) $P = \cos t$, c) $P = \lambda P_0$, $F = \lambda F_0$ in cui λ e' un parametro di carico. La soluzione a) coincide con quella della teoria lineare, (assenza di effetti geometrici), la curva b) evidenzia una riduzione costante di rigidezza, la curva c) una riduzione progressiva; per $P = P_c$ la rigidezza geometrica eguaglia in valore assoluto quella elastica cosicche' la rigidezza complessiva e' nulla e lo spostamento risulta infinito. Cio' naturalmente e' conseguenza della linearizzazione del problema, in quanto i termini nonlineari qui trascurati, mantengono finiti gli spostamenti. Si noti infine che il problema non omogeneo non presenta biforcazioni; questa caratteristica e' propria di sistemi anche piu' complessi di quello qui esaminato.

9.2.3 Formulazione variazionale

La teoria linearizzata e' anche detta in letteratura teoria del secondo ordine. Questa dizione va riferita al fatto che, se si vogliono ottenere le equazioni di equilibrio attraverso un procedimento variazionale, e' necessario assumere un'espressione completa al secondo ordine negli spostamenti dell'energia potenziale totale. Ad esempio, nel



caso del pendolo rovescio, l'energia potenziale totale si scrive

$$V = \frac{1}{2} k \Delta^2 - P\psi - Fw \quad (8)$$

in cui Δ , ψ ed w vanno espressi in funzione di θ (fig. 60c). Per avere una espressione di V completa al secondo ordine e' sufficiente una relazione $\Delta = \Delta(\theta)$ lineare in θ (in quanto Δ appare gia' al quadrato) ma sono necessarie relazioni $V = V(\theta)$, $w = w(\theta)$ quadratiche in θ : e' necessario pertanto studiare una cinematica nonlineare (al secondo ordine, appunto) per ottenere un'equazione completa al primo ordine. Cio' e' conseguenza del fatto che la condizione di equilibrio richiede derivazione di V rispetto a θ . In definitiva l'energia potenziale totale che si ottiene coincide nella parte elastica con quella della teoria lineare differendo da quella nella sola parte relativa ai carichi, che ora e' quadratica mentre nella teoria lineare e' lineare. (+)

Poiche' e':

$$V = \ell(1 - \cos\theta) = \ell(1 - \theta^2/2) + O(\theta^4)$$

$$w = \ell \sin\theta = \theta\ell + O(\theta^3) \quad (9)$$

$$\Delta = \theta\ell + O(\theta^3)$$

(+) Questo risultato non e' generale: si veda poi il punto 9.3.

la (8) si scrive

$$V = \frac{1}{2} k \ell^2 \theta^2 - P\ell(1 - \frac{\theta^2}{2}) - F\ell\theta \quad (10)$$

Imponendo che sia $dV/d\theta = 0$ si riottiene l'equazione di equilibrio (4).

L'equazione (4) puo' naturalmente essere ottenuta anche dal teorema dei lavori virtuali, il cui impiego non e' tuttavia immediato come nel caso della teoria lineare. Lo spostamento virtuale, infatti, va imposto a partire dalla configurazione deformata, cioe' va sovrapposto alla configurazione in cui si vuole scrivere l'equilibrio (fig. 60d). Nel caso in questione il TLV si scrive:

$$N \delta\Delta = P \delta\psi + F \delta w \quad A \delta\theta \quad (11)$$

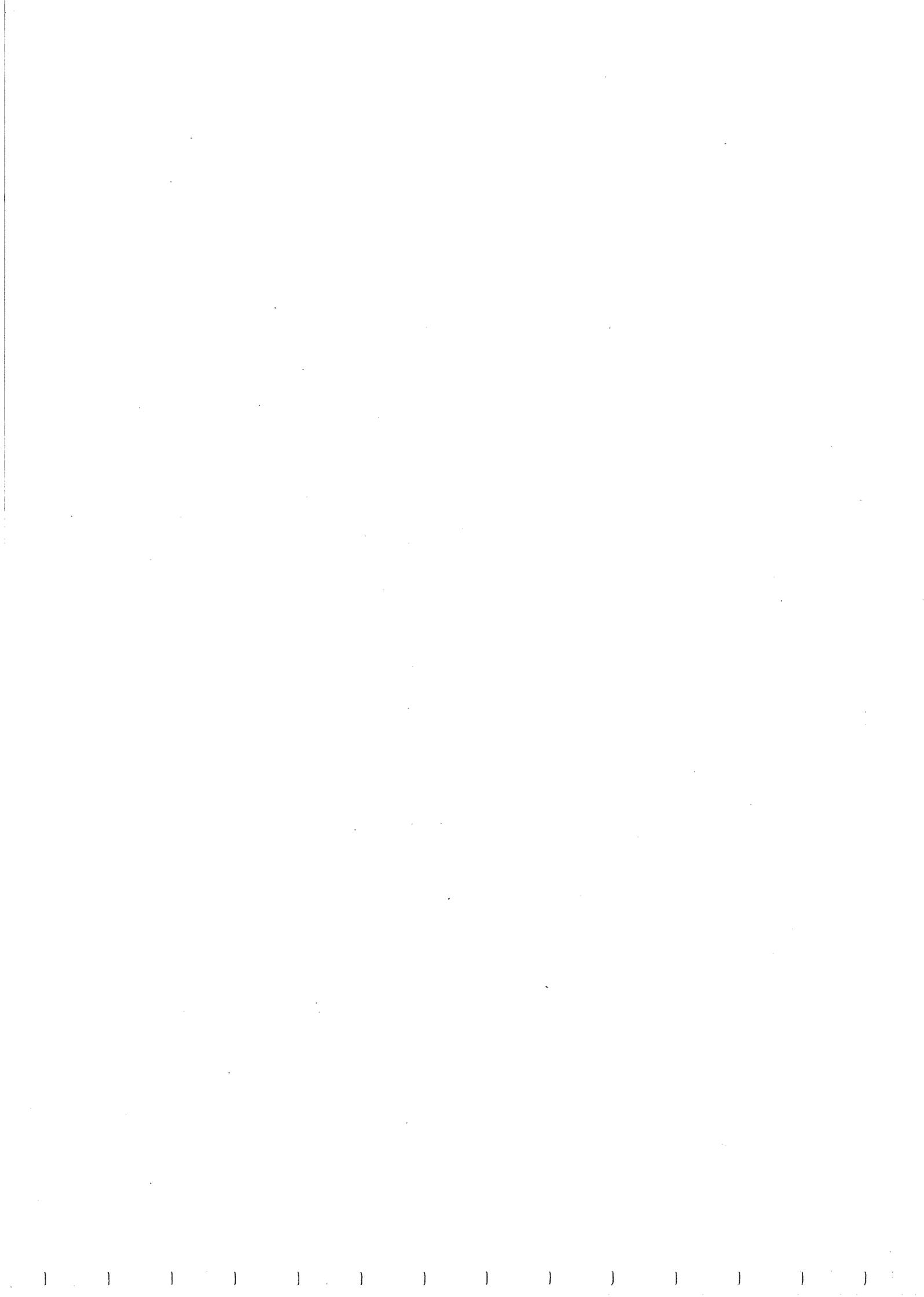
in cui $N = k \cdot \theta \ell$, ed inoltre

$$\delta\Delta = \ell \delta\theta, \quad \delta\psi = \theta\ell \delta\theta, \quad \delta w = \ell \delta\theta \quad (12)$$

Si ottiene

$$(k\theta\ell^2 - P\ell\theta - F\ell) \delta\theta = 0 \quad A \delta\theta \quad (13)$$

da cui ancora la (4). Si noti che le (12) possono essere determinate differenziando le (9) o piu' semplicemente dalla cinematica (lineare) dei corpi rigidi. Il TLV quindi puo' essere scritto ignorando la cinematica nonlineare, come il metodo diretto. Tuttavia si perde, rispetto al caso lineare, la favorevole circostanza dell'uguaglianza formale (ma non sostanziale) tra spostamento effettivo e spostamento



virtuale: entrambi infatti sono spostamenti infinitesimi, ma ora lo spostamento virtuale e' assegnato a partire dalla configurazione deformata, non piu' da quella di riferimento da cui e' invece misurato lo spostamento effettivo.

9.3 Sistemi continui presolleccitati

Si generalizzano ad un generico sistema continuo linearmente elastico i concetti precedentemente esposti con riferimento al pendolo.

Sia \mathcal{E}_0 la configurazione naturale assunta dal corpo in assenza di tensioni e deformazioni (fig.62). Per effetto di forze di volume b_0 e di superficie f_0 (ed eventuali cedimenti vincolari) il corpo si porti in una configurazione \mathcal{E}_1 , caratterizzata da tensioni \mathcal{G}_0 , deformazioni \mathcal{E}_0 e spostamenti u_0 (stato di presolleccitazione). La configurazione \mathcal{E}_1 e' assunta come configurazione di riferimento e se gli spostamenti u_0 e le deformazioni \mathcal{E}_0 sono piccoli viene generalmente identificata con la configurazione naturale. In altre parole non si tiene di solito conto delle modificazioni di geometria del sistema indotte dalle forze

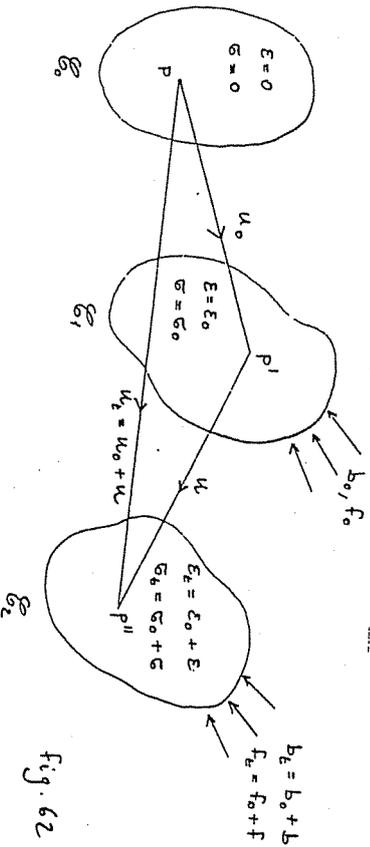


Fig. 62

di presolleccitazione.

Si considerino ora degli incrementi b ed f delle forze di volume e di superficie applicate al corpo a partire dalla configurazione \mathcal{E}_1 . Per effetto di queste forze (ed eventuali cedimenti vincolari \bar{u}) il corpo si porti in una nuova configurazione di equilibrio \mathcal{E}_2 che prende il nome di configurazione variata, in cui deformazioni e tensioni totali sono rispettivamente $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}$, $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}$ e il campo di spostamento $u_2 = u_0 + u$. Il problema elastico per il corpo presolleccitato si pone in questi termini: noto lo stato di presolleccitazione u_0 , \mathcal{G}_0 , \mathcal{E}_0 in \mathcal{E}_1 determinare, in conseguenza dell'applicazione di forze incrementali b ed f , il campo degli spostamenti addizionali u , delle deformazioni \mathcal{E} e delle tensioni \mathcal{G} , tenuto conto delle modificazioni di geometria $\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$.

Le condizioni di equilibrio in \mathcal{E}_2 vengono ricavate in termini di spostamenti attraverso il teorema di minimo dell'energia potenziale totale. Nella generica configurazione variata l'energia potenziale elastica e'

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}_2^T C \mathcal{E}_2 dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}_2} (\mathcal{E}_0^T + \mathcal{E}) C (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}) dV \quad (14)$$

e l'energia potenziale dei carichi

$$W = - \int_{\mathcal{E}_2} [b_0^T (u_0 + u) + b^T u] dV - \int_{\mathcal{E}_2} [f_0^T (u_0 + u) + f^T u] dS \quad (15)$$



in quanto le forze di presollecitazione compiono lavoro negli spostamenti totali e gli incrementi di forza nei soli spostamenti incrementali.

Si esprimono ora le deformazioni incrementali \mathcal{E} in termini di spostamento (relazioni implicite di congruenza) fino ai termini del secondo ordine in u :

$$\mathcal{E} = D_1 u + D_2 u \equiv \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (16)$$

in cui D_1 e' un operatore differenziale lineare ($D_1 \equiv D$) e D_2 e' un operatore quadratico; \mathcal{E}_1 rappresenta la parte di \mathcal{E} lineare in u , \mathcal{E}_2 la parte quadratica. Le (15) possono essere interpretate come sviluppo in serie troncato al secondo ordine delle relazioni cinematiche esatte, ovvero come misura quadratica esatta della deformazione (si pensi ad esempio al tensore di Green-Lagrange per il continuo tridimensionale).

Con le (14), (15) e (16) l'energia potenziale totale

$V = V^* + W$ si scrive:

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots \quad (17)$$

in cui si sono raggruppati i termini con le stesse potenze di u trascurando i termini cubici e quartici:

$$V_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \epsilon_0^T C \epsilon_0 dV - \int_{\mathcal{D}} b_0^T u_0 dV - \int_{\partial \mathcal{D}_f} f_0^T u_0 dS \quad (18)$$

$$V_1 = \int_{\mathcal{D}} \epsilon_1^T C \epsilon_0 dV - \int_{\mathcal{D}} u^T b_0 dV - \int_{\partial \mathcal{D}_f} u^T f_0 dS +$$

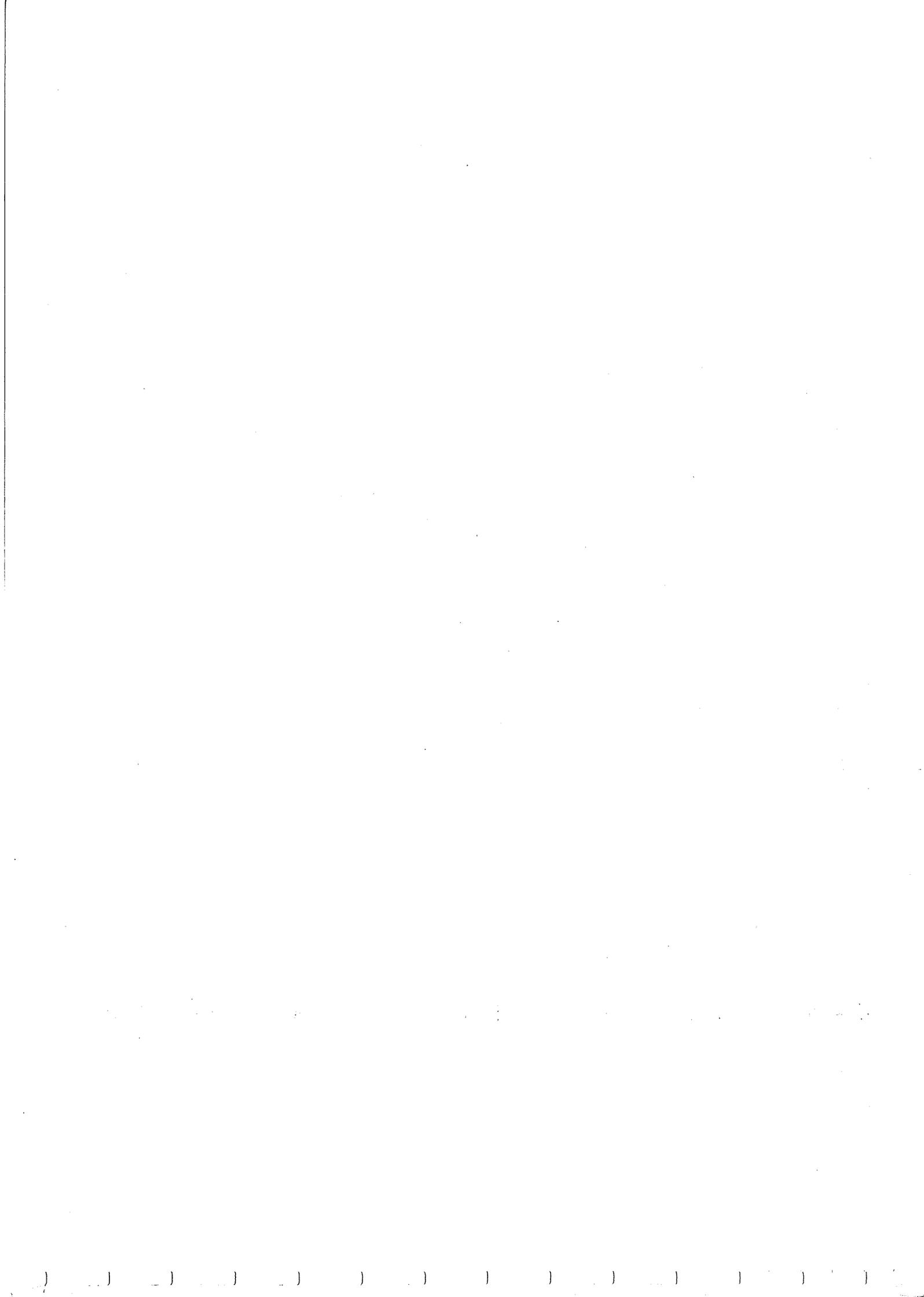
$$+ \int_{\mathcal{D}} b^T u dV - \int_{\partial \mathcal{D}_f} f^T u dS \quad (18_2)$$

$$V_2 = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_1^T C \epsilon_1 + \epsilon_2^T C \epsilon_0 \right) dV \quad (18_3)$$

Nella (17) V_0 rappresenta una costante indipendente da u (energia potenziale totale in \mathcal{E}_0) e puo' essere posta uguale a zero; inoltre la somma dei primi tre termini in V_1 risulta essere uguale a zero per il teorema dei lavori virtuali in quanto esprime il lavoro di forze b_0 , f e tensioni $G_0 = C \epsilon_0$ equilibrate, in un campo di spostamenti virtuali u e deformazioni \mathcal{E}_1 congruenti. Si noti che \mathcal{E}_1 puo' essere assunta come deformazione virtuale in quanto e' lineare in u e quindi rappresenta una deformazione (infinitesima) conseguente a spostamenti infinitesimi. In definitiva l'energia potenziale totale si scrive:

$$V = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \epsilon_1^T C \epsilon_1 + \epsilon_2^T G_0 \right) dV - \int_{\mathcal{D}} b^T u dV - \int_{\partial \mathcal{D}_f} f^T u dS \quad (19)$$

Il primo termine rappresenta l'energia potenziale elastica quadratica della teoria lineare e gli ultimi due termini il lavoro compiuto dei carichi addizionali. L'unico termine che tiene conto dello stato di presollecitazione (e che quindi rende non applicabile la sovrapposizione degli effetti) e' il secondo, che esprime il lavoro delle tensioni preesistenti G_0 nelle componenti del secondo ordine della



deformazione addizionale \mathcal{E}_2 . Questo termine e' detto geometrico, in quanto non dipende dalle caratteristiche elastiche del corpo (o meglio eventualmente dipende da quelle in maniera indiretta attraverso la tensione G_0) (+).

La (19) e' quadratica in w ; imponendo che sia $\delta V = 0$ per ogni δw cinematicamente ammissibile si ottengono delle equazioni lineari in w che scriveremo nella forma:

$$\begin{aligned} Lw - \lambda Gw &= b & \text{in } \mathcal{D} \\ Bw - \lambda Hw &= f & \text{su } \mathcal{D}_f \end{aligned} \quad (20)$$

in cui L e B sono gli stessi operatori differenziali che governano il problema elastico lineare (eq.(1.19)) e sono detti operatori elastici; G e H sono operatori geometrici, (anch'essi autoaggiunti, in quanto ricavati da un principio variazionale) e sono legati al termine geometrico dell'energia potenziale totale. Nelle (20) si e' posto $G_0 = \lambda \bar{G}_0$, dove λ e' un fattore moltiplicativo dello stato di presollcitazione ed inoltre si e' introdotto un segno negativo per convenienza.

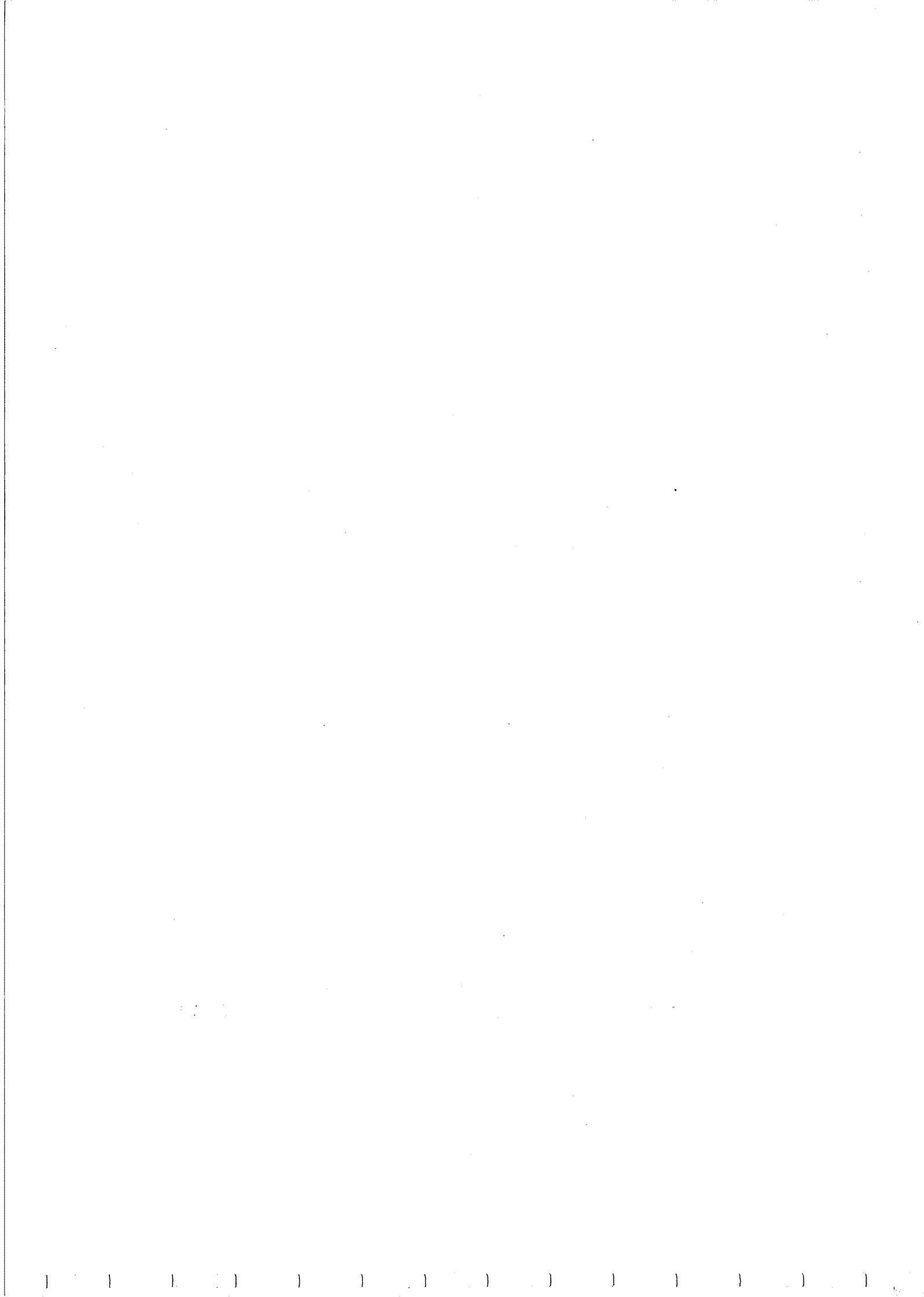
(+) Si noti che la (19) differisce leggermente dalla (10), relativa al pendolo rovescio: in quel caso infatti il termine geometrico e' stato determinato come lavoro delle forze addizionali nelle componenti del secondo ordine delle relazioni cinematiche che esprimono gli spostamenti in funzione dei parametri lagrangiani. Peraltro si puo' constatare che se si rilascia l'ipotesi di inestensibilita' dell'asta il carico compie lavoro lineare e le pretensioni lavoro quadratico, come espresso dalle (19); si trova cosi' ancora la (10).

Le (20) rappresentano la formulazione agli spostamenti della teoria linearizzata. Esse esprimono le condizioni di equilibrio nella configurazione variata \mathcal{E}_2 infinitamente vicina alla configurazione di riferimento \mathcal{E}_1 (si e' infatti troncata la (17) ai termini quadratici) e tengono conto, attraverso gli operatori G e H , dello stato di presollcitazione perturbato dagli spostamenti addizionali w .

Nel seguito si scrivono esplicitamente le (20) per alcuni continui labili; poi si mostrano delle applicazioni a problemi di biforcazione dell'equilibrio.

9.4 Continui labili: il filo e la membrana

Per filo e membrana si intendono comunemente degli oggetti, rispettivamente con una o due dimensioni prevalenti, caratterizzati dall'assenza di forma propria. Le configurazioni naturali di questi sistemi risultano infatti in numero infinito in quanto esistono particolari campi di spostamento non rigidi a cui sono associati stati di deformazione e tensione identicamente nulli. Per questo motivo il filo e la membrana sono sistemi cinematicamente indeterminati (staticamente impossibili) per vincoli interni, ovvero localmente labili. Tuttavia in presenza di uno stato di presollcitazione l'equilibrio puo' verificarsi anche con reazioni elastiche nulle grazie ai soli effetti geometrici.



9.4.1 Il filo teso

Si consideri il filo come un continuo monodimensionale costituito da punti materiali privi di orientazione, immerso in uno spazio bidimensionale. La generica configurazione del filo e' individuata dalle due componenti di spostamento del punto e la misura della deformazione dalla dilatazione specifica. I punti si scambiano azioni di contatto costituite esclusivamente da forze di trazione dirette secondo la tangente alla curva su cui giace il filo nella generica configurazione.

Il filo sia inizialmente teso da forze di estremita' P , cosicche' la configurazione di riferimento \mathcal{E}_1 (unica, a differenza di \mathcal{E}_0) coincide con il segmento $[0, \ell]$ dell'asse x in fig. 63a. Lo stato di presollaccitazione e' quindi caratterizzato da uno sforzo normale costante $N_0 = P$. Si voglia determinare la configurazione variata \mathcal{E}_2 assunta dal filo per effetto di forze (incrementali) distribuite $P_x(x)$ e $P_y(x)$ e concentrate al contorno f_{Ax} , f_{Ay} , f_{Bx} , f_{By} .

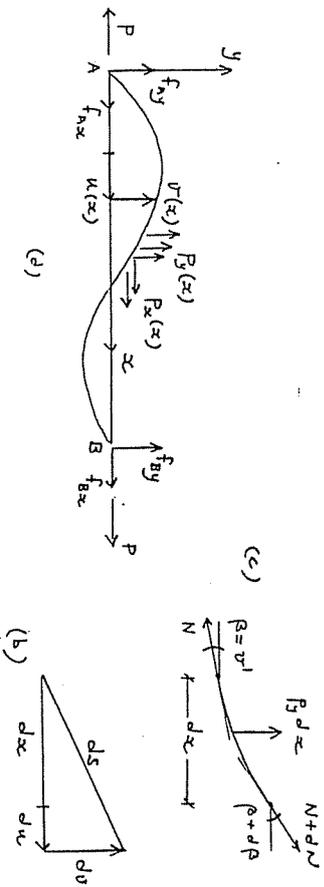


fig. 63

Siano $w(x)$ e $v(x)$ le funzioni spostamento incognite che individuano \mathcal{E}_2 . Per determinare la relazione deformazione-spostamento (16) si consideri (fig. 63b) un elemento di filo di lunghezza dx in \mathcal{E}_1 che misuri ds in \mathcal{E}_2 ; l'allungamento specifico e' $\epsilon = ds/dx - 1$, e poiche' risulta

$$ds^2 = (dx + du)^2 + dv^2 \quad (21)$$

si ha

$$\epsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 \approx \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \dots \quad (22)$$

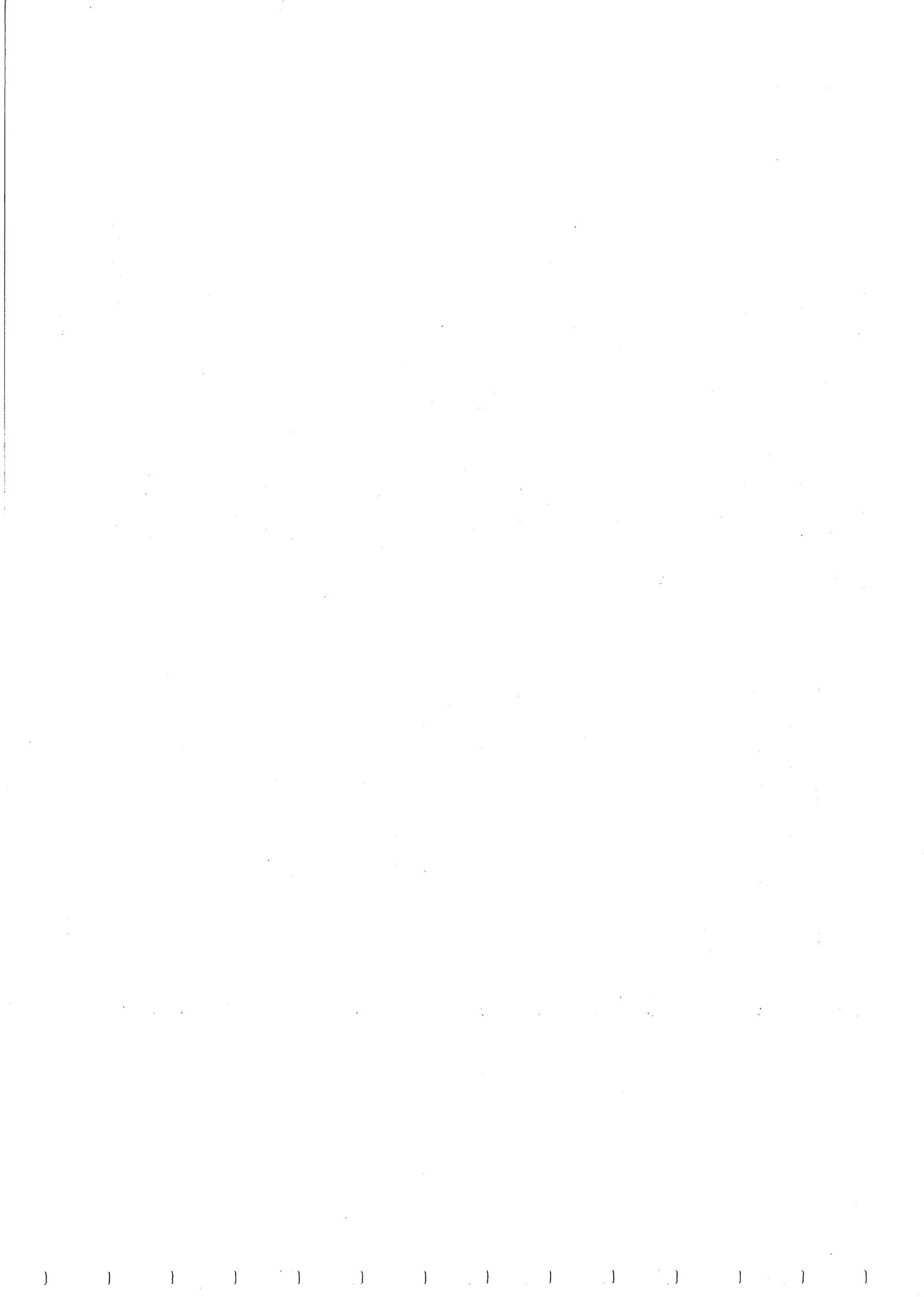
in cui la radice quadrata e' stata sviluppata in serie fino ai termini del secondo ordine (+). Con la notazione (16), posto $w = \{u, v\}^T$ e'

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

L'operatore lineare D_1 , di dimensioni 1×2 , mostra che il problema cinematico (lineare) e' indeterminato, in quanto e' indeterminata la componente verticale dello spostamento; il filo e' pertanto labile in direzione normale y . Si noti che se si pone $V \equiv 0$ si riottiene il modello d'asta, per cui il filo teso puo' anche essere visto come asta (presollaccitata) immersa in uno spazio a due (o tre) dimensioni.

Con le (23) l'energia potenziale totale (19) si scrive:

(+) Allo stesso risultato si arriva se si assume come misura della deformazione quella di Green-Lagrange e si trascura $(du/dx)^2$ rispetto a du/dx .



$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EA u'^2 + N_0 v'^2) dx - \int_0^l (P_x u + P_y v) dx +$$

$$- [F_{Ax} u(0) + F_{Ay} v(0) + F_{Bx} u(l) + F_{By} v(l)] \quad (24)$$

in cui si è posto $C = [EA]$; $N_0 v'^2$ rappresenta il termine geometrico del filo. Imponendo la stazionarietà ed integrando per parti si ha:

$$\delta V = \int_0^l (EA u' \delta u' + N_0 v' \delta v' - P_x \delta u - P_y \delta v) dx +$$

$$- [F_{Ax} \delta u(0) + F_{Ay} \delta v(0) + F_{Bx} \delta u(l) + F_{By} \delta v(l)]$$

$$= \int_0^l - [(EA u'' + P_x) \delta u + (N_0 v'' + P_y) \delta v] dx +$$

$$+ [EA u' \delta u + N_0 v' \delta v]_0^l - F_{Ax} \delta u(0) + \dots \quad (25)$$

Dalla (25) si ricava:

$$EA u'' + P_x = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (26)$$

$$(n EA u' - F_x) \delta u = 0 \quad \text{su } \mathcal{B} \quad (n = \pm 1)$$

ed inoltre

$$N_0 v'' + P_y = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (27)$$

$$(n N_0 v' - F_y) \delta v = 0 \quad \text{su } \mathcal{B} \quad (n = \pm 1)$$

Si noti che il problema negli spostamenti longitudinali $u(x)$ è disaccoppiato da quello negli spostamenti trasversali $v(x)$ e coincide con il problema elastico dell'asta. Se in particolare è $P_x = F_{Ax} = F_{Bx}$ e $P_y = 0$ (26)

sono omogenee e quindi ammettono la soluzione banale $u(x) = 0$. Il problema si riduce perciò a determinare i soli spostamenti trasversali $v(x)$ attraverso l'integrazione dell'equazione differenziale (27) con le condizioni al contorno (27). Va osservato peraltro che i due problemi, (26) e (27), hanno la stessa struttura formale, salvo il fatto che la rigidità elastica longitudinale EA è sostituita dalla rigidità geometrica trasversale N_0 . Si noti inoltre che i carichi trasversali $P_y(x)$ non producono allungamenti al primo ordine, in quanto $u(x) = 0$ corrispondono deformazioni lineari $\epsilon_1(x) = 0$.

Le (27) possono essere interpretate (e anche direttamente ottenute) come condizioni di equilibrio imposte nella configurazione variata (fig. 63c). Dall'equilibrio alla traslazione verticale di un elemento infinitesimo di filo si ha infatti:

$$-N \frac{dv}{dx} + (N + dN) \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) + P_y dx = 0 \quad (28)$$

mentre da quello alla traslazione orizzontale si ha $dN = 0$, cioè $N = N_0 = \cos \theta$. Dalla (28) si riottiene quindi la (27).

Le condizioni al contorno (27) esprimono il lavoro delle componenti verticali (reazioni geometriche) $N_0 v'$ negli spostamenti virtuali δv . Se gli spostamenti verticali sono impediti, se cioè il filo è fisso agli estremi, le condizioni al contorno sono solo geometriche $v(0) = v(l) = 0$; se gli spostamenti sono liberi le condizioni al contorno sono meccaniche $-N_0 v'(0) = F_{Ay}$, $N_0 v'(l) = F_{By}$ ed



esprimono l'equaglianza delle reazioni geometriche verticali e delle forze esterne attive. Peraltro in questo caso l'equilibrio e' impossibile in quanto non si verifica l'equilibrio globale del corpo. Per determinare le condizioni sotto cui il sistema (27) ammette egualmente soluzione si consideri il problema omogeneo aggiunto (vedi Appendice); facendo riferimento per semplicita' al caso di forze al contorno f_y nulle, questo si scrive

$$N_0 w'' = 0 \quad (29)$$

$$w'(0) = 0, \quad w'(l) = 0$$

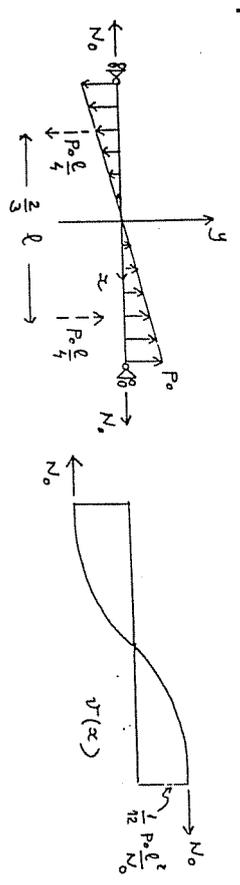
essendo le (27) autoaggiunte. Poiche' le (29) ammettono le ∞^1 soluzioni $w(x) = \cos t$, la condizione di solvibilita' (eq.(A.16)) richiede che sia:

$$\int_0^l p(x) dx = 0 \quad (30)$$

cioe' che $p(x)$ sia a risultante nulla. Si noti che non esiste alcuna condizione sul momento risultante; infatti l'equilibrio alla rotazione e' assicurato nella configurazione variata dalle forze d'estremita' N_0 che hanno braccio non nullo $v(l) - v(0)$. L'esempio che segue illustra meglio il problema.

Si consideri il filo in figura, libero di traslare verticalmente agli estremi, sottoposto ad un carico staticamente equivalente ad una coppia. Poiche' e' $P(x) = 2 P_0 x / l$ la soluzione generale della (27) e'

$$v(x) = -\frac{P_0}{3N_0 l} x^3 + C_1 x + C_2$$



alla quale vanno imposte le condizioni al contorno $v'(0) = v'(l) = 0$. Imponendo che sia $v'(l) = 0$ si ricava $C_1 = P_0 l / 4N_0$ e quindi

$$v'(x) = \frac{P_0}{N_0 l} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

Risulta percio' automaticamente $v'(0) = 0$ (e' infatti soddisfatta la condizione di compatibilita' (30)). La soluzione risultata:

$$v(x) = \frac{P_0 l^2}{4N_0} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right) + C_2$$

dove C_2 resta indeterminata; potendo il sistema traslare liberamente secondo y . Calcolando la differenza

$$\Delta v = v(l) - v(0) = \frac{P_0 l^2}{6N_0}$$

si puo' controllare che l'equilibrio alla rotazione e' soddisfatto; risulta infatti

$$P_0 \frac{l}{4} \cdot \frac{2}{3} l = N_0 \Delta v$$

9.4.2 La membrana uniformemente tesa

Si consideri la membrana come continuo bidimensionale costituito da punti materiali privi di orientazione immerso in uno spazio tridimensionale. Le variabili di configurazione sono le tre traslazioni u, v, w e le misure della deformazione le tre deformazioni nel piano $\xi_x, \xi_y, \delta_{xy}$. I punti materiali si scambiano azioni di contatto costituite da forze appartenenti al piano tangente alla superficie su

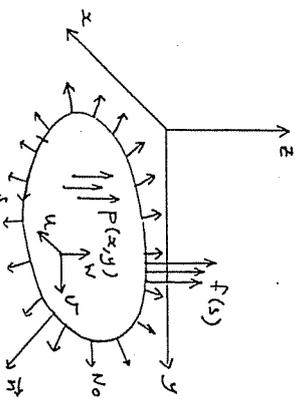


cui giace la membrana nella generica configurazione. Le forze normali sono esclusivamente di trazione.

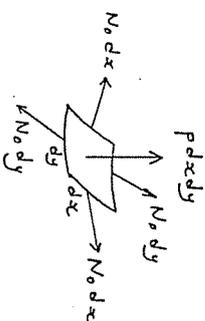
La membrana sia inizialmente sottoposta a forze normali al bordo uniformemente distribuite che inducono uno stato idrostatico di presolliecitazione (fig. 64a):

$$N_x^0 = N_0, \quad N_y^0 = N_0, \quad N_{xy}^0 = 0$$

La configurazione di riferimento \mathcal{E}_0 e' perciò rappresentata da un dominio piano \mathcal{D} . Poiche' gli spostamenti normali $w(x, y)$ non producono al primo ordine deformazioni nel piano la membrana e' un sistema labile (piu' precisamente e' degenere, in quanto cinematicamente impossibile per spostamenti nel piano e indeterminato per spostamenti trasversali). In analogia al problema del filo e dell'asta si puo' verificare che il comportamento meccanico nel piano e' governato dalle equazioni della lastra che sono disaccoppiate da quelle relative allo spostamento fuori del piano. Ci si limitera' pertanto a considerare solo forze trasversali $p(x, y), f(s)$ e spostamenti trasversali $w(x, y)$, posto $u(x, y) = v(x, y) \equiv 0$.



(a)



(b)

fig. 64

Assumendo come deformazioni le componenti del tensore di Green-Lagrange si ha:

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \delta_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (31)$$

cosicche' l'energia potenziale totale (19) si scrive:

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} N_0 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\mathcal{D}} p w dx dy - \int_{\partial \mathcal{D}} f w ds \quad (32)$$

Imponendo la stazionarieta' si ottiene:

$$\delta V = \int_{\mathcal{D}} N_0 \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\mathcal{D}} p \delta w dx dy - \int_{\partial \mathcal{D}} f \delta w ds \quad (33)$$

Integrando per parti

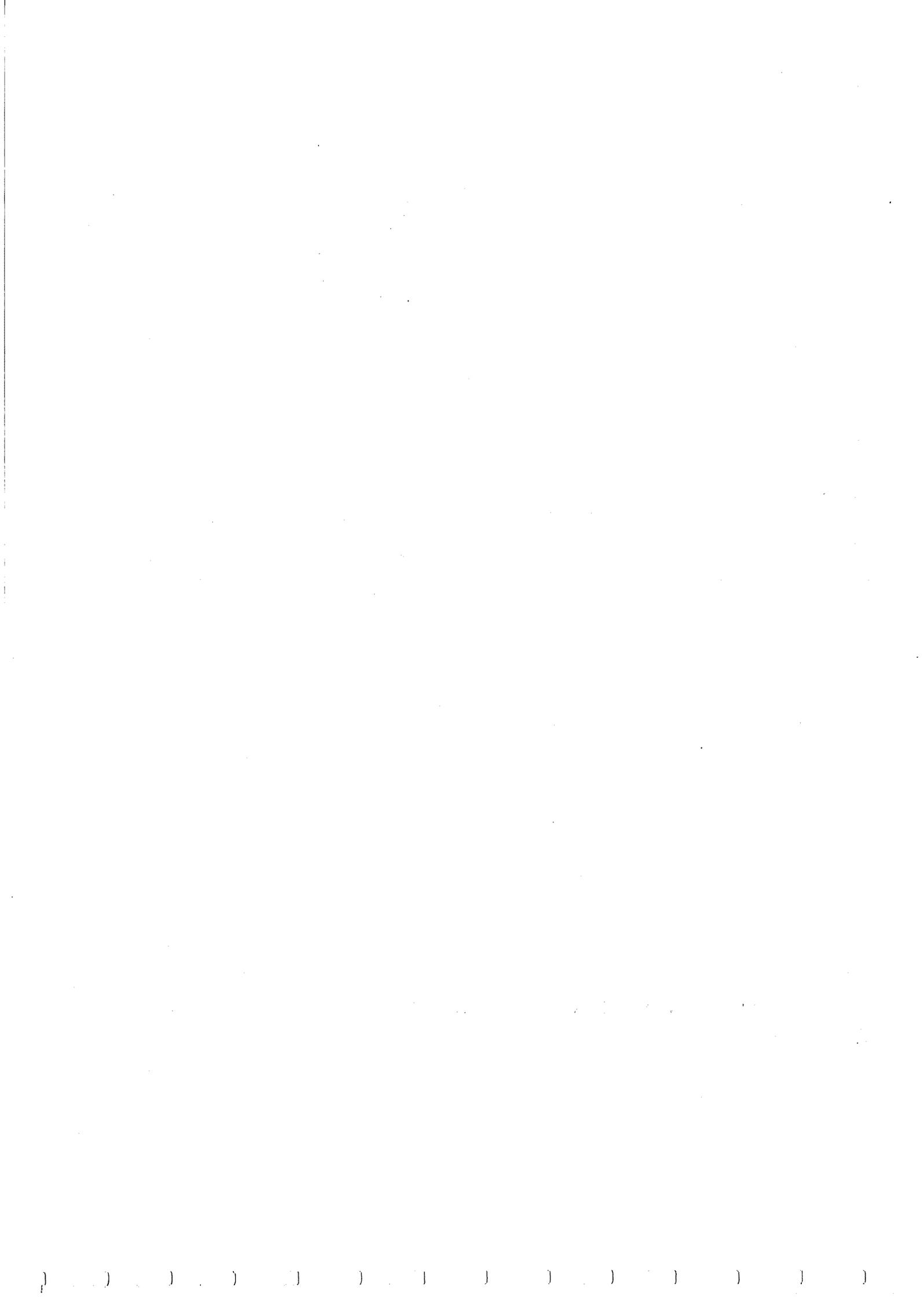
$$-\int_{\mathcal{D}} \left[N_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p \right] \delta w dx dy + \int_{\partial \mathcal{D}} \left[N_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) - f \right] \delta w ds = 0 \quad (34)$$

dove n_x ed n_y sono i coseni direttori della normale uscente alla curva di bordo $\partial \mathcal{D}$ nel punto individuato dall'ascissa curvilinea s . Dalle (34) si ricavano l'equazione differenziale d'equilibrio e le condizioni al contorno:

$$N_0 \nabla^2 w + p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (35)$$

$$\left(N_0 \frac{\partial w}{\partial n} - f \right) \delta w = 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{D}$$

La (35) puo' anche essere attenuata come condizione di equilibrio nella configurazione \mathcal{E}_0 con un ragionamento analogo a quello fatto per il filo (fig. 64b): il carico P



e' ora equilibrato dalla somma delle proiezioni verticali delle forze N_0 agenti sui quattro lati di un elemento di membrana deformata.

Come esempio si consideri una membrana rettangolare fissata su un contorno rigido, sottoposta a carico sinusoidale nelle due direzioni (fig. 65).

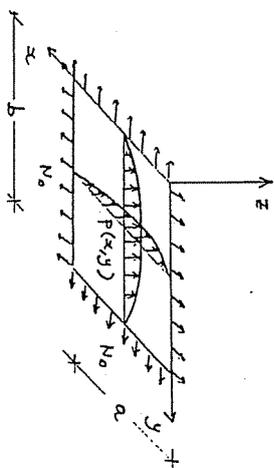


fig. 65

L'equazione (35) si scrive:

$$\nabla^2 w = -\frac{P_0}{N_0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Una soluzione del tipo

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

soddisfa le condizioni al contorno $w = 0$. Sostituendo nell'equazione di equilibrio si ottiene

$$\left[w_0 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) - \frac{P_0}{N_0} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0$$

da cui si ricava l'ampiezza incognita dello spostamento:

$$w_0 = \frac{P_0}{N_0 \pi^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}$$

9.5 Biforcazione dell'equilibrio

Le condizioni di equilibrio di un sistema elastico presollcitato sono espresse in termini di spostamento dalle equazioni (20). Per analizzare la soluzione si studi dapprima il problema omogeneo $b=0$, $f=0$:

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda Gu & \text{in } \mathcal{D} \\ Bu &= \lambda Hw & \text{su } \mathcal{D}_F \\ u &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (36)$$

Le (36) costituiscono un problema differenziale agli autovalori (vedi Appendice). Oltre alla soluzione banale $w(x) \equiv 0$, valida per ogni λ , le (36) ammettono soluzioni non banali $w_i(x)$ (autofunzioni) per particolari valori di $\lambda = \lambda_i$ (autovalori). Da un punto di vista meccanico gli autovalori individuano quelle particolari intensita' di presollcitazione per le quali sussistono due (o piu') configurazioni di equilibrio infinitamente vicine, la configurazione di riferimento $w(x) \equiv 0$ e la configurazione variata descritta dall'autofunzione. Ad ogni autovalore corrisponde percio' una biforcazione dell'equilibrio lungo il percorso fondamentale. Peraltro, poiche' le autofunzioni sono determinate a meno di una costante moltiplicativa, e' possibile individuare solo la forma assunta dal sistema lungo il percorso di equilibrio diramato (nell'intorno del punto di biforcazione) ma non l'ampiezza della deformata. Questa circostanza e' gia' stata messa in evidenza nell'esempio del pendolo rovescio (par. 9.2.2) e rappresenta il maggiore limite della teoria linearizzata.

Il problema (36) ammette infiniti autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e corrispondentemente infinite autofunzioni w_1, w_2, \dots , che, normalizzate, soddisfano le seguenti condizioni di ortonormalizzazione (vedi Appendice):



$$\int_{\mathcal{D}} w_j^T L w_i dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} w_j^T B w_i dS = \lambda_c \delta_{ij} \quad (37)$$

$$\int_{\mathcal{D}} w_j^T G w_i dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} w_j^T H w_i dS = \delta_{ij}$$

in cui δ_{ij} e' il simbolo di Kronecker. Se le condizioni al contorno non dipendono dall'autovalore λ , se cioe' e' $H \equiv 0$ nelle (36), nelle (37) compaiono solo gli integrali estesi al dominio \mathcal{D} .

Le condizioni (37) sono suscettibili di un'interpretazione meccanica. $L w_i$ e $B w_i$ rappresentano infatti le forze elastiche agenti nel dominio \mathcal{D} e sul contorno $\partial \mathcal{D}_f$ associate all'i-esima autofunzione e cosi' pure $G w_i$ e $H w_i$ sono le corrispondenti forze geometriche; le (37) stabiliscono percio' che il lavoro virtuale compiuto da tali forze nello spostamento descritto dalla j-esima autofunzione e' nullo se $i \neq j$. In altre parole le autofunzioni sono ortogonali nel senso che le forze (elastiche o geometriche) ad esse associate non compiono lavoro in autofunzioni diverse da quelle che le hanno generate.

A ciascuno degli infiniti autovalori corrisponde una biforcazione; di queste ha evidentemente interesse la biforcazione che si manifesta per prima al crescere del carico e che corrisponde quindi all'autovalore piu' piccolo, detto autovalore (o carico) critico λ_c . L'autofunzione $w_c(x)$ associata a λ_c prende il nome di modo critico.

Un metodo approssimato per determinare λ_c senza risolvere il problema di autovalori e' il seguente. Posto $\lambda = \lambda_c$, $w = w_c$, moltiplicando scalarmente le (36) per w_c e risolvendo rispetto a λ_c si ha:

$$\lambda_c = \frac{\int_{\mathcal{D}} w_c^T L w_c dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} w_c^T B w_c dS}{\int_{\mathcal{D}} w_c^T G w_c dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} w_c^T H w_c dS} \quad (38)$$

Il quoziente (38) e' detto rapporto di Rayleigh e fornisce l'autovalore critico come rapporto tra due lavori virtuali, compiuti rispettivamente dalle forze elastiche e dalle forze geometriche associate al modo critico nel modo critico stesso. Se w_c e' noto esattamente il rapporto fornisce l'esatto valore di λ_c , se w_c e' noto solo approssimativamente la (38) fornisce una stima di λ_c , tanto piu' accurata quanto piu' w_c e' vicino al modo critico. Piu' precisamente si dimostra che, al variare di w_c nella classe delle configurazioni compatibili, il rapporto di Rayleigh assume un valore minimo in corrispondenza dell'esatto modo critico, e che tale minimo e' uguale a λ_c . Conoscendo quindi anche solo qualitativamente la deformata critica, il rapporto fornisce un' approssimazione per eccesso dell'autovalore critico.

Un'espressione alternativa del rapporto di Rayleigh si ottiene direttamente dalla (19) (con $b=0$, $f=0$, $G_0 = \lambda_c \bar{G}_0$) osservando che per $\lambda = \lambda_c$ l'operatore di rigidezza (elastica piu' geometrica) e' singolare e quindi e' $V=0$; si ottiene

$$\lambda_c = - \frac{\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_i^T C \epsilon_i dV}{\int_{\mathcal{D}} \epsilon_i^T \bar{G}_0 \epsilon_i dV} \quad (38')$$

La (38') e' equivalente alla (38) e puo' essere ricondotta a quella attraverso delle integrazioni per parti. Si vede quindi che λ_c puo' essere espresso come rapporto tra due energie, elastica e geometrica, possedute dal sistema nella configurazione critica $w = w_c$.

Un'approssimazione piu' accurata del carico critico (e del modo critico) puo' essere ottenuta attraverso il metodo di Ritz (o del metodo di Galerkin) gia' descritto nel capitolo 8 in relazione al problema elastico lineare. La tecnica di discretizzazione e' la medesima, salvo il fatto che il funzionale energia potenziale totale a cui va fatto riferimento contiene ora il termine di presollecitazione; analoghe considerazioni valgono circa il metodo degli elementi finiti. Un'analisi dettagliata delle tecniche di discretizzazione nei problemi del secondo ordine non trova



spazio in questa sede; bastera' dire soltanto che le (20) possono essere ricondotte ad un problema algebrico del tipo

$$(K_e - \lambda K_g) q = P$$

in cui K_e e' la matrice elastica lineare gia' studiata, K_g e' la matrice geometrica e P il vettore dei carichi gia' definito. Nel caso omogeneo $P = 0$ le equazioni costituiscono un problema algebrico agli autovalori.

Passando a considerare il problema non omogeneo (20), la soluzione puo' essere determinata sviluppando le variabili di configurazione in termini delle autofunzioni ortonormali $w_i(x)$ ponendo

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i w_i(x) \quad (39)$$

in cui le ampiezze a_i sono indeterminate. Facendo uso delle condizioni (37), seguendo il procedimento illustrato in Appendice, si trova

$$w_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{\lambda_i - \lambda} w_i(x) \quad (40)$$

in cui

$$P_i = \int_{\Omega} b^T w_i dV + \int_{\partial \Omega_F} f w_i dS \quad (41)$$

e' la i -esima forza generalizzata o carico modale, e rappresenta il lavoro compiuto dalle forze di volume b e di superficie f nello spostamento descritto dall' i -esima autofunzione.

Si noti che i termini della serie (40) sono inversamente proporzionali alle differenze $\lambda_i - \lambda$, cosicche' i termini prevalenti sono quelli associati agli

autovalori λ_i piu' vicini al carico λ . Ordinati gli autovalori in modo crescente $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, per $\lambda < \lambda_1 = \lambda_c$, i termini della serie tendono rapidamente a zero (se i carichi modali sono tutti dello stesso ordine di grandezza) ed e' quindi sufficiente considerare solo i primi termini.

Un metodo approssimato per stimare la soluzione e' il seguente. Dalla (40) si effettua la maggiorazione

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} \frac{P_i w_i(x)}{\lambda_i} \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}} w_1(x) \quad (42)$$

in cui $w_1(x) = \sum P_i w_i(x) / \lambda_i$ e' la soluzione corrispondente a $\lambda = 0$ e quindi e' la soluzione del problema lineare (o del primo ordine). $w(x)$ puo' percio' essere approssimativamente espressa moltiplicando $w_1(x)$ per il fattore di amplificazione $1 / (1 - \lambda / \lambda_c)$, gia' incontrato nell'esempio del pendolo rovescio. Poiche' deformazioni e tensioni sono proporzionali ad $w(x)$, tutta la soluzione del problema elastico lineare e' amplificata dello stesso fattore. Il metodo approssimato e' molto semplice in quanto richiede la determinazione del solo carico critico (che puo', nella stessa ottica, essere calcolato approssimativamente) e non richiede la soluzione dell'intero problema agli autovalori; inoltre il metodo e' in favore di sicurezza, in quanto sovrastima spostamenti e tensioni.

Nel seguito si mostrano alcune applicazioni relative a travi e piastre compresse.

9.5.1 Trave compressa

Si consideri una trave indeformabile a taglio, uniformemente compressa da una forza assiale di presolliecitazione d'intensita' $P = \lambda P_0$ e da forze incrementali $P(x)$ normali all'asse (fig. 66).

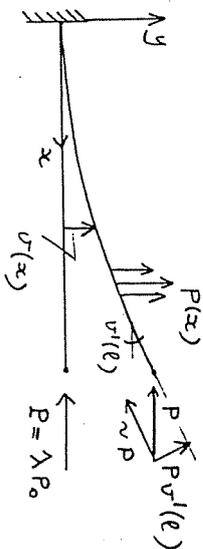


fig. 66

Tenendo conto dei soli spostamenti trasversali $v(x)$, l'energia potenziale totale (19) nella configurazione variata e'

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EI v''^2 - P v'^2) dx - \int_0^l P v dx \quad (43)$$

Nella (43) il primo termine a secondo membro e' l'energia potenziale elastica della teoria lineare ed il secondo e' l'energia di presolliecitazione che coincide, a meno del segno, con quella del filo teso (eq.(24)). Imponendo la stazionarieta' di V si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^l (EI v'' \delta v'' - P v' \delta v') dx - \int_0^l P \delta v dx = \\ &= \int_0^l (EI v''' + P v'' - P) \delta v dx + [EI v'' \delta v' - (EI v''' + P v'') \delta v]_0^l = 0 \\ &V \delta v \quad (44) \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$EI v'''' + P v'' = P \quad (45)$$

$$[EI v'' \delta v']_0^l = 0, \quad -[EI v''' + P v'] \delta v \Big|_0^l = 0$$

Le (45) esprimono l'equilibrio nella configurazione variata; da esse si vede che le forze incrementali $P(x)$ sono equilibrate, oltre che dalle forze elastiche note dalla teoria lineare della trave, anche dalle forze geometriche che caratterizzano il comportamento meccanico del filo presolliecitato. Le equazioni sono del tipo (20): l'operatore elastico e' $L = EI d^4/dx^4$, l'operatore geometrico e' $G = -P_0 d^2/dx^2$ e le condizioni al contorno, da specificarsi caso per caso, possono oppure no dipendere dall'autovalore $P = \lambda P_0$. Ad esempio, per una trave appoggiata e'

$$\begin{aligned} v(0) &= v(l) = 0 \\ EI v''(0) &= EI v''(l) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

e le condizioni sono indipendenti da P ; per una mensola incastrata in $x=0$ e' invece

$$\begin{aligned} v(0) &= v'(0) = 0 \\ EI v''(l) &= 0, \quad -EI v'''(l) - P v'(l) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

in cui, in particolare, la quarta equazione esprime la condizione che il taglio $T(l) = -EI v'''(l)$ nella configurazione variata uguagli la componente di P normale alla linea d'asse (fig. 66).



Si noti come, già osservato a proposito del problema lineare, che poiché la trave è internamente vincolata, le condizioni al contorno differiscono leggermente dalle (20); ad esempio per la mensola sono del tipo

$$\begin{aligned} B_i v - \lambda H_i v &= 0 & (i=1,2) & \text{su } \partial \mathcal{F} \\ B_i v &= 0 & (i=3,4) & \text{su } \partial \mathcal{A} \end{aligned} \quad (48)$$

dove

$$\begin{aligned} B_1 &= EI \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_{x=\ell}, & B_2 &= -EI \left(\frac{d^3}{dx^3} \right)_{x=\ell} \\ H_1 &= 0, & H_2 &= P_0 \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=\ell}, & B_3 &= 1, & B_4 &= \left(\frac{d}{dx} \right)_{x=0} \end{aligned} \quad (49)$$

Di questa struttura delle condizioni al contorno si deve tenere conto quando si scrivono le condizioni di ortogonalità (37) o il rapporto di Rayleigh (38). Ad esempio, per quest'ultimo, facendo riferimento alla forma (38'), si ha

$$\lambda_c = \frac{\int_0^\ell EI v_c''^2 dx}{\int_0^\ell \frac{1}{2} P_0 v_c'^2 dx} \quad (50)$$

da cui integrando per parti ed imponendo le condizioni geometriche si ottiene

$$\lambda_c = \frac{\int_0^\ell v_c EI v_c'''' dx + [v_c' EI v_c'' - v_c EI v_c''']_{x=\ell}}{-\int_0^\ell P_0 v_c'' dx + [v_c P_0 v_c']_{x=\ell}} \quad (51)$$

Questa espressione è del tipo (38), in cui i termini al contorno esprimono il lavoro virtuale compiuto dal momento flettente e dalle reazioni di taglio (elastica e geometrica) in $x=\ell$ nei corrispondenti spostamenti v_c' e v_c .

a) Problema omogeneo

Per risolvere le (45) si analizza prima il problema omogeneo $P=0$. Posta la soluzione del tipo $e^{\alpha x}$ si ottiene l'equazione caratteristica

$$EI \alpha^4 + P \alpha^2 = 0 \quad (52)$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_1 = -i\beta, \quad \alpha_2 = i\beta, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0 \quad (53)$$

In cui

$$\beta = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (54)$$

L'integrale generale è pertanto:

$$v = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 x + c_4 \quad (55)$$

dove c_i ($i=1, \dots, 4$) sono costanti arbitrarie. Le condizioni al contorno conducono ad un sistema lineare omogeneo di equazioni algebriche nelle costanti arbitrarie c_i ; imponendo che il determinante dei coefficienti sia nullo si ricavano gli autovalori β (e quindi P). Ad esempio, nel caso della trave appoggiata, imponendo le condizioni (46) si ha

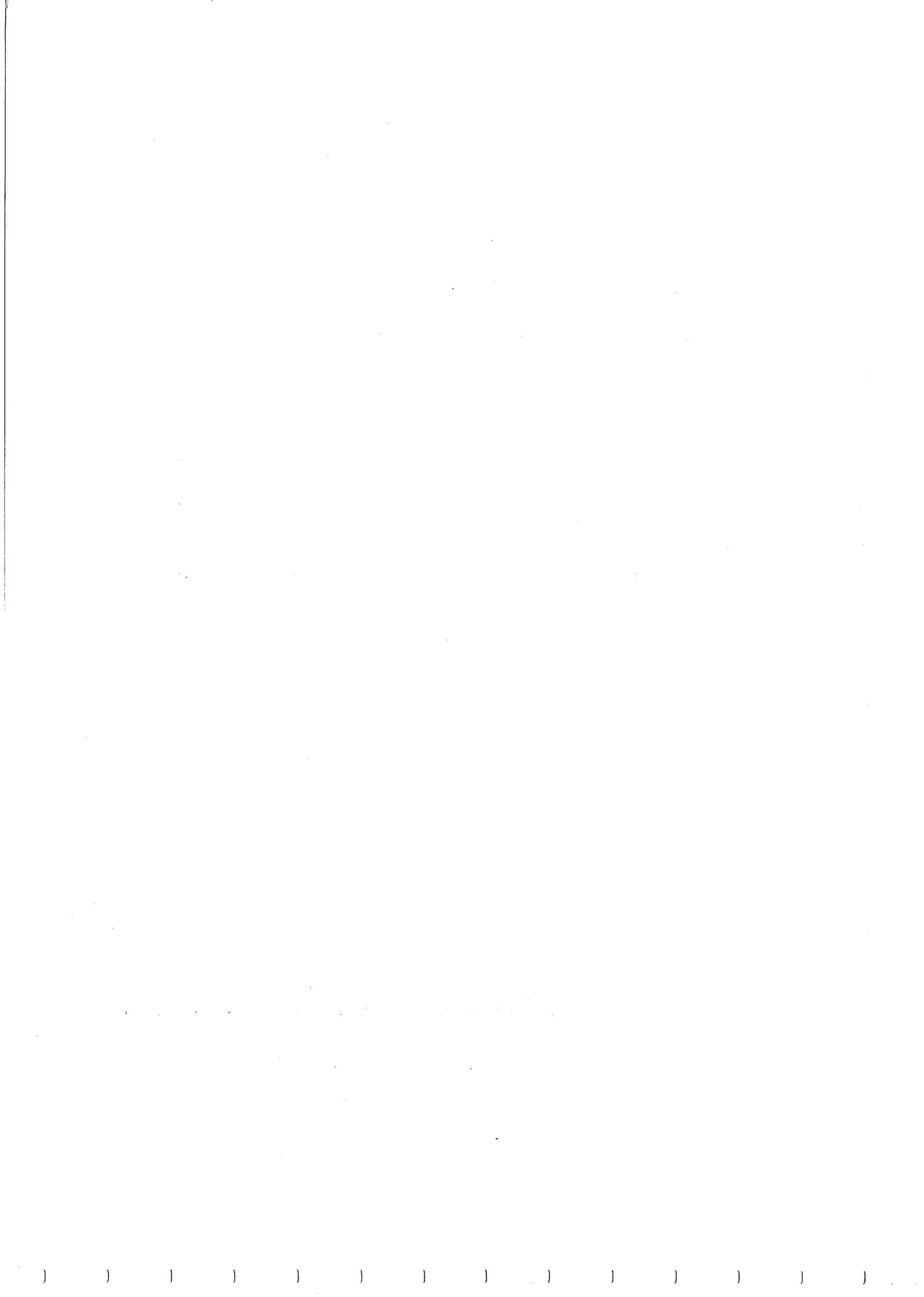
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \beta \ell & \sin \beta \ell & \ell & 1 \\ -\cos \beta \ell & -\sin \beta \ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Sviluppando il determinante dei coefficienti e ponendolo uguale a zero si ottiene un'equazione trascendente in β

$$\sin \beta \ell = 0 \quad (57)$$

che ammette infinite soluzioni

$$\beta_k = \frac{k\pi}{\ell} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (58)$$



da cui si determinano gli autovalori (eq.(54))

$$P_k = k^2 \frac{\pi^2 EI}{\varrho^2} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (59)$$

In corrispondenza di $P = P_k$ il sistema (56) fornisce la soluzione

$$C_1 = 0, \quad C_2 = Y, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \quad (60)$$

cosicche' le autofunzioni risultano (eq.(55))

$$v_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{\varrho} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (61)$$

dove C_2 puo' eventualmente essere determinata imponendo una condizione di normalizzazione. Dalle note proprieta' di ortogonalita' delle funzioni sinusoidali si riconosce immediatamente che le condizioni (37) sono soddisfatte.

Il carico critico, corrispondente al piu' piccolo autovalore, si ottiene ponendo $n=1$ nella (59)

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\varrho^2} \quad (62)$$

vincolo	P_c	vincolo	P_c
	$\frac{\pi^2 EI}{\varrho^2}$		$2.05 \frac{\pi^2 EI}{\varrho^2}$
	$\frac{\pi^2 EI}{4\varrho^2}$		$\frac{\pi^2 EI}{4\varrho^2}$
	$\frac{4\pi^2 EI}{\varrho^2}$		$\frac{\pi^2 EI}{\varrho^2}$

e nel caso specifico (trave appoggiata) e' detto carico critico Euleriano; il corrispondente modo critico e' una sinusoida di periodo 2ϱ .

Applicando il procedimento ora illustrato a travi con diverse condizioni di vincolo si trovano i risultati riportati in tabella.

Come esempio di calcolo approssimato del carico critico si applichi il rapporto di Rayleigh (50) ad una mensola. Dovendo rispettare le condizioni geometriche (47_{1,2}) si puo' ad esempio assumere $v_c(x) = x^2$; risulta percio'

$$P_c = \frac{\int_0^{\varrho} EI v_c''^2 dx}{\int_0^{\varrho} v_c'^2 dx} = \frac{3EI}{\varrho^2}$$

con un'approssimazione per eccesso sul valore esatto di circa il 22%. L'uso di questo procedimento di calcolo e' particolarmente vantaggioso nel caso di travi a sezione variabile, dove l'integrazione dell'equazione a coefficienti variabili risulta di solito molto difficile.

b) Problema non omogeneo

Con riferimento alla trave appoggiata si passi ora a considerare il problema non omogeneo. Volendo applicare la (40) e' necessario prima normalizzare le autofunzioni secondo le (37). Posto allora $P_0=1$ (e quindi $\lambda=P$), essendo $G \equiv -d^2/dx^2$, $H \equiv 0$ la (37₂) si scrive

$$-\int_0^{\varrho} v_k(x) v_k''(x) dx = 1 \quad (63)$$

da cui, sostituendo la (61), si ricava $C_2 = \sqrt{2\varrho} / (k\pi)$; lo stesso risultato si ottiene dalla (37₁). Le autofunzioni normalizzate sono pertanto:



$$v_k(x) = \frac{\sqrt{2\ell}}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (64)$$

e i carichi modali (41) risultano:

$$P_k = \frac{\sqrt{2\ell}}{k\pi} \int_0^\ell P(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (k=1, 2, \dots) \quad (65)$$

La (40) si scrive perciò:

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\ell}{k^2\pi^2} \frac{1}{k^2\pi^2 EI - P} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \int_0^\ell P(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (66)$$

dalla quale, per derivazione, si calcolano le sollecitazioni $M(x) = EI v''(x)$ e $T(x) = -EI v'''(x)$.

Se la trave compressa non e' rettilinea ma e' leggermente curva, si puo' considerare la deformata iniziale $\bar{v}(x)$ come imperfezione iniziale (vedi par.1.8). L'imperfezione corrisponde ad una deformazione imposta $\bar{v}(x) = \bar{v}'''(x)$ che da' luogo (eq.(1.39)) a forze equivalenti all'imperfezione

$$\bar{P}(x) = EI \bar{v}'''(x)$$

essendo $D^4 \bar{v} = d^4 \bar{v} / dx^4$, $C \equiv EI$. Sostituendo $\bar{P}(x)$ a $P(x)$ nella (66) si ottiene la soluzione $v(x)$; lo stato di tensione si calcola poi con la (1.36):

$$M(x) = EI (v''(x) - \bar{v}''(x))$$

$$T(x) = EI (v'''(x) - \bar{v}'''(x))$$

9.5.2 Piastra compressa

Si consideri una piastra indeformabile a taglio che nello stato di presollecitazione sia sottoposta a soli sforzi di membrana N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 costanti nel dominio; sulla piastra agiscono inoltre forze incrementali $P(x, y)$ normali al piano. L'energia potenziale totale (19) si

ottiene sommando all'energia potenziale totale della piastra della teoria lineare (eq.(6.38)) l'energia di presollecitazione. Poiche' le componenti del secondo ordine della deformazione sono espresse dalle (31) si ha, tenendo conto dei soli spostamenti trasversali $w(x, y)$

$$V = \frac{D_f}{2} \int_{\mathcal{D}} [w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\gamma w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\gamma) w_{,xy}^2] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} (N_x^0 w_{,x}^2 + N_y^0 w_{,y}^2 + 2 N_{xy}^0 w_{,x} w_{,y}) dx dy - \int_{\mathcal{D}} P w dx dy \quad (67)$$

Imponendo la stazionarieta' si ottiene l'equazione differenziale

$$D_f \nabla^4 w - N_x^0 w_{,xx} - N_y^0 w_{,yy} - 2 N_{xy}^0 w_{,xy} = P \quad (68)$$

piu' condizioni al contorno che non vengono qui riportate. Si noti, come gia' osservato a proposito della trave presollecitata, che l'equazione di equilibrio (68) si puo' anche ottenere dall'equazione della piastra inflessa (teoria lineare, eq.(6.31)) sommando i termini relativi all'equilibrio della membrana.

Se le forze di presollecitazione crescono proporzionalmente ad un parametro λ , $N_x^0 = \lambda \bar{N}_x^0$, $N_y^0 = \lambda \bar{N}_y^0$, $N_{xy}^0 = \lambda \bar{N}_{xy}^0$ la (68) puo' porsi nella forma (20) in cui gli operatori elastico e geometrico sono rispettivamente:

$$L = D_f \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right)$$

$$G = \bar{N}_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \bar{N}_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (69)$$



Posto ora $P(x,y)=0$ si risolve la (68) per il semplice sistema illustrato in fig.67, costituito da una piastra rettangolare appoggiata al contorno, uniformemente compressa in direzione x .

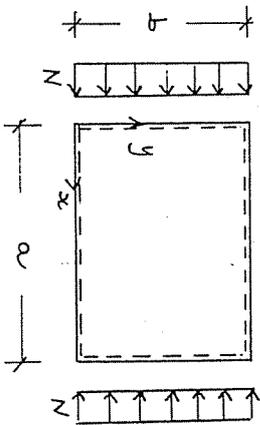


fig. 67

Poiche' risulta $N_x^0 = -N$, $N_y^0 = 0$, $N_{xy}^0 = 0$, l'equazione (68) si scrive

$$D_f \nabla^4 w + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (70)$$

mentre le condizioni al contorno risultano $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$. La funzione

$$w(x,y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (71)$$

con n e m interi qualsiasi soddisfa identicamente le condizioni ai limiti; inoltre l'equazione (70) e' soddisfatta se N assume uno degli ∞^2 valori

$$N = D_f \left(\frac{\alpha}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (72)$$

che corrispondono a scelte arbitrarie dei numeri d'onda n ed m . Per ottenere il carico critico e' necessario percio' minimizzare N rispetto ai due interi. Si osserva subito

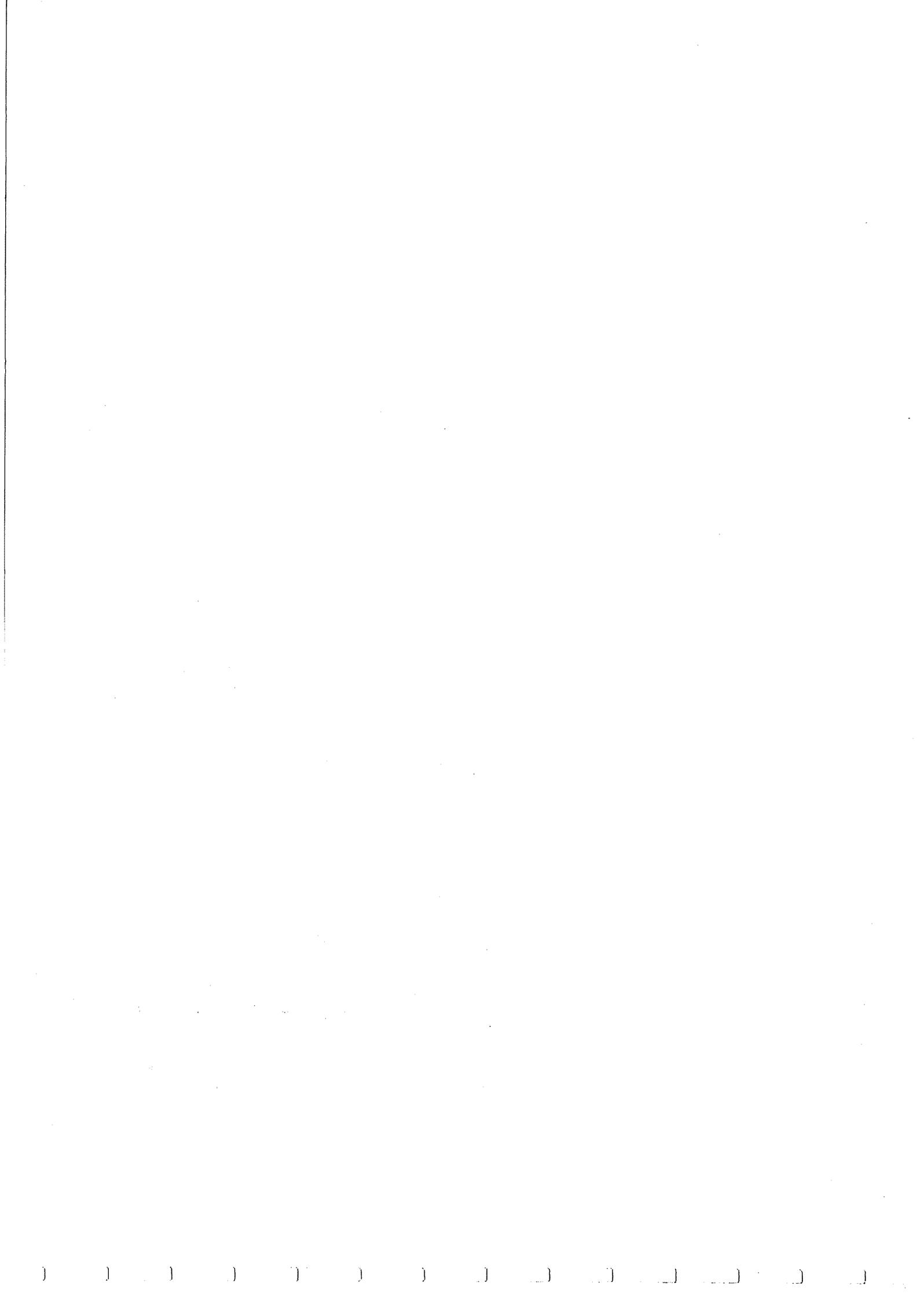
che, poiche' N cresce con n , deve essere $n=1$, cioe' la piastra si inflette sempre con una sola semionda in direzione y . La (72) si scrive:

$$N = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \frac{\pi^2 D_f}{b^2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (73)$$

Il valore di m che rende minimo N (e quindi il numero delle semionde del modo critico in direzione x) e' invece funzione del rapporto tra i lati a/b e va determinato per tentativi. Se, procedendo in maniera approssimata, si assume m come variabile continua, anziche' discreta, e si annulla la derivata dN/dm si ottiene $m = a/b$, da cui

$$N_c \approx 4 \frac{\pi^2 D_f}{b^2} \quad (74)$$

Si puo' dimostrare che l'espressione (74) e' esatta se a/b e' un intero; in tal caso la piastra si inflette in campi quadrati. In caso contrario la (74) e' un'approssimazione per difetto del carico critico, praticamente esatta se la piastra e' lunga ($a/b > 4$).



10. ELEMENTI DI DINAMICA DEI CONTINUI ELASTICI

10.1 Introduzione

Il problema elastico illustrato nei capitoli precedenti è stato formulato e risolto nell'ipotesi che tutte le grandezze che intervengono nella descrizione del fenomeno meccanico siano indipendenti dal tempo. Cio' si verifica con buona approssimazione quando le azioni esercitate dall'ambiente sul sistema, cioè le forze e gli spostamenti imposti al contorno, sono in primo luogo indipendenti dal tempo ed in secondo luogo sono applicate al corpo in un tempo molto lungo, in modo tale da non generare apprezzabili forze d'inerzia. In queste condizioni la configurazione finale è raggiunta dal sistema attraverso una successione di stati equilibrati in cui le forze interne elastiche (ed eventualmente geometriche) equilibrano le sole forze esterne attive e le reazioni vincolari; il problema è detto elastostatico.

Tuttavia, quando le forze attive dipendono esplicitamente dal tempo, ovvero si mantengono costanti dopo essere cresciute rapidamente dallo zero, agli spostamenti del corpo sono associate delle accelerazioni e quindi delle forze d'inerzia. Le forze elastiche devono in questo caso equilibrare non solo le forze applicate ma anche le forze d'inerzia cosicché tutte le grandezze variano con il tempo; il problema è detto elastodinamico. Risolvere il problema elastodinamico vuol dire determinare la dipendenza dallo

spazio e dal tempo del campo di spostamenti, di deformazioni e tensioni del sistema.

La formulazione e la soluzione del problema dinamico aprono una serie di problematiche molto ampie, relative alla modellazione del sistema e ai metodi di calcolo, che trovano giusta collocazione nei corsi di Dinamica delle Strutture. Qui si vogliono fornire solo alcuni elementi, con riferimento ai sistemi continui, atti ad illustrare la fenomenologia e ad indicare i principali metodi di analisi. La trattazione è limitata allo studio dei soli sistemi conservativi e non prende in considerazione gli effetti dovuti allo smorzamento.

10.2 Equazioni del moto

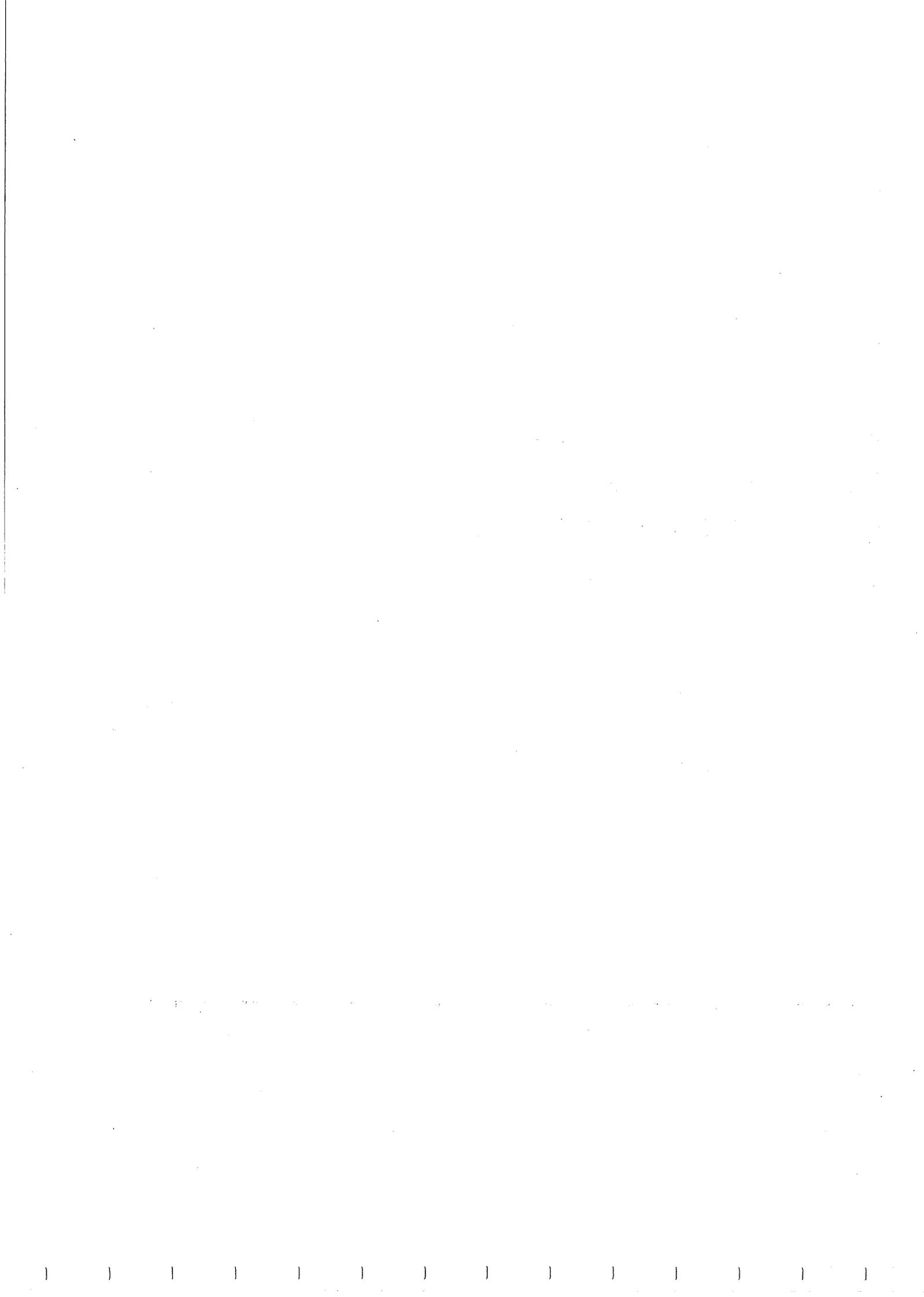
Le equazioni del moto di un sistema dinamico possono essere ottenute secondo uno dei seguenti metodi:

- a) formulazione diretta (principio di D'Alembert);
- b) formulazione variazionale (principio di Hamilton).

Il principio di D'Alembert permette di scrivere le equazioni del moto come equazioni di equilibrio dinamico semplicemente sommando alle forze esterne, $b(x, t)$ le forze d'inerzia

$$b^I(x, t) = -M \ddot{u}(x, t) \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (1)$$

Nella (1) $\ddot{u}(x, t)$ è l'accelerazione, derivata seconda rispetto al tempo t dello spostamento $u(x, t)$, ed M è un operatore differenziale lineare che prende il nome di



operatore d'inertzia, o di massa. In molti casi, tuttavia, M si riduce ad un operatore algebrico, spesso diagonale. Ad esempio nel continuo tridimensionale le forze d'inertzia sono $b_i^T = -\rho(x) \ddot{u}_i$ ($i=1,2,3$) dove $\rho(x)$ e' la densita' di massa e quindi M e' algebrico e diagonale. Nella trave deformabile a taglio le forze d'inertzia, traslatoria e rotatoria, sono rispettivamente uguali a $-m \ddot{u}$, $-m \ddot{v}$ e $J \ddot{\varphi}$, dove m e' la densita' lineare di massa ed J il momento d'inertzia di massa della sezione trasversale. L'operatore M e' in tal caso ancora algebrico, diagonale, con coefficienti di massa non tutti uguali; se pero' la trave e' indeformabile a taglio l'inertzia rotatoria si scrive $-J \ddot{v}'$ ed M e' un operatore e' differenziale. Nel caso infine di sistemi discreti, quali ad esempio quelli costituiti da corpi rigidi vincolati elasticamente, M e' generalmente rappresentato da una matrice piena.

La presenza di forze d'inertzia va naturalmente tenuta in conto anche nella scrittura delle condizioni ai limiti il che si verifica quando nel sistema sono presenti masse concentrate al contorno. In tal caso le forze d'inertzia corrispondenti si scrivono:

$$f^I(x, t) = -Q \ddot{u}(x, t) \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (2)$$

dove Q e' un operatore differenziale, detto operatore d'inertzia al contorno.

Considerate le forze $b^I(x, t)$ ed $f^I(x, t)$, le equazioni di equilibrio in termini di spostamento (1.13) e le

condizioni geometriche al contorno (1.12) si modificano come segue (+)

$$\begin{aligned} M \ddot{u} + L u &= b & \text{in } \mathcal{D} \\ Q \ddot{u} + B u &= f & \text{su } \partial \mathcal{D}_f \\ u &= \bar{u} & \text{su } \partial \mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (3)$$

in cui tutte le grandezze sono funzione di x e di t . Le (3) vanno integrate con le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (4)$$

che specificano la posizione e la velocita' dei punti materiali del sistema al tempo zero. Determinata $u(x, t)$, la soluzione del problema elastodinamico e' completata dal calcolo delle deformazioni $\varepsilon(x, t) = D u(x, t)$ e delle tensioni $\sigma(x, t) = C \varepsilon(x, t)$.

Le equazioni del moto (3) possono anche essere ottenute seguendo la formulazione variazionale, applicando il principio di Hamilton. Esso afferma che il moto di un sistema dinamico sottoposto a forze conservative rende stazionario il funzionale

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (5)$$

rispetto a tutti i moti cinematicamente ammissibili che conducono il sistema dalla posizione iniziale a quella

(+) Se il sistema e' presollecitato l'operatore geometrico G si intende conglobato in L .



finale nello stesso intervallo di tempo $[t_1, t_2]$. Nella

(5) H e' l'Hamiltoniano del sistema, T e' l'energia cinetica e V l'energia potenziale totale. Assegnate le posizioni in t_1 e t_2 , la condizione di stazionarieta'

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (6)$$

fornisce le equazioni del moto (3). Si noti che il principio variazionale appare come una generalizzazione al caso dinamico del principio della minima energia potenziale totale, valido in elastostatica; in particolare la variazione dell'energia cinetica da' luogo alle forze d'inerzia che si sommano alle forze attive e a quelle elastiche nelle equazioni di equilibrio. Poiche' M deriva dalla stazionarieta' del funzionale T , risulta essere un operatore autoaggiunto.

Il principio di Hamilton costituisce una base per lo sviluppo di modelli discreti, attraverso la stessa tecnica descritta per il caso statico con riferimento all'energia potenziale totale (cap.8). Applicando il metodo di Ritz o quello degli elementi finiti le equazioni del moto (3) possono scriversi in forma discreta

$$M \ddot{q} + K q = P \quad (7)$$

in cui M e' la matrice di massa e K quella di rigidizza, P il vettore della forze generalizzate e q quello dei

parametri lagrangiani. La deduzione delle equazioni (7) a partire dalle (3) non verra' esaminata in questa sede.

10.3 Moto libero

Per risolvere il problema non omogeneo (3)-(4) e' opportuno analizzare prima il problema omogeneo associato

$$\begin{aligned} M \ddot{u} + L u &= 0 & \text{in } \mathcal{D} \\ Q \ddot{u} + B u &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_f \\ u &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_w \end{aligned} \quad (8)$$

Le equazioni (8) con le condizioni iniziali (4) governano il moto di un sistema elastico in assenza di forze e spostamenti impressi, conseguente ad uno spostamento e' ad un atto di moto assegnati al tempo zero; il moto e' percio' detto libero.

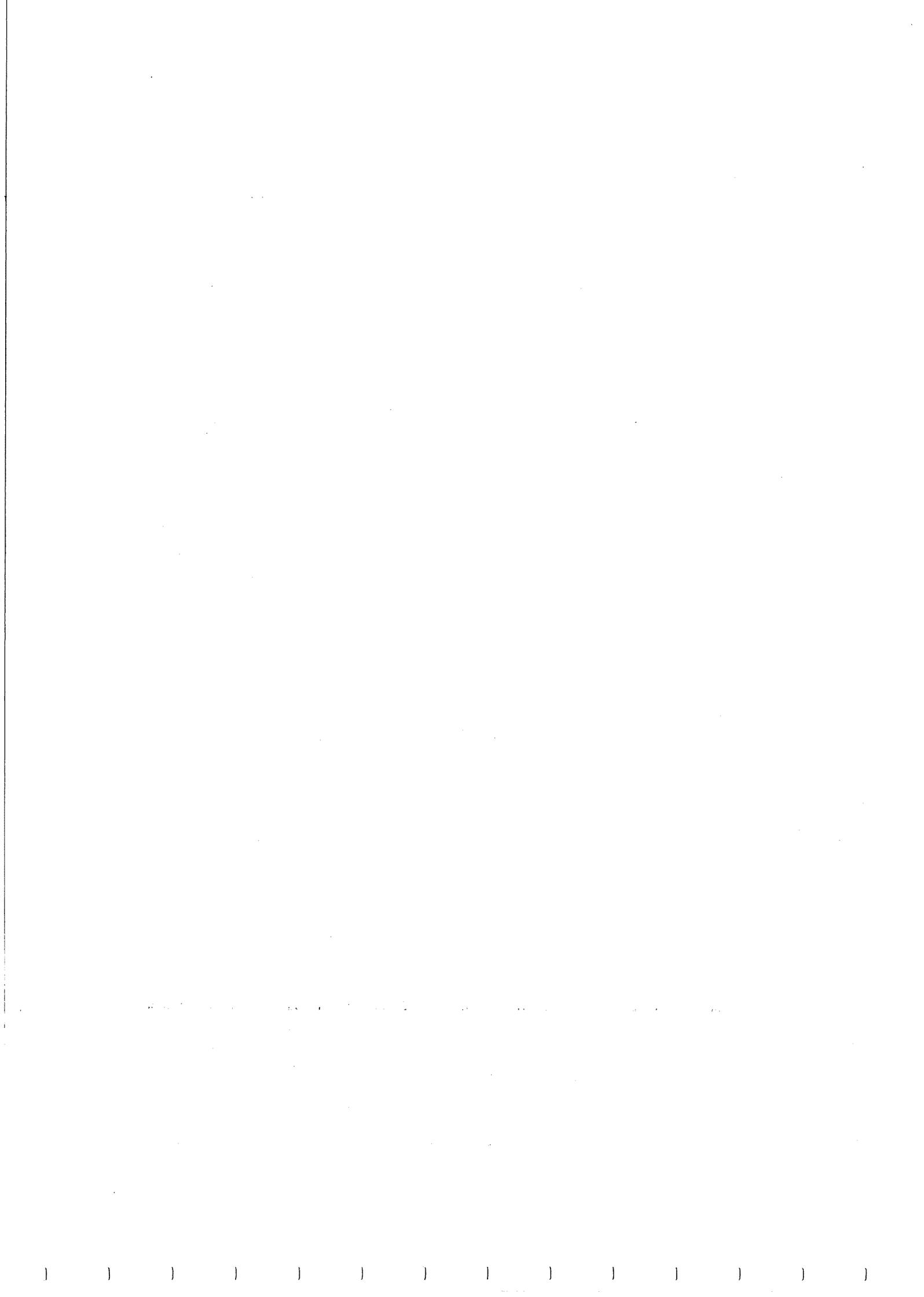
Il problema (8) ammette come integrale particolare la soluzione a variabili separate

$$u(x, t) = \phi(x) e^{i\omega t} \quad (9)$$

dove $\phi(x)$ e' soluzione del problema d'autovalori (+)

$$\begin{aligned} L \phi - \lambda H \phi &= 0 & \text{in } \mathcal{D} \\ B \phi - \lambda Q \phi &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_f \\ \phi &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_w \end{aligned} \quad (10)$$

(+) Si noti l'analogia con il problema di biforcazione dell'equilibrio (9.36).



in cui e'

$$\lambda = \omega^2 \quad (11)$$

Poiche' L ed M sono autoaggiunti λ e' reale; la soluzione (9) descrive allora un moto armonico se λ e' positivo ed un moto esponenzialmente crescente o decrescente se λ e' negativo. Se si introduce l'ipotesi che L ed M siano non negativi (+) gli autovalori λ risultano positivi o tutt'alpiu' nulli, cosicche' si puo' escludere il moto di tipo esponenziale.

Durante il moto armonico (9) tutti i punti materiali oscillano con la stessa frequenza circolare (o pulsazione) $\omega = \sqrt{\lambda}$ e la deformata del sistema resta immutata nella forma (ma non nell'ampiezza) descritta dall'autofunzione $\phi(x)$. Queste forme particolari sono dette modi naturali di vibrazione del sistema e le pulsazioni ω sono dette frequenze naturali, o proprie.

La soluzione del problema agli autovalori (10) consiste in una sequenza di infiniti autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e corrispondenti autofunzioni ϕ_1, ϕ_2, \dots , che, normalizzate, soddisfano le condizioni di ortonormalizzazione (vedi Appendice)

(+) L'energia cinetica e' infatti positiva, o al piu' nulla se a certi gradi di liberta' e' associata massa nulla; analogamente l'energia elastica e' positiva o al piu' nulla se il sistema e' presolllecitato da uno stato di tensione pari a quello critico, ovvero se il sistema e' labile.

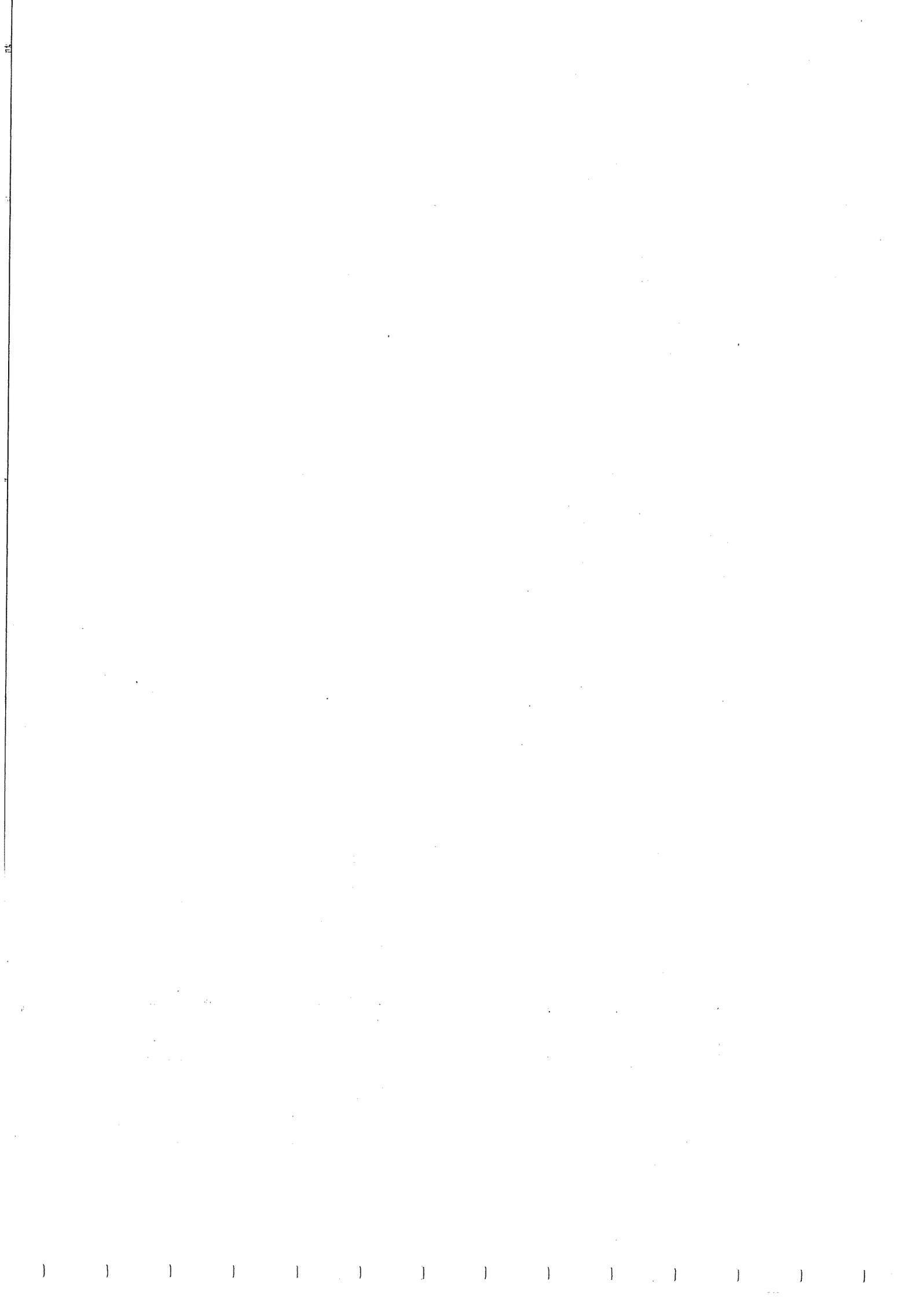
$$\int_{\mathcal{D}} \phi_j^T L \phi_i dV + \int_{\mathcal{S}} \phi_j^T B \phi_i dS = \lambda_i \delta_{ij} \\ \int_{\mathcal{D}} \phi_j^T M \phi_i dV + \int_{\mathcal{S}} \phi_j^T Q \phi_i dS = \delta_{ij} \quad (12)$$

Se, come caso particolare, non sono presenti masse concentrate al contorno, gli integrali in (12) estesi alla frontiera del dominio risultano essere uguali a zero. Le condizioni di ortogonalita' godono di un'interpretazione meccanica del tutto analoga a quella data nel cap. 9 a proposito dei modi di biforcazione, cioe' stabiliscono che le forze elastiche e le forze d'inerzia associate ad un modo di una certa frequenza compiono lavoro virtuale nullo nei modi di diversa frequenza. Se due o piu' modi hanno la medesima frequenza (autovalore multiplo) e' sempre possibile rendere ortogonali i modi combinandoli linearmente in maniera opportuna.

La soluzione generale delle (8) si ottiene come combinazione lineare delle infinite soluzioni particolari (9) corrispondenti ai diversi autovalori. Considerando sia la parte reale che quella immaginaria della (9) si ha

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \phi_k(x) \quad (13)$$

dove a_k e b_k sono costanti arbitrarie. Per determinarle e' necessario far uso delle condizioni iniziali (4), che si scrivono



$$\sum_k a_k \phi_k(x) = u_0(x) \quad (14)$$

$$\sum_k b_k \omega_k \phi_k(x) = \dot{u}_0(x)$$

valide sia in \mathcal{D} che su $\partial\mathcal{D}_f$ (su $\partial\mathcal{D}_u$ sono identicamente nulle). Applicando alle equazioni in \mathcal{D} l'operatore M e a quello su $\partial\mathcal{D}_f$ l'operatore Q , premoltiplicando per la generica autofunzione ϕ_h^T , integrando e sommando, si ottiene:

$$\sum_k a_k \left[\int_{\mathcal{D}} \phi_h^T M \phi_k dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_h^T Q \phi_k dS \right] = \int_{\mathcal{D}} \phi_h^T M u_0 dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_h^T Q u_0 dS \quad (15)$$

$$\sum_k b_k \omega_k \left[\int_{\mathcal{D}} \phi_h^T M \phi_k dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_h^T Q \phi_k dS \right] = \int_{\mathcal{D}} \phi_h^T M \dot{u}_0 dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_h^T Q \dot{u}_0 dS$$

Tenuto conto delle condizioni (12) si ricava:

$$a_k = \int_{\mathcal{D}} \phi_k^T M u_0 dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_k^T Q u_0 dS \quad (16)$$

$$b_k = \frac{1}{\omega_k} \left[\int_{\mathcal{D}} \phi_k^T M \dot{u}_0 dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_k^T Q \dot{u}_0 dS \right]$$

dove i termini noti u_0 ed \dot{u}_0 possono eventualmente essere scambiati con ϕ_k , essendo M autoaggiunto. Si noti che se $u_0 = \alpha \phi_j'$ e $\dot{u}_0 = \beta \phi_j'$, con α e β scalari, solo le ampiezze a_j e b_j sono diverse da zero; le particolari condizioni iniziali eccitano cioè solo il j -esimo modo e il sistema oscilla con frequenza ω_j mantenendo immutata nel tempo la forma della deformata iniziale. Se invece le condizioni iniziali sono una combinazione lineare di

particolari m modi, solo quei modi vengono eccitati ed il sistema oscilla secondo una sovrapposizione di m modi armonici di diverse frequenze mutando nel tempo la forma secondo una legge non periodica.

Per concludere, ancora in analogia con il problema di biforcazione dell'equilibrio, si può definire in dinamica un rapporto di Rayleigh:

$$\omega_k^2 = \frac{\int_{\mathcal{D}} \phi_k^T L \phi_k dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_k^T B \phi_k dS}{\int_{\mathcal{D}} \phi_k^T M \phi_k dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} \phi_k^T Q \phi_k dS} \quad (17)$$

che gode della proprietà di essere stazionario in corrispondenza di ciascuna autofunzione. Scegliendo una funzione di forma "vicina" al k -esimo modo, il rapporto (17) fornisce una stima della k -esima frequenza.

10.4 Moto forzato. Analisi modale

Si studia ora il moto generato dall'applicazione di forze di volume e di superficie variabili nel tempo. La legge temporale delle forze è detta forzante e il moto corrispondente, o risposta, è detto moto forzato. Si considerano dapprima condizioni al contorno geometriche indipendenti dal tempo (in particolare omogenee, eventualmente effettuando un cambio di variabile), rimandando ad una fase successiva lo studio degli effetti dovuti agli spostamenti impressi. Le equazioni del moto (3) si scrivono allora

$$\begin{aligned} M \ddot{u} + L u &= b & \text{in } \mathcal{D} \\ Q \ddot{u} + B u &= f & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ u &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (18)$$



Prima di affrontare lo studio del moto prodotto da una forzante generica si considerano forze variabili nel tempo con legge periodica.

a) Forzante periodica

Si consideri dapprima il caso particolare notevole di forzante sinusoidale di pulsazione Ω :

$$b(x, t) = b(x) \cos \Omega t$$

(19)

$$f(x, t) = f(x) \cos \Omega t$$

Una soluzione particolare delle (18) può essere ottenuta nella forma a variabili separate

$$u_p(x, t) = u(x) \cos \Omega t$$

dove $u(x)$ va determinata risolvendo il problema (+)

$$L u(x) - \Omega^2 M u(x) = b(x) \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$B u(x) - \Omega^2 Q u(x) = f(x) \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (20)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u$$

Le (20) sono equazioni differenziali non omogenee in cui appaiono solo funzioni di x ; possono essere risolte esattamente oppure attraverso uno sviluppo in serie delle autofunzioni del problema omogeneo (vedi Appendice):

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{\omega_i^2 - \Omega^2} \phi_i(x) \quad (21)$$

(+) Si noti l'analogia con le equazioni (9.20) relative alla statica dei corpi presollecitati.

dove P_i e' la i-esima forza generalizzata pari al lavoro virtuale compiuto da $b(x)$ ed $f(x)$ nell'i-esima autofunzione:

$$P_i = \int_{\mathcal{D}} \phi_i^T b \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} \phi_i^T f \, dS \quad (22)$$

La soluzione generale delle equazioni del moto (18) si ottiene sommando ad $u_p(x, t)$ la legge del moto libero (13) (soluzione generale del problema omogeneo):

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \cos \omega_i t + \beta_i \sin \omega_i t) \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{\omega_i^2} \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2}}{\omega_i^2} \phi_i(x) \cos \Omega t \quad (23)$$

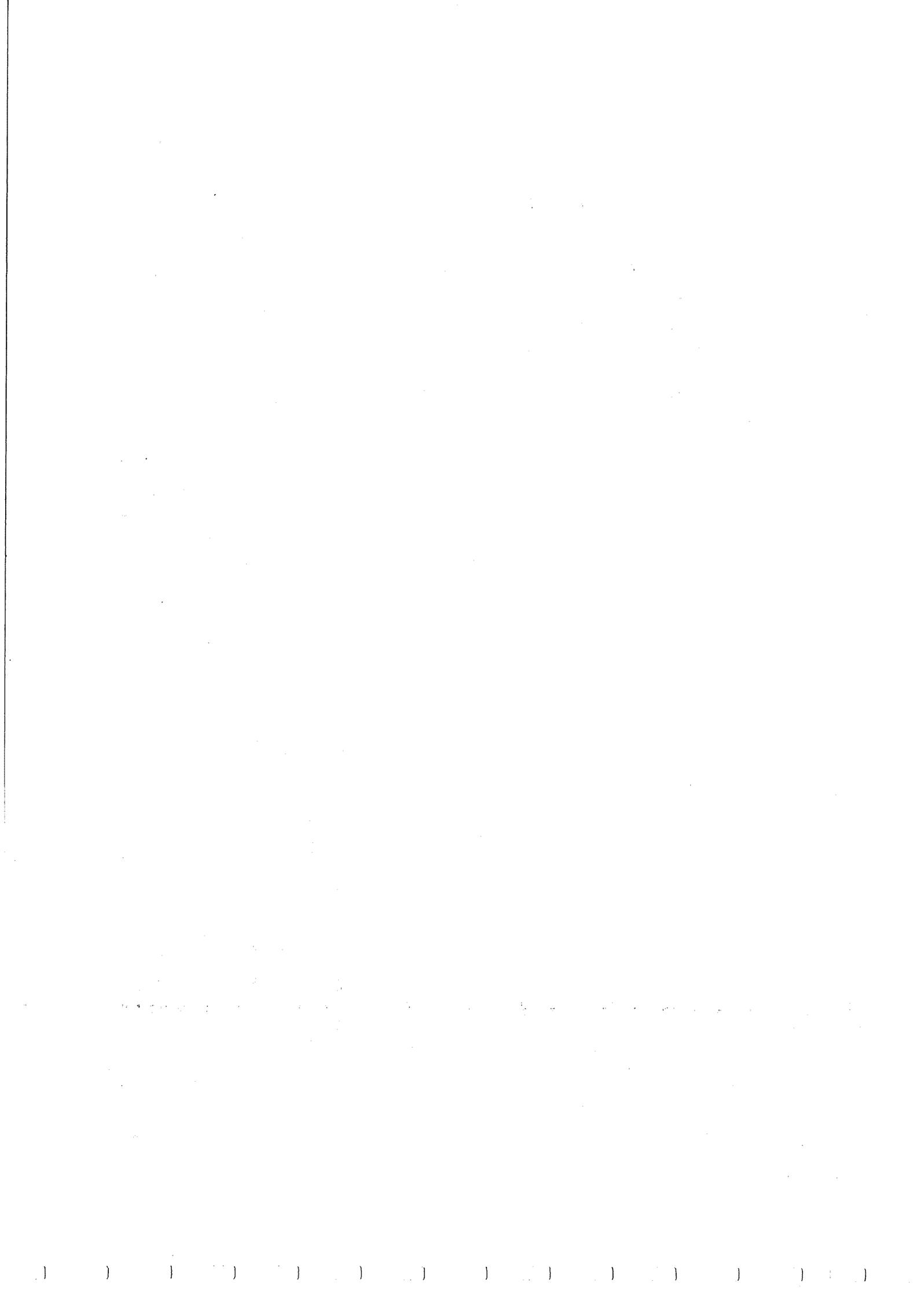
Le costanti α_i , β_i si determinano imponendo le condizioni iniziali (4); operando con la tecnica gia' illustrata a proposito del moto libero si ottiene:

$$\alpha_i = \int_{\mathcal{D}} \phi_i^T M (u_0 - u_{p0}) \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} \phi_i^T Q (u_0 - u_{p0}) \, dS \quad (24)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\omega_i} \left[\int_{\mathcal{D}} \phi_i^T M (\dot{u}_0 - \dot{u}_{p0}) \, dV + \int_{\partial \mathcal{D}_f} \phi_i^T Q (\dot{u}_0 - \dot{u}_{p0}) \, dS \right]$$

Le (24) coincidono con le (16), salvo sottrarre ad $u_0(x)$ e $\dot{u}_0(x)$ le funzioni $u_{p0}(x)$ e $\dot{u}_{p0}(x)$, ossia i valori assunti al tempo zero dalla soluzione particolare $u_p(x, t)$ e dalla sua derivata $\dot{u}_p(x, t)$.

Si analizzi ora la soluzione particolare $u_p(x, t)$. Si osserva che per $\Omega \rightarrow 0$ le forze (19) diventano indipendenti dal tempo; corrispondentemente $u_p(x, t) \rightarrow u_{st}(x)$ dove



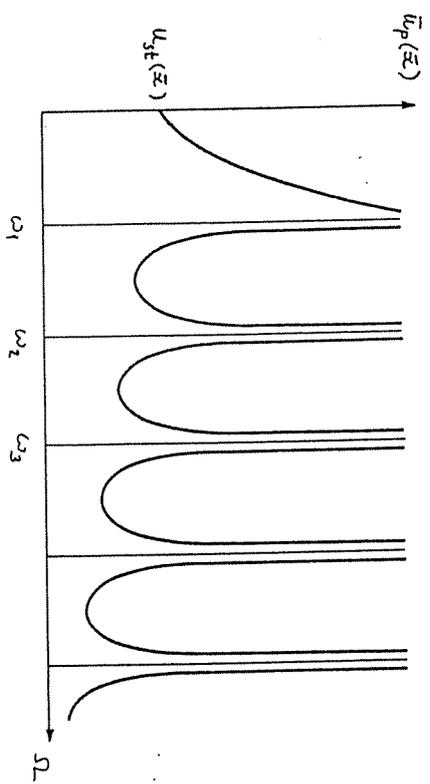
$$u_{st}(x) = \sum_i \frac{P_i}{\omega_i^2} \phi_i(x)$$

e' lo sviluppo in serie della risposta statica in termini delle autofunzioni ortonormali $\phi_i(x)$ del problema dinamico (rappresentazione spettrale di $u_{st}(x,t)$). Le componenti di $w_p(x,t)$ nella stessa base si ottengono quindi, a meno di $\cos \Omega t$, moltiplicando ciascuna componente della risposta statica per il corrispondente coefficiente dinamico $[1 - (\Omega/\omega_i)^2]^{-1}$. Questi coefficienti prendono il nome di fattori di amplificazione(+). Se si disegna l'ampiezza della risposta sinusoidale $w_p(x,t)$ in un punto $x = \bar{x}$ in funzione della frequenza della forzante Ω si ottiene il grafico riportato in figura. Si vede che la risposta e' d'ampiezza infinita quando la frequenza della forzante coincide con una frequenza propria del sistema (++); il fenomeno e' detto di risonanza.

Un sistema continuo esibisce infinite risonanze; di queste hanno pero' rilevanza pratica solo le prime, in quanto le zone di amplificazione relative alle frequenze superiori sono di ampiezza molto limitata, dal momento che i rapporti P_i/ω_i^2 tendono rapidamente a zero. Inoltre l'effetto dello smorzamento, qui non considerato, cresce con il numero di modo cosicche' ai modi superiori corrispondono dei

(++) Si noti l'analogia con le equazioni (9.42).
 (+++) Cio' e' conseguenza della linearizzazione; le non-linearita' mantengono infatti finiti gli spostamenti. Si puo' inoltre mostrare che, anche in dinamica lineare, uno smorzamento pur piccolo rende finita l'ampiezza della risposta.

picchi notevolmente piu' bassi di quelli associati ai primi modi. Fanno evidentemente eccezione situazioni in cui uno dei carichi modali P_i e' molto piu' grande degli altri per la particolare distribuzione delle forze esterne. Si noti infine che al tendere di Ω ad ∞ la risposta tende a zero.

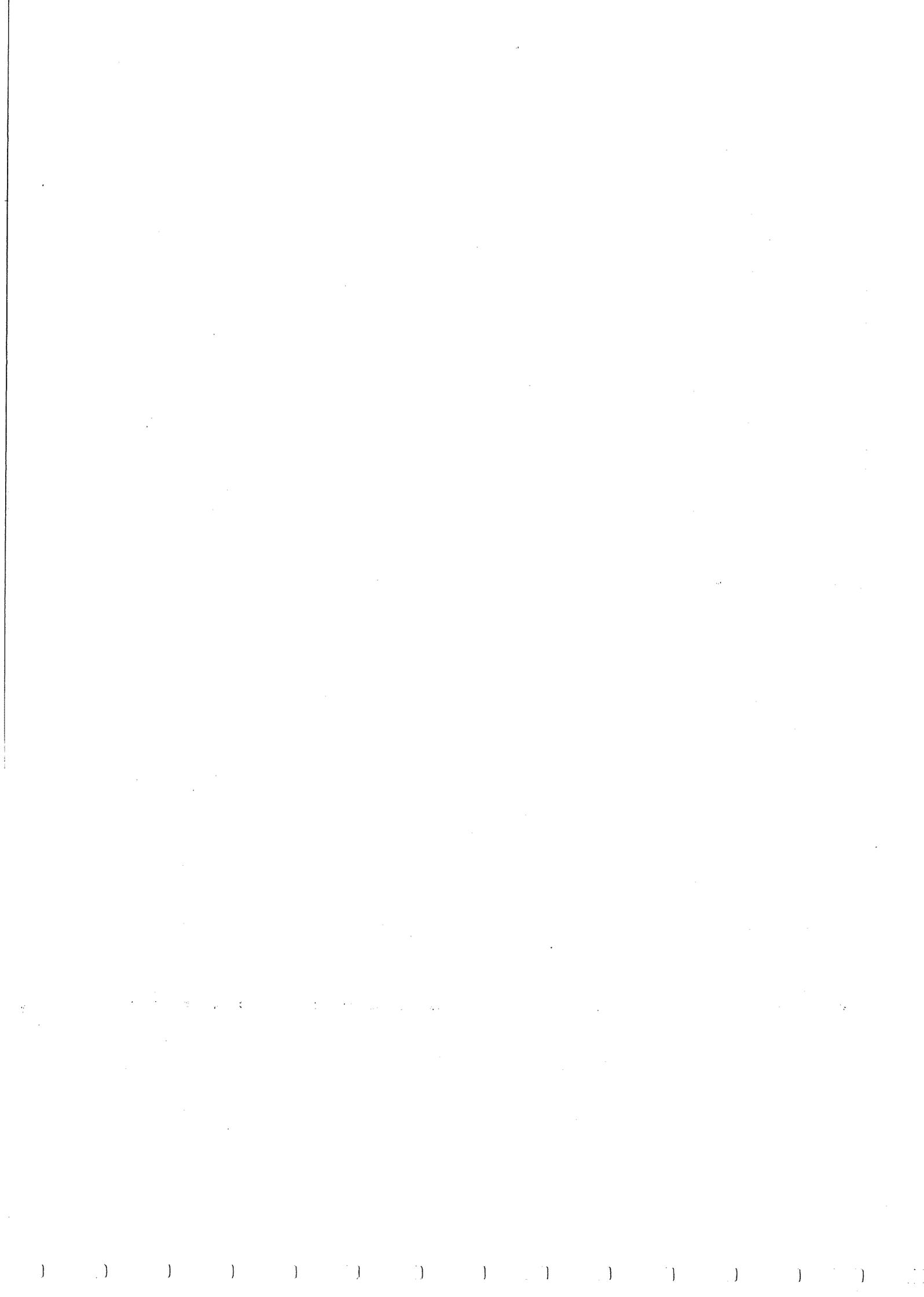


Si consideri ora il caso di forzante periodica, non semplicemente sinusoidale. Le forze $b(x,t)$ ed $f(x,t)$, di periodo T, possono essere sviluppate in serie di Fourier

$$b(x,t) = b^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [b^{(k)}(x) \cos k\Omega t + b^{(2,k)}(x) \sin k\Omega t]$$

$$f(x,t) = f^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f^{(1,k)}(x) \cos k\Omega t + f^{(2,k)}(x) \sin k\Omega t]$$

dove $\Omega = 2\pi/T$ e' la frequenza fondamentale. La risposta del sistema puo' dunque essere ottenuta come somma delle risposte relative alle singole armoniche componenti, per ciascuna delle quali vale la soluzione (21) precedentemente determinata. Si ottiene:



$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \phi_i(x) + u_{st}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)}{\omega_i^2 - k^2 \Omega^2} [P_i^{(1,k)} \cos k \Omega t + P_i^{(2,k)} \sin k \Omega t] \quad (25)$$

dove $u_{st}(x)$ e' la risposta statica dovuta al valor medio delle forze, $b^{(0)}(x)$ e $f^{(0)}(x)$, ed i carichi modali sono

$$P_i^{(j,k)} = \int_{\partial \mathcal{B}_f} \phi_i^T b^{(j,k)} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \phi_i^T f^{(j,k)} dS \quad (j=1, 2)$$

Le costanti a_i e b_i si determinano ancora con le (24), con

$$u_{p0}(x) = u_{st}(x) + \sum_i \sum_k \frac{P_i^{(1,k)}}{\omega_i^2 - k^2 \Omega^2} \phi_i(x) \\ u_{p0}(x) = \sum_k \sum_i k \Omega \frac{P_i^{(2,k)}}{\omega_i^2 - k^2 \Omega^2} \phi_i(x)$$

La (25) evidenzia ∞^2 possibili casi di risonanza, che si verificano quando la forzante contiene una frequenza $k \Omega$ che coincide con una frequenza propria del sistema ω_i . Comunque, poiche' in generale le ampiezze delle armoniche componenti decrescono rapidamente con la frequenza, le risonanze associate ad armoniche superiori sono di limitata importanza.

b) Forzante aperiodica

Si consideri ora il caso generale in cui $b(x, t)$ ed $f(x, t)$ sono aperiodiche. La ricerca di una soluzione particolare delle (18) puo' essere effettuata sviluppando $u(x, t)$ in serie delle autofunzioni $\phi_i(x)$ del problema

omogeneo, considerando i coefficienti dello sviluppo come funzioni incognite del tempo:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \phi_i(x) \quad (26)$$

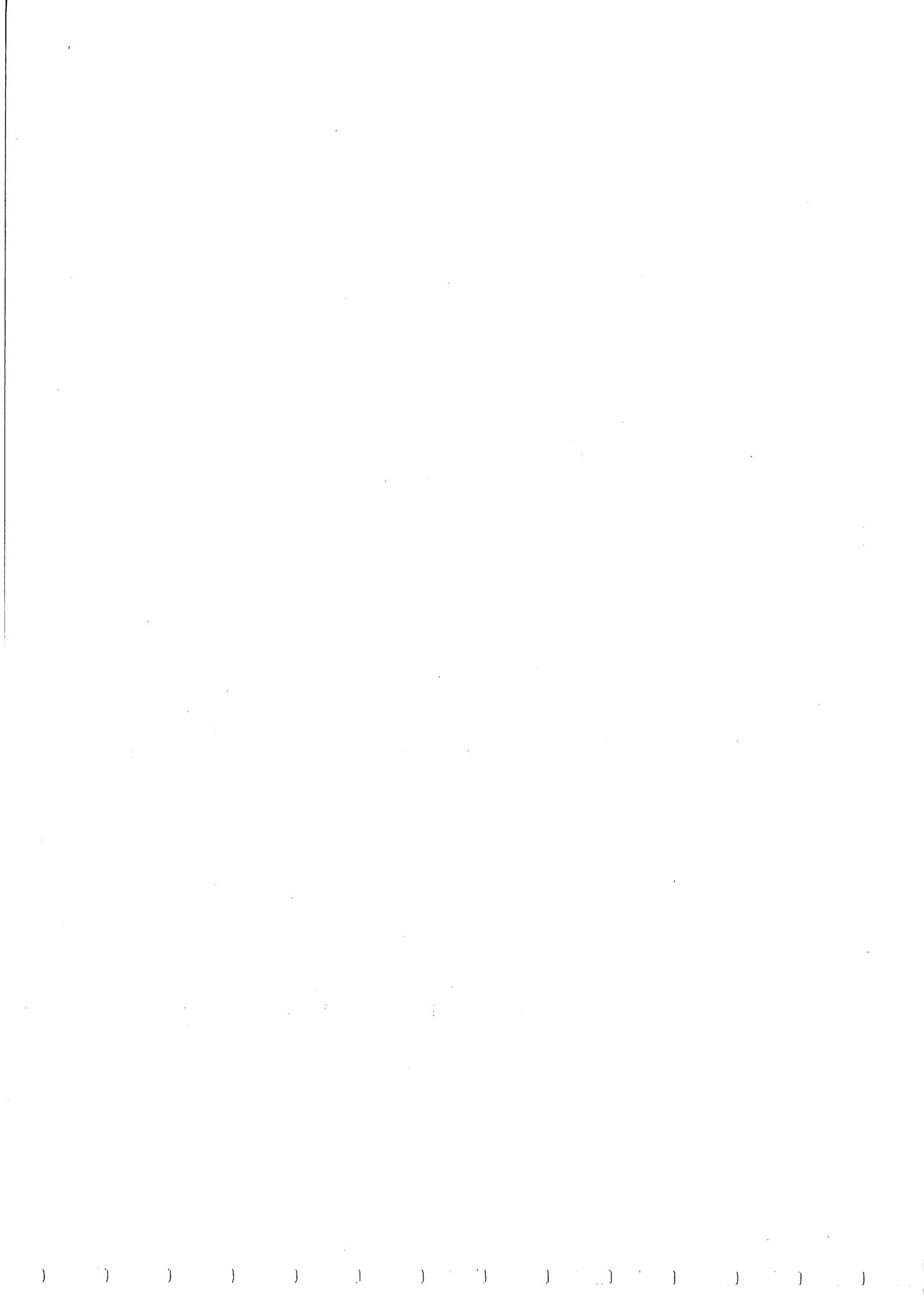
Poiche' peraltro la (26) contiene come caso particolare la soluzione generale (13) del problema omogeneo associato, puo' rappresentare anche la soluzione generale del problema non omogeneo. Le funzioni $\xi_i(t)$ sono delle coordinate generalizzate dette coordinate naturali, o normali, e rappresentano le ampiezze dei corrispondenti modi normalizzati. Il metodo di soluzione che fa uso dello sviluppo (26) e' detto analisi modale.

Sostituendo le (26) nelle (18) si ottiene

$$\sum_i (\ddot{\xi}_i M \phi_i + \xi_i L \phi_i) = b \quad \text{in } \mathcal{B} \quad (27)$$

$\sum_i (\ddot{\xi}_i Q \phi_i + \xi_i B \phi_i) = f \quad \text{su } \partial \mathcal{B}_f$ mentre le condizioni geometriche al contorno sono soddisfatte dall'annullarsi di $\phi_i(x)$ su $\partial \mathcal{B}_u$. Per ricavare le $\xi_i(t)$ incognite dalle (27) occorre premoltiplicare le equazioni e le condizioni al contorno per $\phi_j^T(x)$; quindi integrando e sommando si ha

$$\sum_i \ddot{\xi}_i \left(\int_{\mathcal{B}} \phi_j^T M \phi_i dV + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \phi_j^T Q \phi_i dS \right) + \sum_i \xi_i \left(\int_{\mathcal{B}} \phi_j^T L \phi_i dV + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \phi_j^T B \phi_i dS \right) = P_j(t) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (28)$$



dove

$$P_j(t) = \int_{\mathcal{D}} b^T(x,t) \phi_j(x) dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} f^T(x,t) \phi_j(x) dS \quad (29)$$

è la j-esima forza generalizzata, dipendente dal tempo. In virtù delle condizioni di ortonormalizzazione (12) le (28) si scrivono:

$$\ddot{\xi}_i(t) + \omega_i^2 \xi_i(t) = P_i(t) \quad (i=1,2,\dots) \quad (30)$$

cioè costituiscono un sistema di infinitesime equazioni disaccoppiate nelle coordinate normali ξ_i . Si noti che la generica equazione descrive il moto di un oscillatore elementare di massa unitaria e pulsazione ω_i sottoposto ad una forzante $P_i(t)$.

Una soluzione particolare delle (30) può ottenersi dall'integrale di Duhamel, o integrale di convoluzione:

$$\xi_i(t) = \int_0^t P_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau \quad (31)$$

In esso $h_i(t)$ è la risposta impulsiva, cioè la risposta dell'oscillatore ad un impulso unitario applicato al tempo zero a partire da condizioni iniziali nulle. La (31) esprime la risposta al tempo t come somma degli effetti prodotti da una sequenza di impulsi elementari di grandezza $P_i(\tau) d\tau$ applicati all'oscillatore agli istanti τ , con $\tau \in [0, t]$. Tenuto conto che, come è immediato verificare, la risposta impulsiva è'

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (32)$$

sommando alla (31) la soluzione generale del problema omogeneo in definitiva si ottiene (+)

$$\xi_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t P_i(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau + \xi_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{\xi}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (33)$$

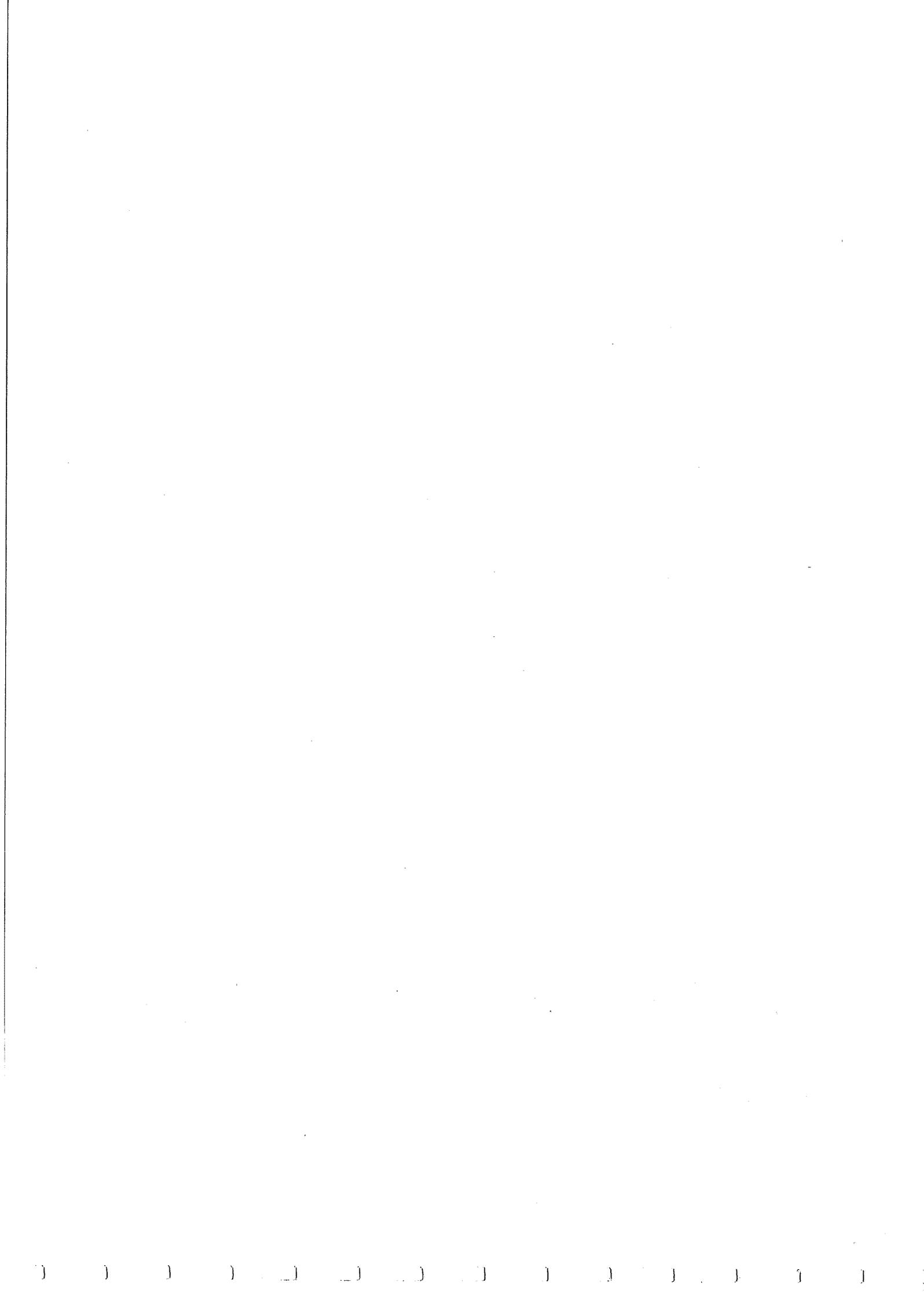
In essa e' $\xi_i(0) = a_i$, $\dot{\xi}_i(0) = \omega_i b_i$, con a_i e b_i dati dalle (16); la soluzione particolare, infatti, per come è stata costruita, dà contributo nullo a spostamento e velocità iniziali del sistema. La (33) ovviamente contiene come caso particolare quello della forzante periodica.

10.5 Sostamenti impressi

Un importante tipo di moto forzato è quello prodotto da spostamenti impressi ai vincoli, variabili nel tempo con legge assegnata. Esempi di questo tipo di eccitazione sono rappresentati dalla sollecitazione sismica su strutture vincolate al suolo o da vibrazioni indotte su macchine in movimento. Le equazioni del moto (3) si scrivono in tal caso

$$\begin{aligned} M \ddot{w} + L w &= 0 & \text{in } \mathcal{D} \\ Q \ddot{u} + B u &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ w &= \bar{w} & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (34)$$

(+) La (33) può anche essere ottenuta applicando la trasformata di Laplace all'equazione (30).



in cui $\bar{w} = \bar{w}(x, t)$ e' lo spostamento impresso. Le (34) sono delle equazioni differenziali omogenee con condizioni al contorno non omogenee. La soluzione non puo' essere ricercata nella forma (26) in quanto le autofunzioni $\phi_i(x)$ non soddisfano le condizioni geometriche al contorno. E' opportuno pertanto operare un cambio di variabile per rendere omogenee le condizioni al contorno su $\partial \mathcal{D}_u$. A tal fine si pone

$$u(x, t) = y(x, t) + v(x, t) \quad (35)$$

in cui $y(x, t)$ e' una funzione nota, arbitraria purché sufficientemente regolare, tale che

$$y(x, t) = \bar{w}(x, t) \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u \quad (36)$$

Le equazioni (34) nella nuova variabile $v(x, t)$ si scrivono quindi

$$M \ddot{v} + L v = - (M \ddot{y} + L y) \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$Q \ddot{v} + B v = - (Q \ddot{y} + B y) \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (37)$$

$$v = 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u$$

e sono perciò del tipo (18). Alla funzione nota $y(x, t)$ corrispondono quindi delle forze equivalenti di volume e di superficie:

$$b = - (M \ddot{y} + L y) \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (38)$$

$$f = - (Q \ddot{y} + B y) \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_f$$

L'espressione delle forze (38) risulta semplificata quando per $y(x, t)$ si sceglia la soluzione pseudostatica, cioè la soluzione delle equazioni (34) in cui le forze d'inerzia $-M \ddot{w}$, $-Q \ddot{w}$ sono poste uguali a zero. $y(x, t)$ rappresenta in tal caso il campo di spostamento che si avrebbe al tempo t se il cedimento vincolare allo stesso istante $\bar{w}(x, t)$ fosse applicato staticamente, cioè in un tempo infinito. In tal caso nelle (38) e' $L y = 0$, $B y = 0$; la variabile $v(x, t)$ assume in tal caso il significato di contributo dinamico della soluzione.

Le (37) vanno corredate delle condizioni iniziali (4) che, nella nuova variabile, si scrivono:

$$v(x, 0) = u_0(x) - y_0(x) \quad (39)$$

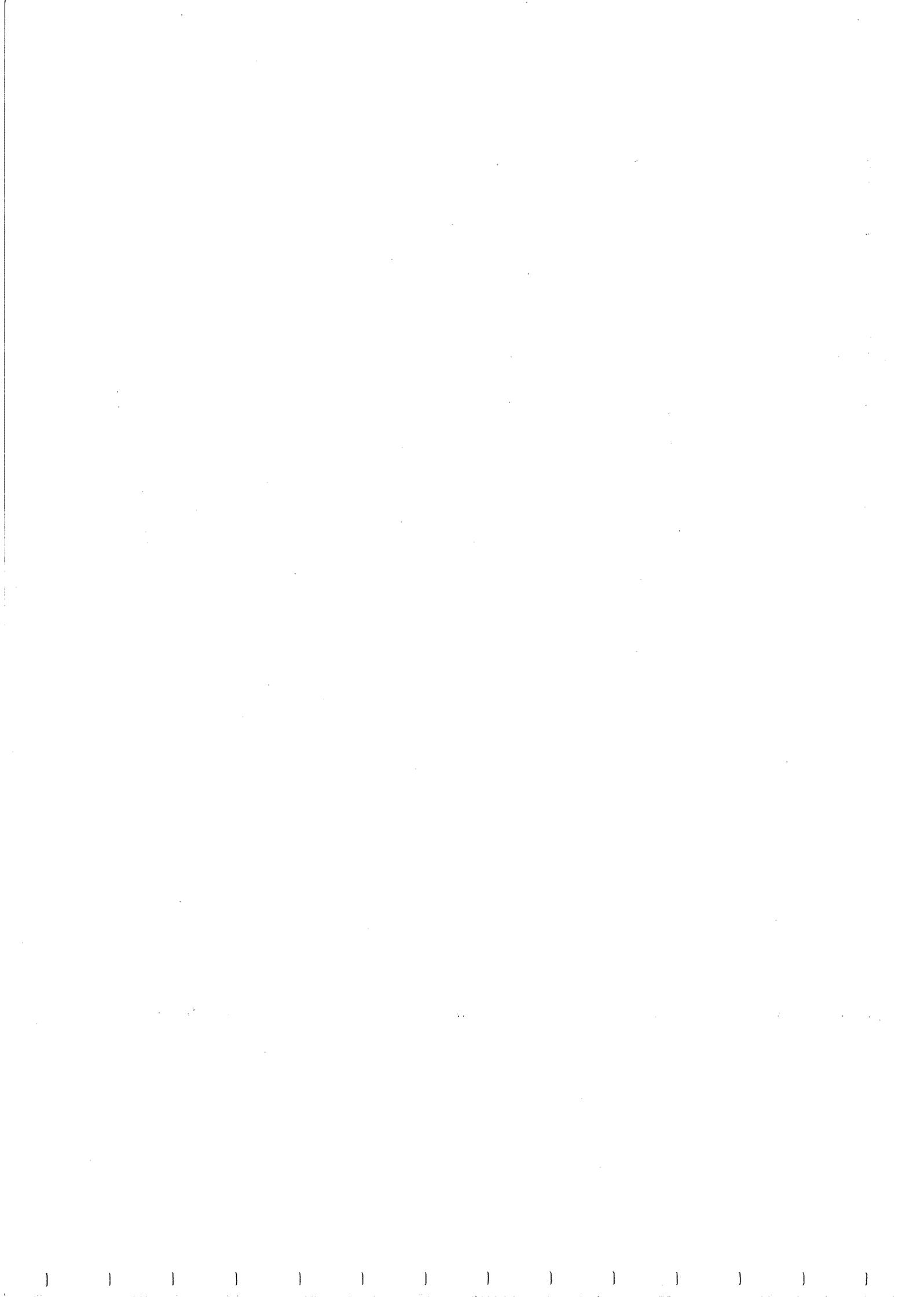
dove $\dot{v}(x, 0) = \dot{u}_0(x) - \dot{y}_0(x)$

$$y_0(x) = y(x, 0), \quad \dot{y}_0(x) = \dot{y}(x, 0) \quad (40)$$

Le equazioni possono essere risolte applicando uno dei procedimenti illustrati nel paragrafo precedente, a secondo che $\bar{w}(x, t)$ sia periodica o aperiodica. Ad esempio, per il caso di forzante generica, si ha:

$$u(x, t) = y(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \phi_i(x) \quad (41)$$

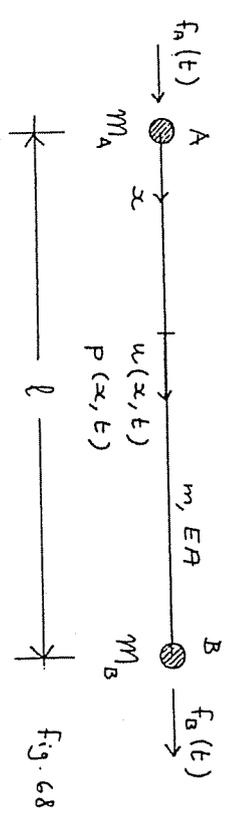
in cui $\xi_i(t)$ e' dato ancora dalle (33), con $\xi_i'(0) = a_i$ e $\xi_i(0) = \omega_i b_i$, salvo il fatto che nel calcolo di a_i e b_i (eq. (16)) u_0 ed \dot{u}_0 vanno rispettivamente sostituiti con



$u_0 - y_0$ e $\dot{u}_0 - \dot{y}_0$, in accordo alle (39). Esempi di applicazione del metodo sono presentati più avanti (pr.f. 10.9.4).

10.6 Oscillazioni longitudinali della trave: dinamica dell'asta

I concetti precedentemente esposti sulla dinamica dei continui elastici vengono applicati ai modelli già introdotti nel problema statico. Quale primo esempio si consideri il moto longitudinale di una trave di lunghezza l , rigidità assiale EA , massa per unità di lunghezza m e masse concentrate alle estremità M_A ed M_B , sottoposta all'azione di forze distribuite dipendenti dal tempo $P(x, t)$ e forze d'estremità $f_A(t)$ ed $f_B(t)$ (fig. 68). Nel seguito si scrivono le equazioni del moto e si risolvono alcuni problemi particolari.



10.6.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto possono ottenersi direttamente dalle condizioni di equilibrio (3.5) dell'asta applicando il

principio di D'Alembert. Le forze d'inerzia distribuite sono uguali a

$$P^I(x, t) = -m \ddot{u}(x, t) \quad (42)$$

e quelle concentrate al contorno

$$\begin{aligned} f_A^I(t) &= -M_A \ddot{u}(0, t) \\ f_B^I(t) &= -M_B \ddot{u}(l, t) \end{aligned} \quad (43)$$

Sommando le forze d'inerzia alle forze attive nelle equazioni (3.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} -EA u'' + m \ddot{u} &= P & \text{in } \mathcal{D} \\ m EA u' + M \ddot{u} &= F & \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad n = \pm 1 \end{aligned} \quad (44)$$

Alle (44) vanno aggiunte le condizioni geometriche $u = \bar{u}(x, t)$ sulla parte del contorno dove sono assegnati gli spostamenti. Si noti che le (44) sono del tipo (3): in particolare gli operatori di massa sono $H \equiv m$ e $Q \equiv M$.

Alle stesse equazioni si può pervenire applicando il principio di Hamilton (6). L'Hamiltoniano dell'asta, si scrive

$$\begin{aligned} H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} EA u'^2 + P u \right) dx + \\ + \frac{1}{2} (M_A \dot{u}_A^2 + M_B \dot{u}_B^2) + f_A u_A + f_B u_B \end{aligned} \quad (45)$$

Imponendo le condizioni di stazionarietà si ottiene



$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} (m \dot{u} \delta \dot{u} - EA u' \delta u' + p \delta u) dx +$$

$$+ M_A \dot{u}_A \delta \dot{u}_A + M_B \dot{u}_B \delta \dot{u}_B + F_A \delta u_A + F_B \delta u_B \Big] dt = 0$$

da cui integrando per parti:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\ell} (EA u'' - m \ddot{u} + p) \delta u dx + (EA u_A' - M_A \ddot{u}_A +$$

$$+ F_A) \delta u_A + (-EA u_B' - M_B \ddot{u}_B + F_B) \delta u_B + [\dots]_{t_1}^{t_2} = 0$$

I termini in t_1 e t_2 si annullano in quanto in questi istanti sono nulle le variazioni δu ; dalle (47) si ricavano quindi le (44).

Si noti che la (44) resa omogenea e' l'equazione monodimensionale delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (46)$$

in cui

$$c = \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (47)$$

e' la velocita' di propagazione delle onde longitudinali.

10.6.2 Moto libero

Si considerino dapprima forze attive e cedimenti vincolari uguali a zero. Le (44) ammettono la soluzione

armonica $u(x,t) = \phi(x) e^{i\omega t}$ dove $\phi(x)$ ed ω sono soluzione del problema d'autovalori

$$EA \phi'' + m \omega^2 \phi = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$n EA \phi' - m \omega^2 \phi = 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_F \quad (48)$$

$$\phi = 0 \quad \text{su } \partial \mathcal{D}_u$$

La soluzione generale dell'equazione (48) e'

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \quad (49)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie ed inoltre

$$\beta^2 = \frac{m \omega^2}{EA} \quad (50)$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene un sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite C_1 e C_2 ; annullando il determinante della matrice dei coefficienti si ricava l'autovalore ω . Si esaminano alcuni casi particolari.

a) Asta fissa agli estremi

Imponendo le condizioni al contorno (entrambe geometri-
che):

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0 \quad (51)$$

si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \beta \ell & \sin \beta \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$



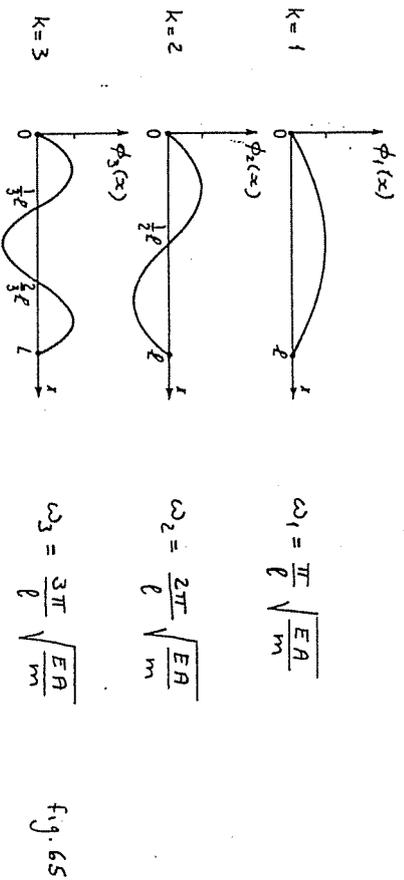
che ammette soluzione non banale solo se $\sin \beta \ell = 0$, se cioè $\beta = k\pi/\ell$ ($k=1, 2, \dots$) (+); dalla (50) si ha perciò:

$$\omega_k = \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (53)$$

Corrispondentemente e' $c_1=0$, $c_2=V$, e l'autofunzione (49) si scrive

$$\phi_k(x) = c_2 \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (54)$$

Le autofunzioni $\phi_k(x)$ rappresentano i modi naturali di oscillazione dell'asta e gli autovalori ω_k sono le corrispondenti pulsazioni proprie (fig. 69).



I modi di vibrazione, in quanto soluzione di un problema omogeneo, sono definiti a meno di una costante moltiplicativa che, per gli sviluppi successivi, e' utile determinare attraverso una condizione di normalizzazione. La (12₂) in particolare si scrive

(+) Si noti che la soluzione $\beta=0$ va scartata in quanto fornisce la soluzione banale $\phi(x) \equiv 0$.

$$\int_0^{\ell} m \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (55)$$

e per $i=j$ fornisce $c_2 = \sqrt{2/(m\ell)}$. La soluzione generale delle equazioni omogenee del moto e' dunque (eq. (13))

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (56)$$

dove le costanti a_k e b_k sono date da (eq. (16))

$$a_k = \sqrt{2m} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx \quad (57)$$

$$b_k = \frac{1}{\omega_k} \sqrt{2m} \int_0^{\ell} \dot{u}_0(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

essendo $u_0(x)$ e $\dot{u}_0(x)$ spostamento e velocita' al tempo zero.

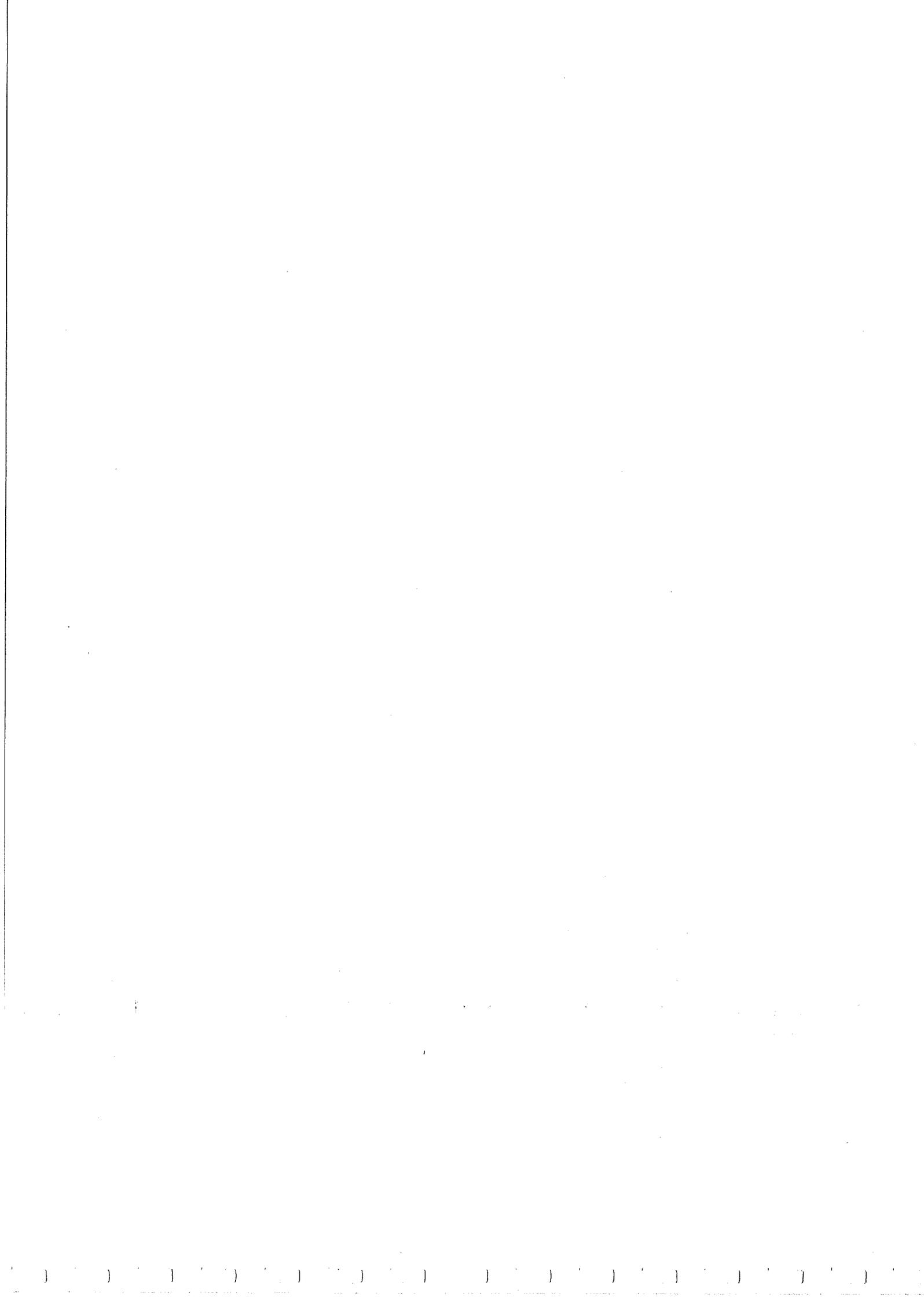
b) Asta libera agli estremi

Se l'asta ha le estremita' libere e non sono presenti masse concentrate, le condizioni al contorno (entrambe meccaniche) sono

$$EA \phi'(0) = 0, \quad EA \phi'(\ell) = 0 \quad (58)$$

ed esprimono l'annullarsi dello sforzo normale in $x=0, \ell$. Stante la (49) le due condizioni si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin \beta \ell & \cos \beta \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (59)$$



da cui si ricava, come nel caso precedente, l'equazione caratteristica $\sin \beta \ell = 0$; gli autovalori sono perciò $\beta = k\pi/\ell$ ($k=0,1,2,\dots$) e le costanti risultano $c_1 = A$, $c_2 = 0$. Le frequenze proprie si calcolano dalla (50)

$$\omega_0 = 0 \quad (60)$$

$$\omega_k = \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EA}{m}} \quad (k=1,2,\dots)$$

ed i modi naturali corrispondenti sono

$$\phi_0(x) = c_1 \quad (61)$$

$$\phi_k(x) = c_1 \cos \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k=1,2,\dots)$$

Si noti che, a differenza del caso dell'asta vincolata agli estremi, ad $\omega = 0$ corrisponde una soluzione non banale $\phi(x) = \cos t$. Ciò è conseguenza del fatto che l'asta non vincolata è un sistema labile e come tale ammette uno o più autovalori nulli a cui corrispondono moti rigidi.

Calcolando c_1 dalla condizione di normalizzazione (55) si ottiene $c_1 = 1/\sqrt{m\ell}$ per $k=0$ e $c_1 = \sqrt{2/(m\ell)}$ per $k>0$.

La soluzione generale delle (48) risulta perciò:

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \cos \frac{k\pi x}{\ell} + \frac{1}{\sqrt{m\ell}} (a_0 + \tilde{b}_0 t) \quad (62)$$

dove le costanti a_k e b_k si determinano dalle (16)

$$a_k = \sqrt{\frac{2m}{\ell}} \int_0^{\ell} u_0(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx, \quad b_k = \sqrt{\frac{2m}{\ell}} \int_0^{\ell} \dot{u}_0(x) \cos \frac{k\pi x}{\ell} dx$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{m}{\ell}} \int_0^{\ell} u_0(x) dx, \quad \tilde{b}_0 = \sqrt{\frac{m}{\ell}} \int_0^{\ell} \dot{u}_0(x) dx \quad (k=1,2,\dots) \quad (63)$$

avendo posto $\tilde{b}_0 = \omega_0 b_0$. Si noti che all'autovalore nullo corrisponde un moto uniforme; in particolare il termine lineare in t è ottenuto come limite del rapporto $\sin \omega_0 t / \omega_0$ per $\omega_0 \rightarrow 0$. In definitiva il moto libero è rappresentato dalla sovrapposizione di un moto rigido uniforme e da un'oscillazione elastica armonica.

c) Asta fissa ad un estremo, con massa concentrata nell'estremo libero.

Se l'asta è fissata in $x=0$ e libera in $x=\ell$ le condizioni al contorno sono miste:

$$\phi(0) = 0, \quad EA \phi'(\ell) - m \omega^2 \phi(\ell) = 0 \quad (64)$$

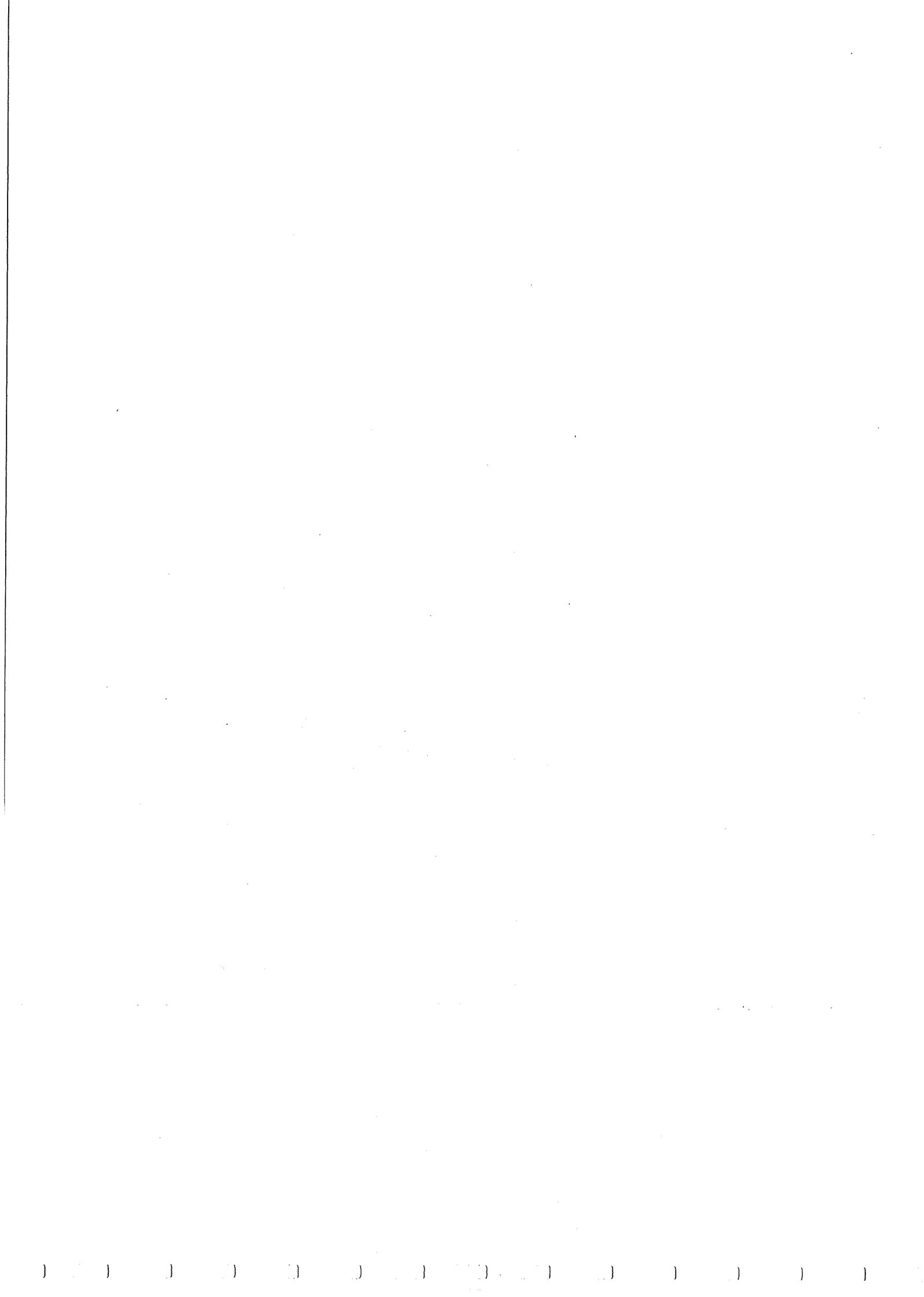
dove M è la massa concentrata nell'estremo libero. Dalla (64) e (49) si ricava immediatamente $c_1 = 0$; dalla (64) tenuto conto della (50), si ottiene l'equazione caratteristica:

$$tg \beta \ell = \frac{m\ell}{m} \frac{1}{\beta \ell} \quad (65)$$

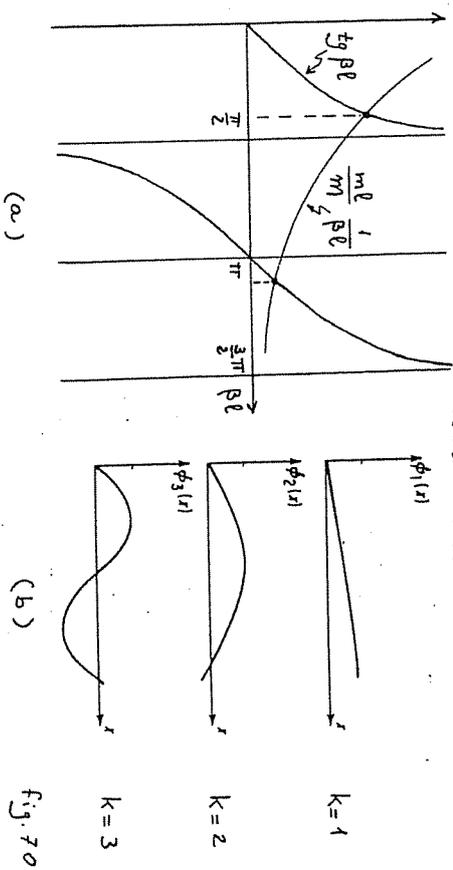
in cui compare il rapporto adimensionale tra la massa ripartita $m\ell$ e quella concentrata M . La (65) va risolta numericamente; determinate le radici β_k le autofunzioni risultano:

$$\phi_k(x) = c_2 \sin \beta_k x \quad (k=1,2,\dots) \quad (66)$$

e la soluzione generale si ottiene dalla loro sovrapposizione. Il grafico di fig. 70a mostra che all'aumentare del numero di modo (oppure a parità di modo al diminuire del



rapporto $m\ell/m$ l'equazione caratteristica (65) ammette le soluzioni $\beta_{\pm} = (k-1)\pi/\ell$. Dalla (66) si vede allora che il contributo dei modi superiori allo spostamento dell'estremo libero è piccolo; lo stesso accade quando M è grande in rapporto alla massa totale dell'asta. In quest'ultimo caso i modi naturali non differiscono molto da quelli dell'asta fissa agli estremi, salvo la presenza di un ulteriore modo (il primo), simile a quello di un sistema ad un grado di libertà, costituito da una massa concentrata vincolata da un'asta priva di massa.



10.6.3 Moto forzato: lancio del missile

Si consideri ora il problema non omogeneo (44). Se si applica l'analisi modale (forzante aperiodica) occorre nell'ordine calcolare le forze generalizzate (29), quindi l'integrale di convoluzione ed infine sovrapporre le

risposte modali. Le forze generalizzate nel caso dell'asta si scrivono

$$P_k(t) = \int_0^{\ell} p(x,t) \phi_k(x) dx + f_a(t) \phi_k(0) + f_b(t) \phi_k(\ell) \quad (67)$$

dove $\phi_k(x)$ sono i modi normali già determinati nello studio del moto libero.

Si vuole mostrare un'applicazione del metodo al problema di un'asta libera agli estremi, sottoposta all'azione di una forza al contorno

$$f_a(t) = f_0 V(t) \quad (68)$$

dove $V(t)$ è la funzione gradino (unit step function) definita da $V(t) = 0$ per $t < 0$, $V(t) = 1$ per $t \geq 0$. Il modello simula il moto di un missile nella fase di lancio verticale. I modi normali del sistema sono (eq. (61)):

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{\ell}{m\ell}}, \quad \phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \cos \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (69)$$

e le corrispondenti frequenze sono date dalle (60). Dalle (67) e (68) si calcolano le forze generalizzate

$$P_k(t) = f_a(t) \phi_k(0) = f_0 \phi_k(0) V(t) \quad (70)$$

Assumendo condizioni iniziali di quiete il moto è descritto dalla serie

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \frac{1}{\omega_k} \int_0^t P_k(x) \sin \omega_k(t-\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x) \phi_k(0) \frac{f_0}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \quad (71)$$



Poiche' e' $\omega_0 \neq 0$, occorre determinare il limite

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2} = \frac{t^2}{2} \quad (72)$$

e quindi, tenuto conto delle (68), la risposta risulta

$$u(x, t) = \frac{f_0}{m} \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2f_0 \ell}{\pi^2 E A} \frac{1}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{\ell} (1 - \cos \omega_k t) \quad (73)$$

Il primo termine della (73) rappresenta un moto di corpo rigido naturalmente accelerato; del secondo termine, la parte indipendente dal tempo puo' essere interpretata come deformata elastica statica e la parte variabile nel tempo come incremento dinamico (rappresentato da una somma di oscillazioni armoniche). Dalla (73) si ricava il campo di sollecitazione $N = EA u'$ derivando la serie termine a termine

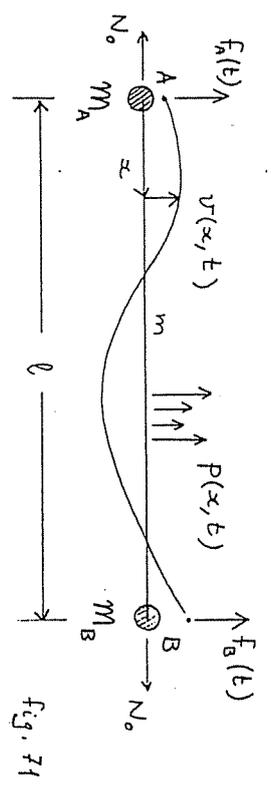
$$N(x, t) = -2 \frac{f_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} (-\cos \omega_k t) \quad (74)$$

Si noti che la convergenza della (74) e' piu' lenta di quella della (73) in quanto la potenza di k che appare a denominatore e' piu' bassa. Questa circostanza e' di carattere generale.

10.7 Dinamica del filo

Si consideri un filo di lunghezza ℓ , teso da forze di estremita' N_0 , avente massa per unita' di lunghezza m , portante alle estremita' masse concentrate M_A e M_B ,

sottoposto a forze trasversali distribuite $P(x, t)$ e forze sul contorno $f_A(t)$ ed $f_B(t)$ (fig. 71).



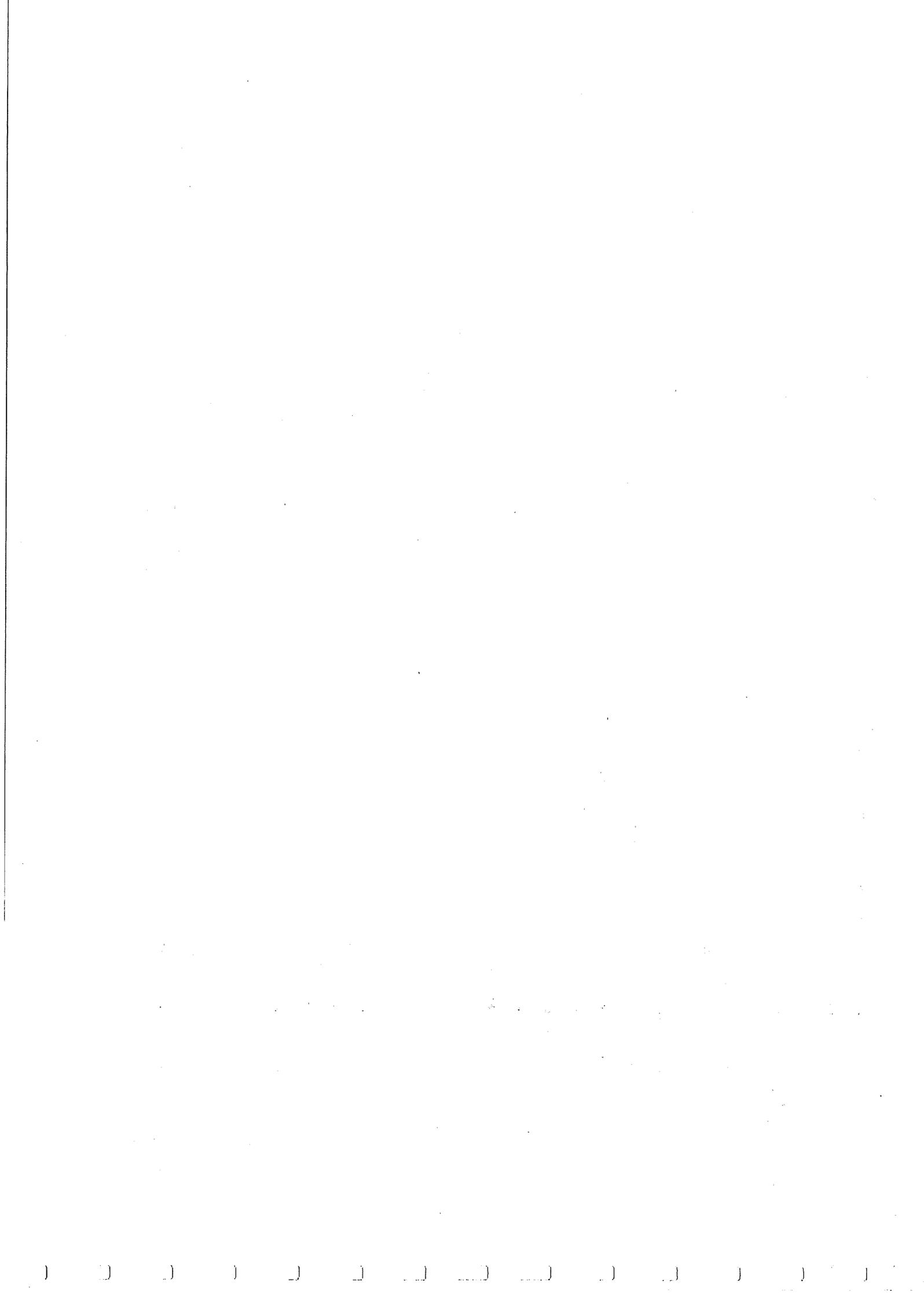
Il moto longitudinale del filo e' disaccoppiato da quello trasversale ed e' descritto dal modello di asta gia' studiato. Per determinare l'equazione del moto che governa le oscillazioni trasversali, si applichi il principio di D'Alembert all'equazione di equilibrio e alle condizioni al contorno (9.27); tenuto conto che le forze d'inerzia sono

$$\begin{aligned} P^{\pm}(x, t) &= -m \ddot{v}(x, t) \\ f_A^{\pm}(t) &= -M_A \ddot{v}(0, t) \\ f_B^{\pm}(t) &= -M_B \ddot{v}(\ell, t) \end{aligned}$$

le equazioni del moto risultano:

$$\begin{aligned} -N_0 v'' + m \ddot{v} &= P & \text{in } \mathcal{D} \\ n N_0 v' + m \dot{v} &= f & \text{su } \partial \mathcal{D}_f \quad (n = \pm 1) \end{aligned} \quad (75)$$

La (75₂) in particolare esprime l'equaglianza sul contorno della forza esterna $f - M \ddot{v}$ e della forza interna (reazione geometrica) $n N_0 v'$. Alle (75) vanno aggiunte le condizioni geometriche $v = \bar{v}(t)$ su $\partial \mathcal{D}_u$.



Si noti che le (75) sono formalmente identiche alle (44), come già osservato per il problema statico. La (75₁) resa omogenea e' ancora l'equazione delle onde (46) in cui però la velocità di propagazione e'

$$c = \sqrt{\frac{N_0}{m}} \quad (76)$$

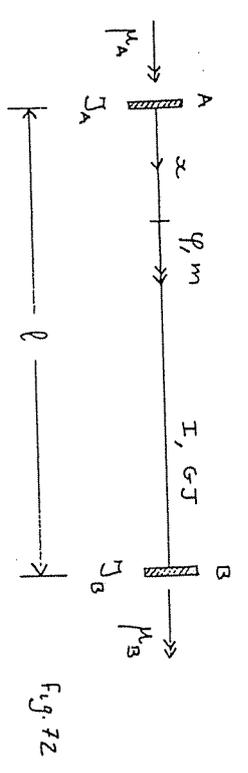
che, essendo generalmente $N_0 \ll EA$, e' molto più bassa della velocità delle onde longitudinali (47).

Lo studio delle (75) non offre alcun elemento nuovo rispetto al caso dell'asta già trattato; le soluzioni determinate nelle diverse condizioni di vincolo e di carico valgono nelle stesse condizioni anche per il filo, salvo sostituire a spostamenti e forze longitudinali spostamenti e forze trasversali e alla rigidità assiale EA la rigidità geometrica N_0 .

10.8 Oscillazioni torsionali della trave

Si analizzi ora il moto torsionale di una trave dotata di massa che porta all'estremità due masse concentrate di dimensione finita, ad esempio dei dischi rigidi. Il modello può rappresentare ad esempio un albero di trasmissione di una macchina. Sia l la lunghezza della trave, GJ la rigidità torsionale, I il momento polare d'inerzia (di massa) per unità di lunghezza della trave, J_A e J_B i momenti polari d'inerzia (di massa) dei due dischi. Ad esempio per una trave circolare di raggio R e' $GJ = G\pi R^4/2$ e $I = \rho\pi R^4/2$,

dove ρ e' la densità di massa per unità di volume (fig. 72)



Le coppie torcenti d'inerzia distribuite lungo la trave sono pari a:

$$m^{\pm}(x, t) = -I \ddot{\varphi}(x, t) \quad (77)$$

dove $\varphi \equiv \varphi_{\pm}$ e' l'angolo di torsione; le coppie d'inerzia concentrate al contorno sono

$$\begin{aligned} \mu_A^{\pm} &= -J_A \ddot{\varphi}(0, t) \\ \mu_B^{\pm} &= -J_B \ddot{\varphi}(l, t) \end{aligned} \quad (78)$$

Se $m(x, t)$ e $\mu(x, t)$ sono le coppie esterne attive l'equazione del moto della trave e le condizioni al contorno si ricavano dalle equazioni (5.59) e (5.60) applicando il principio di D'Alembert. Si ha:

$$\begin{aligned} -GJ \varphi'' + I \ddot{\varphi} &= m & \text{in } \mathcal{D} \\ n GJ \varphi' + J \ddot{\varphi} &= \mu & \text{su } \partial \mathcal{D}_{\pm} \end{aligned} \quad (n = \pm 1) \quad (79)$$

alle quali vanno aggiunte le condizioni geometriche $\varphi = \bar{\varphi}(t)$ su $\partial \mathcal{D}_w$. Si noti che le (79) sono formalmente analoghe alle equazioni del moto trasversale del filo e del moto



longitudinale della trave. In particolare la (79₁) resa omogenea e' ancora l'equazione monodimensionale delle onde (46) in cui la velocita' di propagazione e'

$$c = \sqrt{\frac{c_0}{I}} \quad (80)$$

valgono percio' le soluzioni determinate per l'asta salvo il diverso significato dei coefficienti e della variabile di stato.

10.9 Oscillazioni trasversali della trave.

Facendo riferimento al modello indeformabile a taglio si vogliono analizzare le oscillazioni trasversali di una trave di lunghezza l , rigidezza flessionale EI , e massa per unita' di lunghezza m ; la trave sia collegata alle estremita' a due masse concentrate M_A e M_B di momenti d'inertia polari J_A e J_B ; sia inoltre sollecitata da forze trasversali distribuite $P(x,t)$ e da forze e coppie di estremita' $f_n(t)$, $\mu_n(t)$, $f_B(t)$, $\mu_B(t)$ (fig.73).

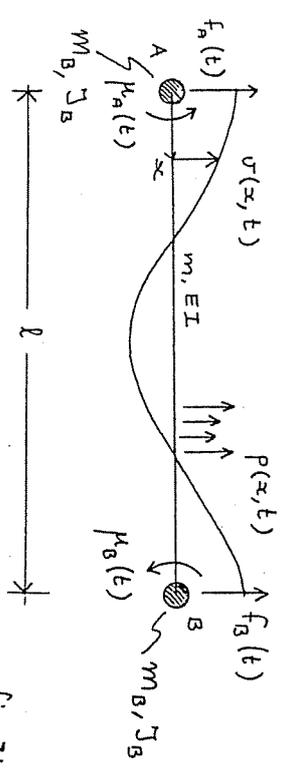


fig. 74

10.9.1 Equazioni del moto

L'equazione di equilibrio e le condizioni al contorno meccaniche della trave sono state determinate per il caso statico e risultano (eq.(49₂), (53_{2,3}))

$$\left. \begin{aligned} EI v'''' &= P & \text{in } \mathcal{D} \\ -n EI v'''' &= f & \text{su } \mathcal{D}_f \\ n EI v'' &= \mu & \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

avendo posto uguali a zero le coppie ripartite. Tenuto conto che le forze d'inertzia risultano:

$$\left. \begin{aligned} P^I(x,t) &= -m \ddot{v}(x,t) \\ f_n^I(t) &= -M_n \ddot{v}(0,t) & , & \quad f_B^I(t) = -M_B \ddot{v}(l,t) \\ \mu_n^I(t) &= -J_n \ddot{v}'(0,t) & , & \quad \mu_B^I(t) = -J_B \ddot{v}'(l,t) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

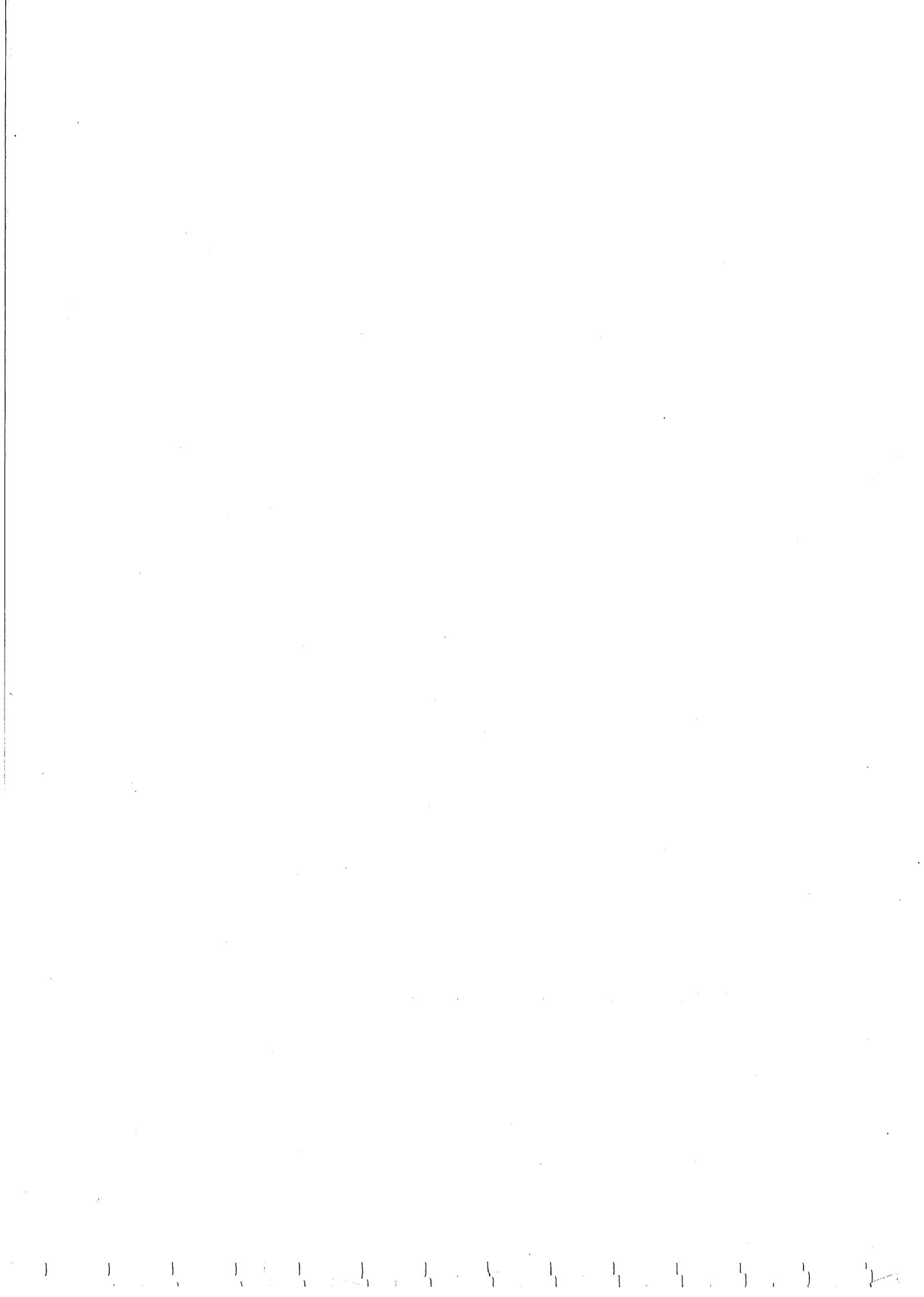
applicando il principio di D'Alembert si ottengono le equazioni del moto

$$\left. \begin{aligned} EI v'''' + m \ddot{v} &= P(x,t) & \text{in } \mathcal{D} \\ -n EI v'''' + M \ddot{v} &= f & \\ n EI v'' + J \ddot{v}' &= \mu & \end{aligned} \right\} \quad \text{su } \mathcal{D}_f \quad (n=\pm 1) \quad (83)$$

Alle (83) vanno aggiunte le condizioni geometriche

$$v(x,t) = \bar{v}(x,t) \quad , \quad v'(x,t) = \bar{v}'(x,t) \quad \text{su } \mathcal{D}_u \quad (84)$$

Si noti che nella (83₁) non si e' tenuto conto dell'inertzia rotatoria della trave; si puo' infatti mostrare che se la



trave e' snella il suo contributo e' trascurabile in rapporto a quello dell'inerzia traslatoria.

10.9.2 Moto libero

Se la trave non e' sollecitata da forze attive e i cedimenti vincolari sono nulli le (83), (84) ammettono la soluzione particolare $v(x,t) = \phi(x) e^{i\omega t}$ dove $\phi(x)$ ed ω si ottengono dal problema di autovalori

$$\left. \begin{aligned} EI \phi'''' - m \omega^2 \phi &= 0 & \text{in } \mathcal{D} \\ -n EI \phi'''' - m \omega^2 \phi &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_F \\ n EI \phi'' - Y \omega^2 \phi' &= 0 & \text{su } \mathcal{D}_u \\ \phi &= 0, \quad \phi' = 0 & \text{su } \mathcal{D}_u \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

La (85) ammette la soluzione generale

$$\phi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (86)$$

dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti arbitrarie e

$$\beta^4 = \frac{m \omega^2}{EI} \quad (87)$$

Imponendo quattro condizioni ai limiti si ottiene un sistema omogeneo di quattro equazioni nelle costanti C_i ; annullando il determinante dei coefficienti si ricava l'equazione caratteristica (di tipo trascendente) che permette di determinare le frequenze proprie ω . Si esaminano alcuni casi particolari.

a) Trave appoggiata

Se le masse d'estremita' sono uguali a zero le condizioni al contorno risultano

$$\phi(0) = \phi(\ell) = 0, \quad \phi''(0) = \phi''(\ell) = 0$$

Le ultime due esprimono l'annullarsi del momento flettente agli estremi. Le condizioni in $x=0$ forniscono immediatamente $C_1 = C_3 = 0$; le condizioni in $x=\ell$ si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \sin \beta \ell & \sinh \beta \ell \\ -\sin \beta \ell & \sinh \beta \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (88)$$

Il sistema (88) ammette soluzione non banale se e' solo se (equazione caratteristica)

$$\sin \beta \ell \sinh \beta \ell = 0 \quad (89)$$

ovvero soltanto se $\beta = k\pi/\ell$ ($k=1,2,\dots$), dal momento che il seno iperbolico e' sempre positivo. Le autofrequenze risultano percio', dalla (87),

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (k=1,2,\dots) \quad (90)$$

I modi di vibrazione corrispondenti sono

$$\phi_k(x) = C_2 \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (k=1,2,\dots) \quad (91)$$

essendo anche $C_4 = 0$, come si ricava dalle (88). La costante C_2 puo' essere determinata dalla (12)



$$\int_0^l m \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (92)$$

che per $i=j$ fornisce $C_2 = \sqrt{2/(m\ell)}$. Il moto libero e' percio' descritto da (eq.(13)):

$$v(x,t) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (93)$$

dove a_k e b_k dipendono dalle condizioni iniziali.

b) Mensola

Considerando l'incastro in $x=0$, le condizioni al contorno sono (taglio e momento nulli in $x=\ell$):

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0, \quad \phi''(\ell) = \phi'''(\ell) = 0 \quad (94)$$

L'equazione caratteristica che si determina e'

$$\cos \beta \ell \cosh \beta \ell = -1 \quad (95)$$

che va risolta numericamente. Le prime tre frequenze e le corrispondenti forme modali sono rappresentate in fig.75.

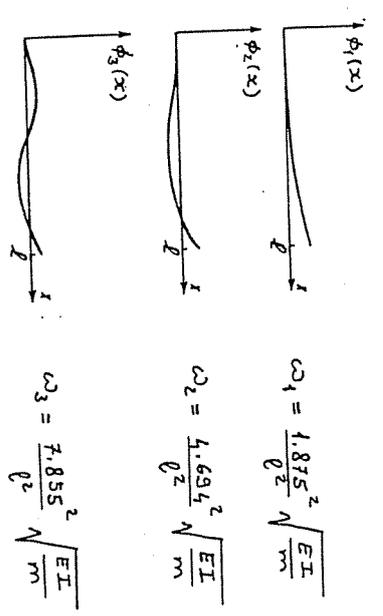


fig. 75

c) Trave libera agli estremi

Le condizioni ai limiti sono tutte meccaniche

$$\phi''(0) = \phi'''(0) = 0, \quad \phi''(\ell) = \phi'''(\ell) = 0 \quad (96)$$

e conducono all'equazione caratteristica

$$\cos \beta \ell \cosh \beta \ell = 1 \quad (97)$$

L'equazione ammette la radice $\beta=0$ a cui corrisponde l'autovalore $\omega=0$. In tal caso la soluzione della (85) e' un polinomio di quarto grado; imposte le condizioni al contorno (96) si ha

$$\phi(x) = d_1 + d_2 x \quad (98)$$

in cui d_1 e d_2 sono costanti indeterminate. $\omega=0$ e' quindi un autovalore multiplo di molteplicita' 2; cio' e' conseguenza del fatto che il sistema e' labile di grado 2 (al terzo grado di liberta' e' associato infatti un moto longitudinale). Ogni combinazione lineare delle autofunzioni $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_1(x) = x$ e' soluzione del problema agli autovalori; per rendere $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ ortormali secondo la (92) deve assumersi:

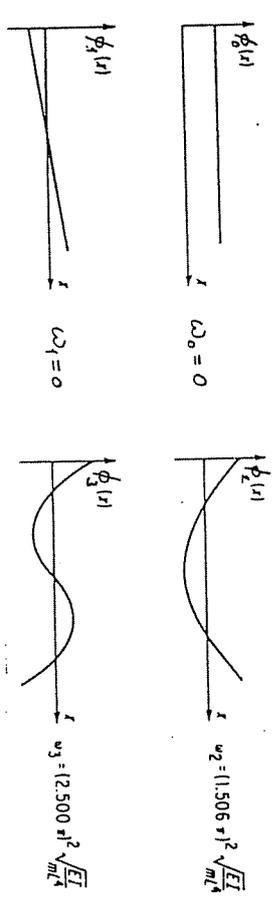


fig. 76



$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \sqrt{\frac{1}{m\ell}} \\ \phi_1(x) &= \sqrt{\frac{12}{m\ell^3}} \left(x - \frac{\ell}{2}\right)\end{aligned}\quad (99)$$

Le (99) descrivono due moti rigidi, una traslazione e una rotazione intorno al baricentro della trave; i modi elastici si determinano dall'eq. (86) dopo aver risolto numericamente l'equazione (99)*. I primi quattro modi e frequenze sono riportati in fig. 76.

10.9.3 Moto forzato: forza viaggiante

Nel caso in cui siano applicate alla trave forze attive non nulle variabili nel tempo con legge aperiodica e' necessario effettuare l'analisi modale. Le forze generalizzate (29) che appaiono nell'integrale di convoluzione (33) nel caso specifico si scrivono

$$\begin{aligned}P_k(t) &= \int_0^{\ell} p(x, t) \phi_k(x) dx + f_a(t) \phi_k(0) + \mu_n(t) \phi_k'(0) \\ &\quad + f_b(t) \phi_k(\ell) + \mu_n(t) \phi_k'(\ell)\end{aligned}\quad (100)$$

dove $\phi_k(x)$ e' la k-esima autofunzione, determinata nello studio del modo libero. Sostituendo le (100) nelle (33) si determinano le leggi $\xi_k(t)$ delle coordinate normali; la risposta si ottiene infine come

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \xi_k(t) \quad (101)$$

Quale applicazione del metodo si voglia analizzare il caso di una forza P_0 d'intensita' costante viaggiante su una trave appoggiata con velocita' uniforme V nella direzione positiva delle x . La legge della forzante e' percio' descritta da

$$P(x, t) = P_0 \delta(x - Vt) \quad (102)$$

dove $\delta(x)$ e' la funzione di Dirac ed inoltre si e' assunto come istante iniziale quello in cui la forza e' applicata in $x=0$. Le forze generalizzate (100) risultano percio'

$$P_k(t) = \int_0^{\ell} P_0 \phi_k(x) \delta(x - Vt) dx = \begin{cases} P_0 \phi_k(Vt) & (0 \leq t \leq \frac{\ell}{V}) \\ 0 & (t \geq \frac{\ell}{V}) \end{cases} \quad (103)$$

dove i modi normali sono dati dalla (31). Assunte condizioni iniziali di quiete la (33) fornisce, per $0 \leq t \leq \ell/V$:

$$\xi_k(t) = \frac{P_0}{\omega_k} \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \int_0^t \sin \Omega_k \tau \sin \omega_k(t - \tau) d\tau \quad (104)$$

in cui ω_k e' dato dalla (90) ed inoltre si e' posto

$$\Omega_k = \frac{k\pi V}{\ell} \quad (105)$$

Per risolvere l'integrale (104) e' conveniente integrare due volte per parti e ottenere un'equazione nell'incognita. Si ricava cosi'

$$\int_0^t \sin \Omega_k \tau \sin \omega_k(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\Omega_k^2 - \omega_k^2} (\Omega_k \sin \omega_k t + -\omega_k \sin \Omega_k t) \quad (106)$$

per cui la risposta (101) e'

$$v(x,t) = \frac{2P_0}{m\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_k^2 - \omega_k^2} \left(\frac{\Omega_k}{\omega_k} \sin \omega_k t - \sin \Omega_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (107)$$

Derivando termine a termine la (107) si ottengono le sollecitazioni taglianti e flettenti. Si noti che la risposta risulta infinita (risonanza) se e' $\Omega_k = \omega_k$, se cioe' la velocita' assume uno dei valori critici

$$V_k = \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (108)$$

10.9.4 Spostamenti impressi

Nel paragrafo 10.5 si e' illustrata una tecnica generale per il calcolo della risposta di sistemi elastici soggetti a condizioni al contorno geometriche dipendenti dal tempo. Si vuole ora applicare il metodo a due problemi specifici, illustrati in fig.77.

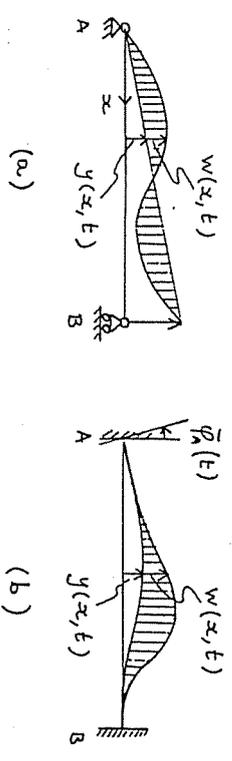


fig.77

a) Trave appoggiata

La trave sia sottoposta ad uno spostamento verticale impresso in $x=\ell$; le equazioni del moto (83) si scrivono

$$EI v'''' + m \ddot{v} = 0$$

$$v''(0,t) = v''(\ell,t) = 0$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(\ell,t) = \bar{v}_g(t) \quad (109)$$

cioe' sono del tipo (34). Per rendere omogenee le condizioni al contorno geometriche si opera il cambio di variabile

$$v(x,t) = y(x,t) + w(x,t) \quad (110)$$

dove la variabile ausiliaria $y(x,t)$ e' una funzione nota che, per quanto detto nel paragrafo 10.5, conviene scegliere quale soluzione del problema pseudostatico

$$EI y'''' = 0$$

$$y''(0,t) = y''(\ell,t) = 0$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(\ell,t) = \bar{v}_g(t) \quad (111)$$

Risolviendo le (111) si trova

$$y(x,t) = \bar{v}_g(t) \frac{x}{\ell} \quad (112)$$

cioe' si determina un moto rigido di rotazione intorno ad A; cio' e' conseguenza del fatto che la trave appoggiata e' un sistema cinematicamente determinato.

Nella nuova variabile $w(x,t)$ le equazioni del moto (109) si scrivono

$$EI w'''' + m \ddot{w} = -m \ddot{y}$$

$$w''(0,t) = w''(\ell,t) = 0$$

$$w(0,t) = w(\ell,t) = 0 \quad (113)$$



e le condizioni iniziali

$$w(x, 0) = v_0(x) - y_0(x) \quad (114)$$

$$\dot{w}(x, 0) = \dot{v}_0(x) - \dot{y}_0(x)$$

dove l'indice zero indica che le funzioni sono calcolate al tempo zero. Le (113) sono le equazioni del moto di una trave con vincoli non dipendenti dal tempo, sottoposta ad un carico distribuito $p(x, t) = -m\ddot{y}_0(x, t)$. Applicando l'analisi modale si determina la risposta $w(x, t)$, da cui ritornando alla variabile originaria $v(x, t)$ si ha

$$v(x, t) = y(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \phi_k(x) \quad (115)$$

dove

$$\begin{aligned} \xi_k(t) = & -\frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t-\tau) \int_0^l m \ddot{y}_0(x, \tau) \phi_k(x) dx d\tau + \\ & + \xi_k(0) \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \dot{\xi}_k(0) \sin \omega_k t \end{aligned} \quad (116)$$

Nelle (115), (116) le autofunzioni $\phi_k(x)$ e le frequenze ω_k sono date rispettivamente dalle (91) (in cui $c_2 = \sqrt{2l(m\ell)}$) e (90) ed inoltre e'

$$\begin{aligned} \xi_k(0) &= \int_0^l m \phi_k(x) [v_0(x) - y_0(x)] dx \\ \dot{\xi}_k(0) &= \int_0^l m \phi_k(x) [\dot{v}_0(x) - \dot{y}_0(x)] dx \end{aligned} \quad (117)$$

Ad esempio, se \bar{v}_g varia con legge sinusoidale $\bar{v}_g(t) = \bar{v}_g \sin \Omega t$ la (112) fornisce

$$y(x, t) = \bar{v}_g \frac{x}{\ell} \sin \Omega t$$

Assumendo condizioni iniziali di quiete $v_0(x) = \dot{v}_0(x) = 0$ dalle (117) si ha:

$$\begin{aligned} \xi_k(0) &= 0 \\ \dot{\xi}_k(0) &= -m \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \Omega \bar{v}_g \int_0^l \frac{x}{\ell} \sin k\pi x dx = \sqrt{2m\ell} \Omega \bar{v}_g \frac{(-1)^k}{k\pi} \end{aligned}$$

e la (116) si scrive:

$$\xi_k(t) = \frac{m\Omega^2}{\omega_k} \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \bar{v}_g \int_0^t \sin \omega_k(t-\tau) \sin \Omega \tau d\tau \int_0^l \frac{x}{\ell} \sin k\pi x dx + \frac{1}{\omega_k} \dot{\xi}_k(0) \sin \omega_k t$$

Risolvendo l'integrale nel tempo (vedi eq. (106)) e sostituendo nella (115) si ottiene infine

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \bar{v}_g \frac{x}{\ell} \sin \Omega t + 2\bar{v}_g \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega}{\omega_k} \frac{(-1)^k}{k\pi} [\sin \omega_k t + \\ & - \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_k^2} (\Omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \Omega t)] \sin \frac{k\pi x}{\ell} \end{aligned}$$

b) Trave incastata

La trave sia sottoposta ad una rotazione assegnata in $x=0$; le condizioni al contorno si scrivono

$$v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \quad v'(0, t) = \bar{\varphi}_n(t), \quad v'(\ell, t) = 0 \quad (118)$$

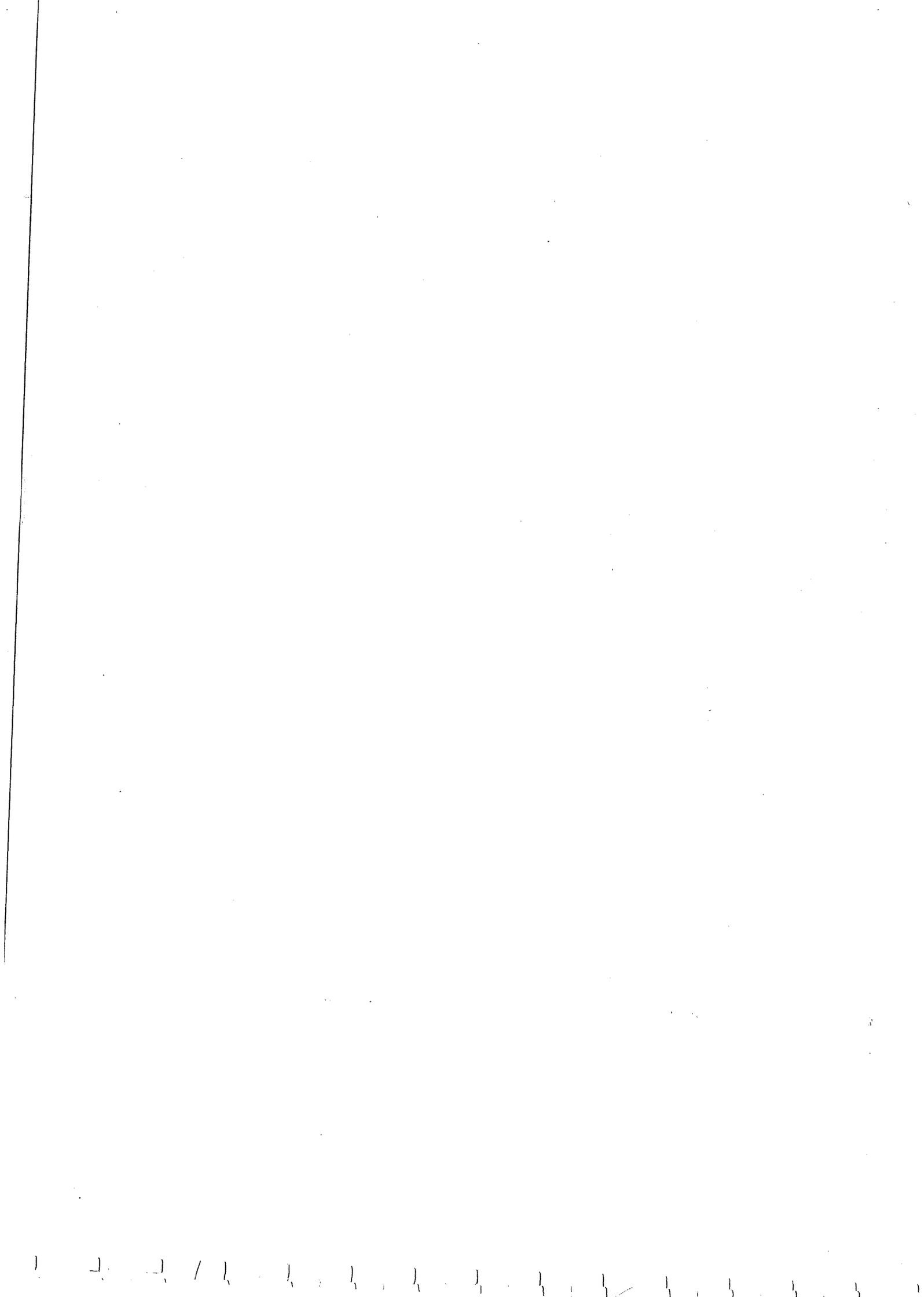
Procedendo come nel caso precedente occorre risolvere il problema pseudostatico con le condizioni al contorno

$$y(0, t) = y(\ell, t) = 0, \quad y'(0, t) = \bar{\varphi}_n(t), \quad y'(\ell, t) = 0 \quad (119)$$

da cui si determina (vedi eq. (7.33₂)):

$$y(x, t) = \left(x - 2\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \right) \bar{\varphi}_n(t) \quad (120)$$

Si noti che in questo caso, essendo la trave vincolata iperstaticamente, il moto pseudostatico e' di tipo elastico,



cosicche' ad esso sono associate deformazioni e tensioni variabili nel tempo.

La soluzione del problema e' ancora data dalle (115)-(117) salvo il diverso valore delle autofrequenze ω_k e la diversa espressione dei modi normali $\phi_k(x)$.

10.10 Cenni di dinamica dei continui bidimensionali:

membrana e piastra

L'analisi dinamica dei continui bidimensionali si sviluppa secondo i procedimenti generali illustrati nei paragrafi 10.2-10.5. Tuttavia le difficolta' analitiche, ancor piu' che nel caso elastostatico, rendono quasi sempre impossibile la determinazione in forma chiusa della soluzione per cui e' spesso necessario ricorrere a metodi approssimati. Qui ci si limita a determinare frequenze e modi propri di due sistemi molto semplici, gia' studiati nel caso statico, al solo fine di evidenziare alcune peculiarita' del comportamento meccanico dei sistemi bidimensionali.

a) Membrana rettangolare appoggiata

Si consideri una membrana rettangolare appoggiata sui quattro lati, tesa uniformemente da una forza (per unita' di lunghezza) N_0 , di massa m per unita' di superficie. Detto $w(x, y, t)$ lo spostamento trasversale, la forza d'inerzia e'

$$P^I(x, y, t) = -m \ddot{w}(x, y, t) \quad (121)$$

L'equazione del moto si ricava dalla (9.35) applicando il principio di D'Alembert:

$$N_0 \nabla^2 w - m \ddot{w} = 0 \quad (122)$$

mentre le condizioni al contorno impongono che sia $w=0$ su $\partial \mathcal{D}_w$. Si noti che la (122) e' l'equazione bidimensionale delle onde in cui $c = \sqrt{N_0/m}$ e' la velocita' di propagazione.

L'equazione ammette la soluzione armonica $w(x, y, t) = \phi(x, y) e^{i\omega t}$ dove $\phi(x, y)$ ed ω sono soluzione del problema agli autovalori

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \beta^2 \phi = 0 \quad (123)$$

$$\phi(0, y) = \phi(a, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, b) = 0 \quad (124)$$

in cui si e' posto

$$\beta^2 = \frac{m \omega^2}{N_0} \quad (125)$$

Una soluzione del tipo

$$\phi(x, y) = c \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (126)$$

con m ed n interi qualsiasi soddisfa le condizioni al contorno; sostituendo la (126) nella (123) e risolvendo rispetto a β si determina

$$\beta_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (127)$$

da cui, tramite la (125), si calcola la frequenza ω_{mn} corrispondente. La frequenza fondamentale ω_{11} (cioe' la piu' bassa), si ottiene per $m=n=1$, cioe' quando il modo



consta di una sola semionda nelle due direzioni; le frequenze superiori sono associate a modi con piu' semionde (+). Alcuni modi sono rappresentati in fig.78 con il riferimento ad una membrana quadrata (a=b).

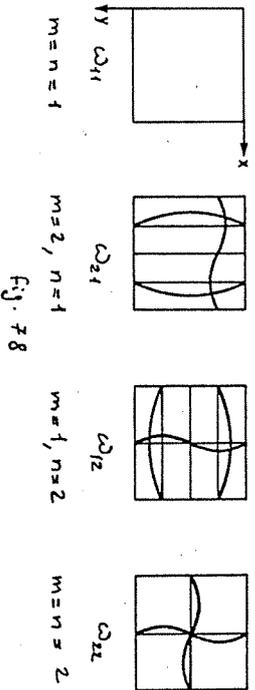


fig. 78

Un interessante effetto che puo' essere osservato sperimentalmente nella dinamica delle membrane (e di altre strutture bidimensionali) e' legato alla presenza di autovalori multipli. Ad esempio in una membrana quadrata e' $\omega_{21} = \omega_{12}$, cioe' si hanno due forme modali distinte $\phi_{21}(x,y)$ e $\phi_{12}(x,y)$ associate alla stessa frequenza. Se allora la membrana e' eccitata con una frequenza $\Omega \approx \omega_{21}$ il sistema oscilla con una forma che e' una combinazione lineare dei modi ϕ_{12} e ϕ_{21} . L'osservazione sperimentale e' che a piccole variazioni di Ω corrispondono rapide variazioni della forma d'oscillazione. La figura che segue (++) illustra alcune delle linee ncuali che si possono manifestare

(+) Si noti che, a differenza del filo e della trave appoggiata, le frequenze superiori non sono multipli interi della frequenza fondamentale. Cio' spiega perche' il suono di una membrana oscillante e' meno gradevole all'orecchio di quello di una corda tesa.
 (++) Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol 1, Interscience, New-York, p.302.

combinando linearmente i modi.

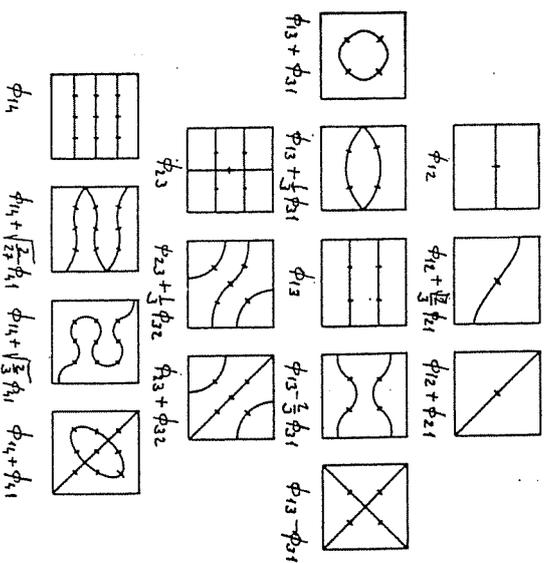


fig. 79

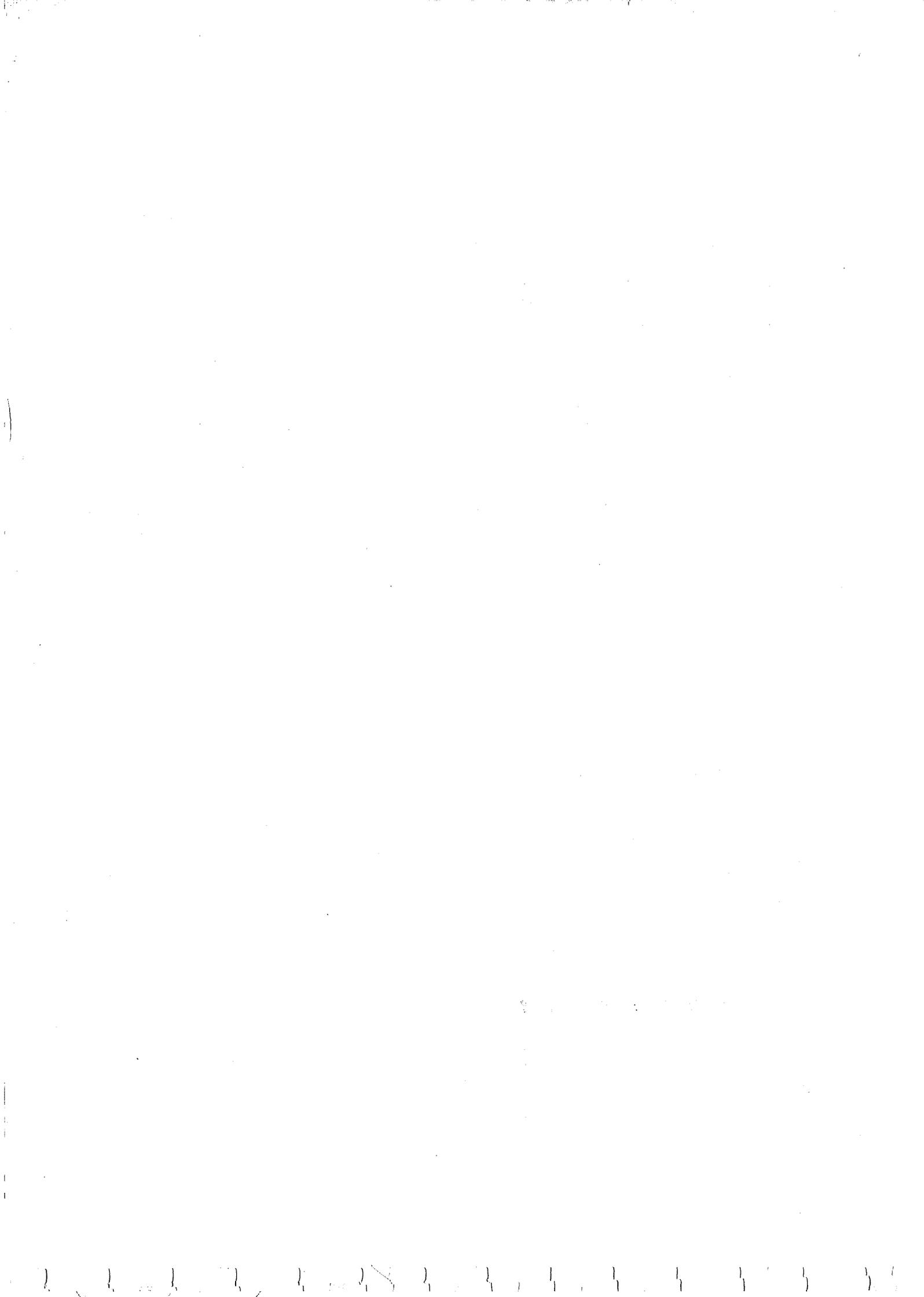
Come si puo' facilmente verificare, il fenomeno dei modi multipli si manifesta anche in membrane rettangolari in cui il rapporto tra le lunghezze dei lati e' un numero intero.

b) Piastrea rettangolare appoggiata

Il problema della piastra (indeformabile a taglio) e' analogo a quello della membrana. L'equazione del moto si scrive (vedi eq.(6.32))

$$D_f \nabla^4 w + m \ddot{w} = 0 \quad (128)$$

in cui m e' la massa per unita' di superficie. Le condizioni al contorno, identiche a quelle del problema statico, sono date dalle (6.39) e (6.41). Assumendo una soluzione armonica la (128) si scrive



$$\nabla^4 \phi - \beta^4 \phi = 0$$

(129)

in cui $\phi = \phi(x, y)$ e

$$\beta^4 = \frac{m \omega^2}{D_f}$$

(130)

La soluzione (126) soddisfa tutte le condizioni al contorno; sostituendo nella (129) si ricavano i medesimi valori di $\beta = \beta_{mn}$ dati dalla (127) per la membrana; le frequenze sono però diverse, stante la (130), e pari a

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D_f}{m}} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (131)$$

Anche per la piastra valgono le considerazioni fatte circa l'esistenza di autovalori multipli.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

APPENDICE: OPERATORI DIFFERENZIALI LINEARI

1. Definizioni. Condizioni al contorno L

Un operatore differenziale e' una trasformazione L che associa ad ogni funzione $w(x) \in \mathcal{W}$ una funzione $b(x) \in \mathcal{B}$, dove \mathcal{W} e \mathcal{B} sono spazi di funzioni:

$$Lw(x) = b(x) \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (1)$$

L'operatore L e' lineare se e' additivo e omogeneo:

$$L(w_1 + w_2) = Lw_1 + Lw_2 \quad (2)$$

$$L(\alpha w) = \alpha Lw$$

Un operatore differenziale e' definito dalla sua parte formale, cioe' dalla modalita' con cui opera su $w(x)$ per trasformarla in $b(x)$, e dal suo dominio, cioe' dall'insieme delle funzioni a cui viene applicato. Tali funzioni sono soggette a due tipi di restrizioni:

- a) devono essere sufficientemente regolari perche' ad esse possa essere applicato l'operatore;
- b) devono soddisfare certe condizioni al contorno.

Riguardo queste ultime valgono le seguenti considerazioni. Un sistema di equazioni differenziali con condizioni al contorno non omogenee

$$Lw = b \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$Bw = \bar{w} \quad \text{su } \mathcal{D}$$

(3)

si puo' sempre cambiare il contorno omogeneo di condizioni al contorno omogenee cambio di variabile

$$w = w_0 + \bar{y} \quad (4)$$

dove la funzione nota \bar{y} e' scelta in modo tale che sia

$$B\bar{y} = \bar{w} \quad \text{su } \mathcal{D} \quad (5)$$

$$Lw_0 = b - L\bar{y} \quad \text{in } \mathcal{D}$$

$$Bw_0 = 0 \quad \text{su } \mathcal{D}$$

Si noti che il cambio di variabile modifica solo il termine noto dell'equazione (sia in \mathcal{D} che su \mathcal{D}), ma non altera la struttura dell'operatore. Pertanto, nello studio delle proprietà dell'operatore, ci si puo' limitare a considerare condizioni al contorno omogenee $Bw = 0$. Queste condizioni sono infatti parte integrante dell'operatore; mentre eventuali valori assegnati al contorno appartengono, per così dire, al termine noto del problema differenziale (+).

2. Operatore aggiunto. Condizioni al contorno aggiunte.

Dato un operatore L , si dice aggiunto l'operatore

L^* che soddisfa l'identità bilineare (o di Green):

(+) Fare riferimento a condizioni omogenee e' inoltre necessario se si vuole che lo spazio di funzioni \mathcal{W} sia uno spazio vettoriale. In caso contrario infatti la somma di due elementi dell'insieme non appartiene all'insieme e viene violata una proprietà dello spazio vettoriale.



$$\int_{\mathcal{D}} v^T(x) L w(x) dV - \int_{\mathcal{D}} w^T(x) L^* v(x) dV = 0 \quad (6)$$

per ogni funzione $w(x)$, $v(x)$ sufficientemente regolare, che soddisfa opportune condizioni al contorno (**). L'operatore L^* viene determinato integrando per parti il primo termine in modo da "spostare" le derivate dalla variabile $w(x)$ alla $v(x)$; nell'operazione nascono termini ancora contorni, per cui in generale, non tenendo ancora conto delle condizioni su $\partial \mathcal{D}$ si ha:

$$\int_{\mathcal{D}} v^T(x) L w(x) dV - \int_{\mathcal{D}} w^T(x) L^* v(x) dV = \int_{\partial \mathcal{D}} F(w, v) dS \quad (7)$$

dove $F(w, v)$ è una funzione bilineare in w e v . La (7) è detta identità di Green estesa e permette di determinare l'operatore aggiunto anche le condizioni al contorno che definiscono il dominio di L^* . Oltre che i contorni aggiunti, che definiscono il minimo numero di condizioni infatti le condizioni su w , il minimo numero di condizioni necessarie e sufficienti ad annullare il termine assegnato infatti le condizioni su v . Come caso particolare queste condizioni possono mancare se le condizioni originarie sono tali da annullare l'integrale al contorno. Se risulta $L = L^*$ l'operatore è detto autoaggiunto.

Si noti l'analogia con l'identità $v^T A w = w^T A v$ che lega la matrice A alla sua trasposta. In tal caso i vettori w e v non sono soggetti a condizioni, se non quelle che discendono dalle dimensioni di A .

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(1) = 0$, $w'(1) = 0$ e' il dominio di interesse; in cui $L = d^2/dx^2$. Se $\mathcal{D} = [0, 1]$ e' il dominio per parti; (7) si scrive, integrando due volte per parti:

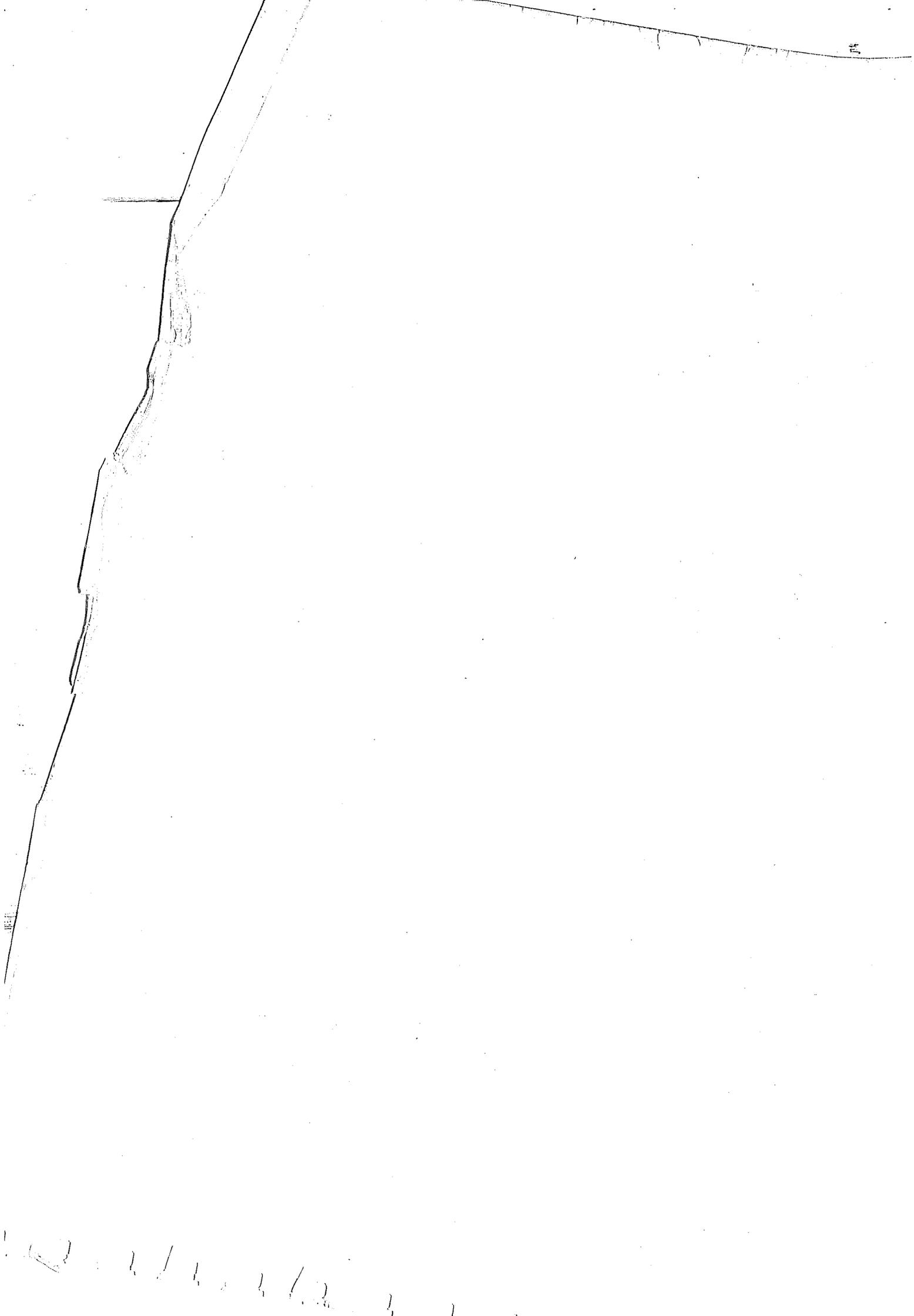
$$\int_0^1 v w'' dx = \int_0^1 w v'' dx + [v w' - v' w]_0^1 \quad (9)$$

da cui $L^* = L$, cioè L è autoaggiunto. Il termine al contorno si annulla in $x=0$ grazie alle (8₂) e, essendo $w(1)$ ed $w'(1)$ arbitrarie, si annulla in $x=1$ solo se $v(1) = 0$, $v'(1) = 0$

Le (10) costituiscono le condizioni al contorno aggiunte: le (8) sono noti che le condizioni in $x=0$, le (10) in $x=1$. Se oltre alle infatti imposte in $x=0$, le condizioni $w(1) = w'(1) = 0$ non si hanno condizioni aggiunte. (8) si impongono anche le condizioni al contorno aggiunte. Si

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b(x) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0, \quad w_2(1) = 0 \quad (12)$$



Moltiplicando scalarmente il primo membro della (11') per v_1^T ed integrando in $\mathcal{D} \equiv [0,1]$ si ha:

$$\int_0^1 [v_1^T(u_1'' - u_2) + v_2^T u_2'] dx = \quad (12)$$

$$= \int_0^1 [u_1 v_1'' - u_2 (v_1' + v_2')] dx + [v_1^T u_1' - v_1' u_1 + v_2^T u_2']_0^1$$

L'operatore aggiunto e' pertanto:

$$L^* = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ -1 & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix} \quad (13)$$

e le condizioni al contorno aggiunte sono:

$$v_2^T(0) = 0 \quad (13')$$

$$v_1^T(1) = v_1'(1) = 0$$

3. Problema omogeneo aggiunto

Dato il problema differenziale

$$Lu = b \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (14)$$

$$Bu = 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{D}$$

si definisce problema omogeneo aggiunto il problema

$$L^*v = 0 \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (15)$$

$$B^*v = 0 \quad \text{su } \partial\mathcal{D}$$

dove B^*v sono le condizioni al contorno aggiunte.

Sussiste un importante teorema: GNES perche' il problema differenziale (14) ammetta soluzione e' che

$$\int_{\mathcal{D}} b^T(x) v(x) dx = 0, \quad \forall v(x) \quad (16)$$

cioe' che il vettore dei termini noti sia ortogonale a tutte le soluzioni del problema omogeneo aggiunto. Se, come caso particolare, il problema aggiunto ammette solo la soluzione banale, il problema (14) ammette soluzione per ogni $b(x)$. La (16) e' detta condizione di compatibilita' (o di solubilita') per il problema (14).

Si noti che eventuali condizioni omogenee in (14) non modificano il problema aggiunto, ma solo l'equazione di compatibilita' in quanto modificano il termine noto b (eq.(5)).

Il problema (14) si dice autoaggiunto se e' $L = L^*$ ed inoltre $B = B^*$. Ad esempio il problema (8) non e' autoaggiunto perche', pur essendo $L = L^*$, le condizioni (8₂) non sono autoaggiunte.

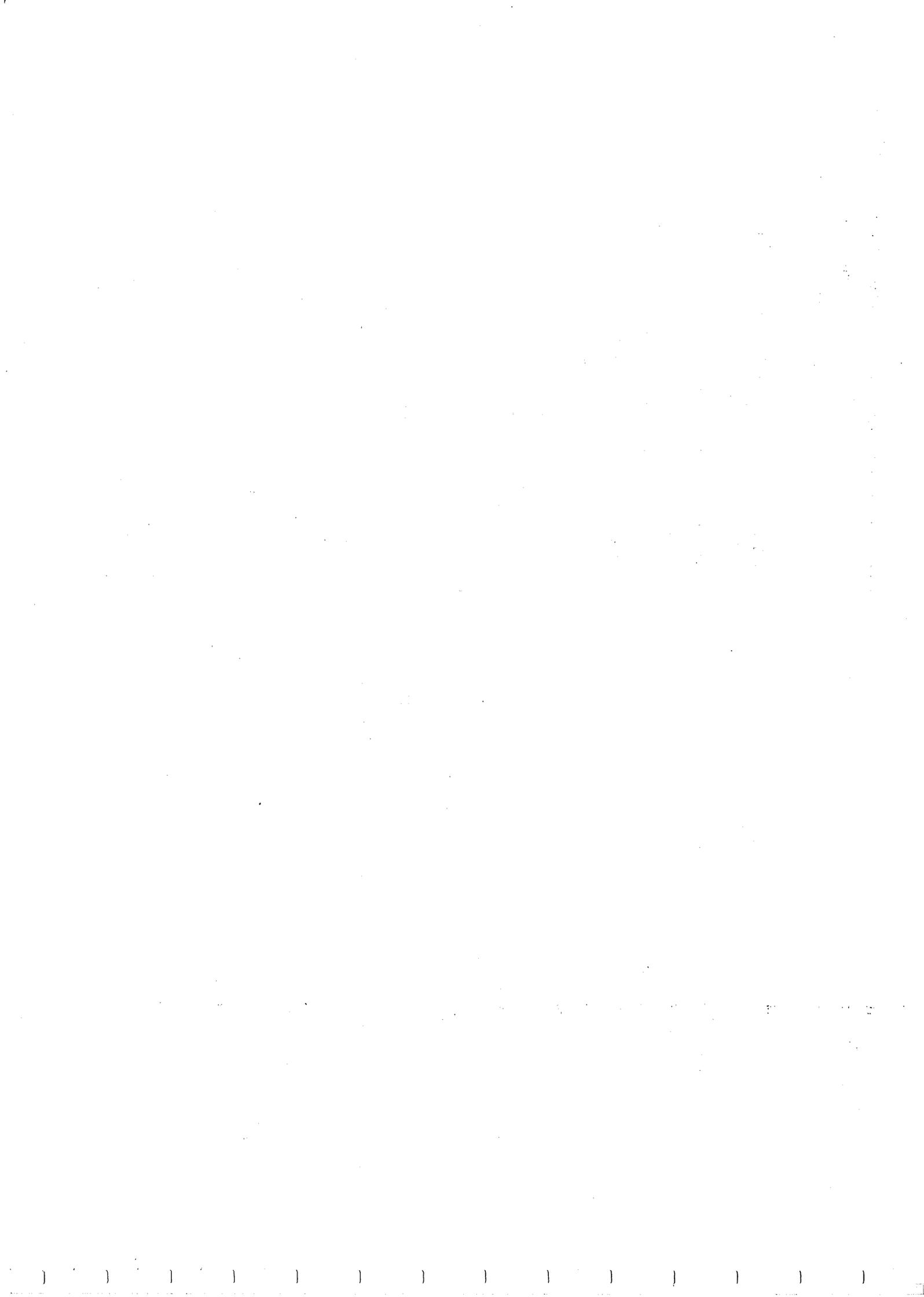
Come primo esempio si consideri il problema cinematico (1.1)

$$\begin{aligned} Du &= \varepsilon & \text{in } \mathcal{D} \\ u &= \bar{u} & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (17)$$

e il problema statico (1.2')

$$\begin{aligned} D^*s &= b & \text{in } \mathcal{D} \\ Ng &= f & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \end{aligned} \quad (18)$$

governati rispettivamente dagli operatori D e D^* . L'identita' di Green estesa si scrive (eq.(1.5)):



che mostra che $L = L^*$. Riguardo le condizioni al contorno, su $\partial\Omega_f$ e' $Bu = 0$ (condizione resa omogenea) per cui deve essere $v = 0$. Anche le condizioni al contorno sono autoaggiunte per cui il problema (27) e' autoaggiunto.

4. Problemi autoaggiunti e principi variazionali

Dato un problema autoaggiunto esiste sempre un principio variazionale da cui il problema puo' essere derivato, esiste cioe' un funzionale quadratico la cui condizione di stazionarieta' conduce al problema differenziale dato. Se inoltre l'operatore lineare e' definito positivo o definito negativo la condizione individua rispettivamente un minimo o un massimo del funzionale.

Sia per ipotesi $L = L^*$, $B = B^*$ nel problema (14); e' allora, per l'identita' di Green estesa,

$$\int_{\Omega} v^T L u \, dV = \int_{\Omega} u^T L v \, dV + \int_{\Omega} F(u, v) \, dV \quad (31)$$

dove $F(u, v) = 0$ quando $Bu = 0$, $B^*v = Bv = 0$. Sotto queste condizioni il principio variazionale

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T L u \, dV - \int_{\Omega} u^T b \, dV = \text{staz.} \quad (32)$$

e' equivalente al problema dato. Infatti, eguagliando a zero la variazione prima si ha:

$$\delta I = \int_{\Omega} \delta u^T \left(\frac{1}{2} L u - b \right) dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T L \delta u \, dV = 0, \quad \forall \delta u \quad (33)$$

dove u e δu soddisfano le condizioni $Bu = 0$, $B\delta u = 0$ su $\partial\Omega$. Integrando per parti l'ultimo termine (eq. (31)) con $v = \delta u$, tenuto conto che $F(u, \delta u) = 0$ su $\partial\Omega$ si ha:

$$\delta I = \int_{\Omega} \delta u^T (L u - b) \, dV = 0, \quad \forall \delta u \quad (34)$$

da cui si ottiene la (14).

La variazione seconda di I si scrive:

$$\delta_2 I = \int_{\Omega} \delta u^T L \delta u \, dV \quad (35)$$

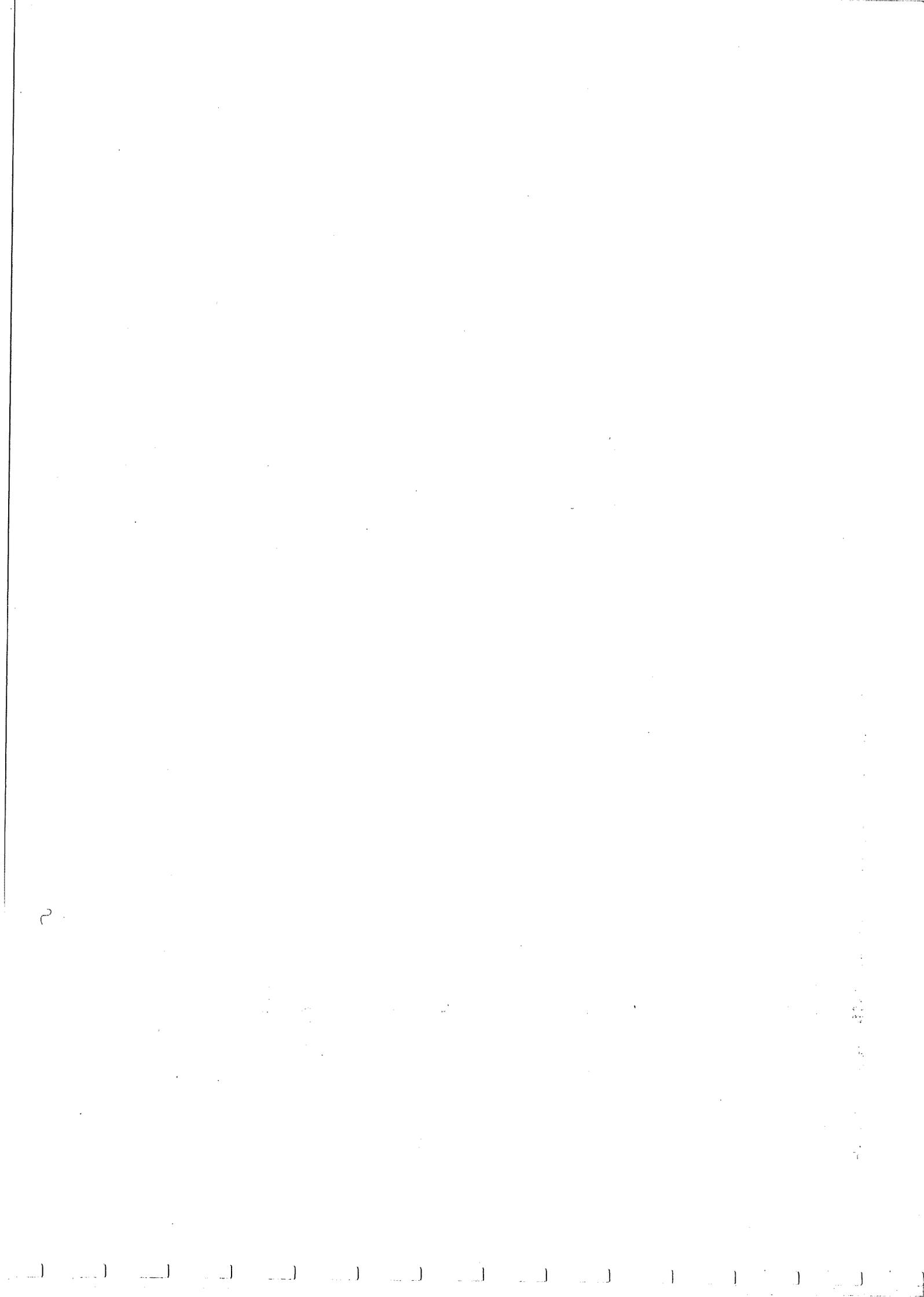
ed e' definita se e' definito l'operatore L .

Se invece il problema originario non e' autoaggiunto, se cioe' $L \neq L^*$, $B \neq B^*$ la (33) si scrive, facendo uso della (7),

$$\delta I = \int_{\Omega} \delta u^T \left[\frac{1}{2} (L + L^*) - b \right] dV - \int_{\Omega} F(u, \delta u) \, dV = 0 \quad (36)$$

e non fornisce il problema (14). Si noti che nella (36) l'operatore $L + L^*$ e' autoaggiunto; inoltre $F(u, \delta u) \neq 0$ su $\partial\Omega$ sotto le condizioni $Bu = 0$, $B\delta u = 0$, in quanto ora e' $B \neq B^*$.

In generale si dimostra che se il problema differenziale non e' autoaggiunto non e' possibile formulare un principio variazionale nella sola variabile u ma e' necessario allargare il funzionale alle variabili u , v dei due problemi aggiunti.



5. Operatori dipendenti da un parametro: problema agli autovalori.

Si consideri il problema differenziale (+)

$$\begin{aligned} Lu - \lambda Mu &= b & \text{in } \mathcal{D} \\ Bu - \lambda Cu &= f & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ u &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (37)$$

in cui gli operatori $L-\lambda M$ e $B-\lambda C$ dipendono linearmente da uno scalare λ . Si assuma inoltre che il problema (37) sia autoaggiunto per ogni λ , valgono cioè le identità di Green estese:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} u^T Lu \, dV &= \int_{\mathcal{D}} u^T L v \, dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (u^T B v - v^T B u) \, dS \\ \int_{\mathcal{D}} v^T M u \, dV &= \int_{\mathcal{D}} u^T M v \, dV + \int_{\partial\mathcal{D}} (u^T C v - v^T C u) \, dS \end{aligned} \quad (38)$$

Si vogliono risolvere le (37) ed in particolare determinare per quali λ , b ed f il problema ammette soluzione.

5.1 Problema agli autovalori

Si esaminino dapprima il problema omogeneo ottenuto dalle

$$(37) \text{ ponendo } b=0, \quad f=0:$$

(+) La condizione su $\partial\mathcal{D}_u$ può essere resa omogenea con un cambio di variabile.

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda Mu & \text{in } \mathcal{D} \\ Bu &= \lambda Cu & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ u &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (39)$$

I valori di λ per cui le (39) ammettono soluzione non banale sono detti autovalori e le corrispondenti soluzioni $u(x)$ sono dette autofunzioni; il problema (39) è detto problema agli autovalori.

Si dimostra che, poiché L ed M sono autoaggiunti, gli autovalori λ sono realtà; se inoltre L ed M sono definiti positivi gli autovalori sono positivi; se L ed M sono semidefiniti positivi gli autovalori sono positivi o nulli.

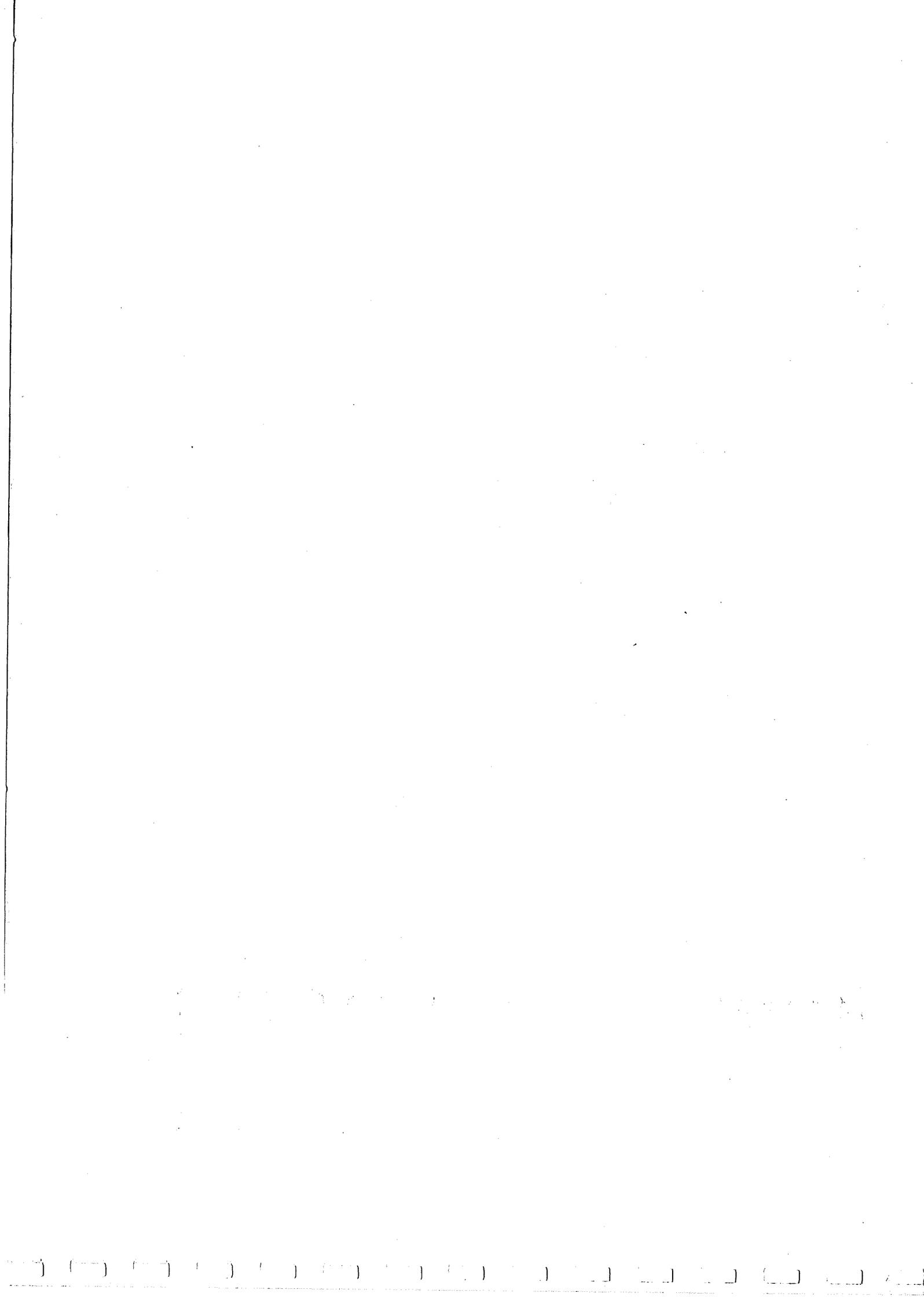
Si considerino due autovalori distinti λ_i e λ_j a cui corrispondono le autofunzioni $w_i(x)$ e $w_j(x)$. E', per definizione,

$$\begin{aligned} L w_i &= \lambda_i M w_i & \text{in } \mathcal{D} \\ B w_i &= \lambda_i C w_i & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ w_i &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (40)$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} L w_j &= \lambda_j M w_j & \text{in } \mathcal{D} \\ B w_j &= \lambda_j C w_j & \text{su } \partial\mathcal{D}_f \\ w_j &= 0 & \text{su } \partial\mathcal{D}_u \end{aligned} \quad (41)$$

Moltiplicando scalarmente le (40) per $w_j(x)$ e le (41) per $w_i(x)$ e integrando sul dominio si ha:



$$\int_{\mathcal{D}} u_j^T L u_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T B u_i dS = \lambda_i \left(\int_{\mathcal{D}} u_j^T M u_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T C u_i dS \right) \quad (42)$$

$$\int_{\mathcal{D}} u_i^T L u_j dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_i^T B u_j dS = \lambda_j \left(\int_{\mathcal{D}} u_i^T M u_j dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_i^T C u_j dS \right)$$

Sottraendo membro a membro le (42), tenuto conto delle (38), si ottiene:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \left(\int_{\mathcal{D}} u_j^T M u_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T C u_i dS \right) = 0 \quad (43)$$

Poiché $\lambda_i \neq \lambda_j$ deve essere uguale a zero la somma dei due integrali; questa condizione è detta di ortogonalità delle autofunzioni. Poiché peraltro le autofunzioni sono definite a meno di una costante arbitraria può porsi

$$\int_{\mathcal{D}} u_j^T M u_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T C u_i dS = \delta_{ij} \quad (44)$$

con δ_{ij} simbolo di Kronecker. La (44) è detta condizione di ortonormalizzazione e le autofunzioni che la soddisfano sono dette ortonormali. Dalle (42) e (44) discende anche che

$$\int_{\mathcal{D}} u_j^T L u_i dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T B u_i dS = \lambda_i \delta_{ij} \quad (45)$$

Se due autofunzioni distinte u_i ed u_j sono associate al medesimo autovalore (che viene detto multiplo) ogni loro combinazione lineare è soluzione del problema (37); tra le infinite soluzioni è possibile sceglierne due che

soddisfano le condizioni di ortogonalità. Analogamente per molteplicità maggiori. Si dimostra che le autofunzioni $u_i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) costituiscono un sistema ortonormale completo, nel senso precisato nel cap. 8.

5.2 Sviluppo in serie delle autofunzioni

Si ritorni ora al problema non omogeneo (37) e si ricerchi la soluzione $w(x)$ nella forma di serie delle autofunzioni $u_i(x)$:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x) \quad (46)$$

in cui i parametri a_i sono indeterminati. Poiché w e $u_i(x) = 0$ su $\partial\mathcal{D}_w$ (eq. (40)) la (37) è soddisfatta puntualmente qualunque siano gli a_i ; le (37), (2) danno invece luogo a dei residui R, τ :

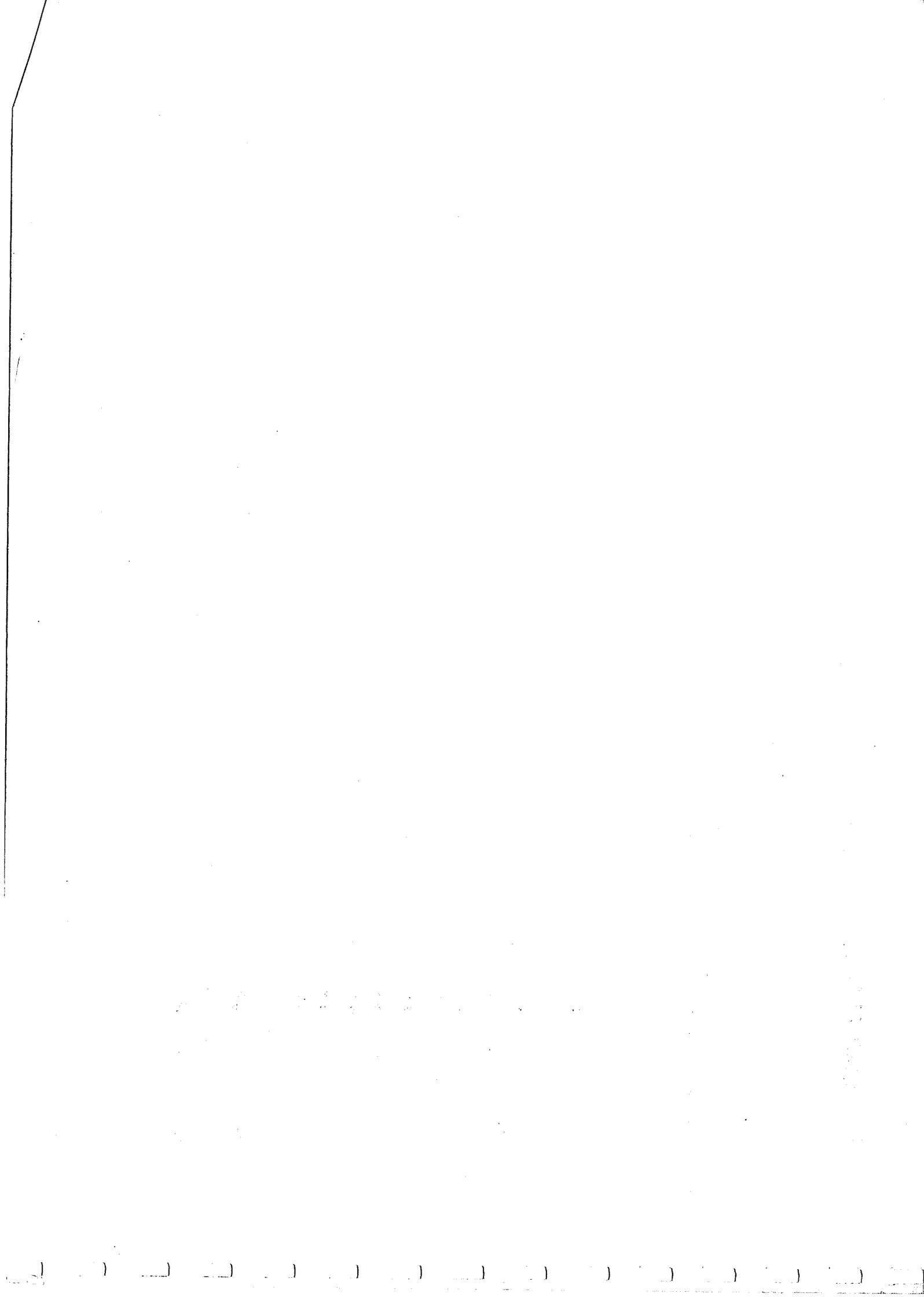
$$\sum_i a_i (L u_i - \lambda M u_i) - b = R \quad \text{in } \mathcal{D} \quad (47)$$

$$\sum_i a_i (B u_i - \lambda C u_i) - f = \tau \quad \text{su } \partial\mathcal{D}_f$$

avendo sostituito la (46) e tenuto conto della linearità degli operatori. La determinazione delle costanti a_i viene effettuata imponendo che i residui siano ortogonali a tutte le autofunzioni (metodo dei residui pesati):

$$\int_{\mathcal{D}} u_j^T R dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} u_j^T \tau dS = 0 \quad (j=1, 2, \dots) \quad (48)$$

Tenuto conto delle condizioni di ortonormalizzazione (44) e (45) la (48) fornisce:



$$\sum_i \alpha_i \delta_{ij} (\lambda_i - \lambda) = P_j \quad (j=1,2,\dots) \quad (49)$$

in cui

$$P_j = \int_{\mathcal{D}} b^T w_j dV + \int_{\partial\mathcal{D}_f} f^T w_j dS \quad (50)$$

e' il prodotto scalare del termine noto per la j -esima autofunzione. Dalla (49) si ricava:

$$\alpha_j = \frac{P_j}{\lambda_j - \lambda} \quad (51)$$

e la soluzione (46) si scrive

$$u(x) = \sum_i \frac{P_i}{\lambda_i - \lambda} u_i(x)$$

La (52) mostra che il problema (37) ammette soluzione solo se $\lambda \neq \lambda_i$, cioe' se il parametro λ non coincide con un autovalore. Se e' $\lambda = \lambda_i$ e' $u(x) = \infty$ a meno che non sia $P_i = 0$, cioe' a meno che il termine noto abbia proiezione nulla nell' i -esima autofunzione. Si noti che il risultato e' in accordo con la condizione di solvibilita' (16): per $\lambda = \lambda_i$ l'operatore differenziale e' singolare ed il problema omogeneo (coincidente con quello aggiunto) ammette la soluzione $u_i(x)$, per cui il termine noto deve essere ad essa ortogonale. In tal caso la soluzione esiste ma e' indeterminata, in quanto nello sviluppo (46) l'ampiezza α_i e' pari al rapporto zero su zero (eq.(51)).

