

A. Luongo - A. Paolone
MECCANICA DELLE STRUTTURE
SISTEMI RIGIDI AD ELASTICITÀ CONCENTRATA

Il testo si propone come strumento didattico a supporto dell'apprendimento della Scienza delle Costruzioni e delle discipline ad essa affini, collocandosi trasversalmente ai corsi di Statica (Architettura), Scienza delle Costruzioni (Architettura e Ingegneria), Scienza delle Costruzioni II e Teoria delle Strutture (Ingegneria). La presentazione della materia è fortemente innovativa; infatti tutti i principi fondamentali ed i metodi di calcolo, tradizionalmente esposti con riferimento ai mezzi continui, vengono qui illustrati e discussi con riferimento a strutture naturalmente discrete, costituite cioè da corpi rigidi (estesi o puntiformi) ed organi elastici. In questo modo il problema elastico può essere studiato con l'ausilio di soli strumenti algebrici.

Lo stile è improntato alla massima sintesi. Tutti i concetti sono illustrati con esercizi svolti (circa centottanta) e commentati con osservazioni (circa duecento). L'esposizione della teoria è sempre orientata all'applicazione. Sono previsti due livelli di approfondimento (con o senza osservazioni) e diversi percorsi di lettura parziale del testo.

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Angelo Luongo è Professore Ordinario di Scienza delle Costruzioni presso l'Università degli Studi di L'Aquila. Svolge attività di ricerca nel campo della biforcazione e stabilità delle strutture elastiche geometricamente non lineari, della dinamica lineare e non lineare, dei metodi perturbativi di soluzione dei problemi non lineari.

Achille Paolone è Ricercatore di Scienza delle Costruzioni presso l'Università degli Studi di L'Aquila. Svolge attività di ricerca nel campo della biforcazione e stabilità dei sistemi meccanici non lineari non conservativi.

ISBN 88-408-1132-X



9 788840 811321

CASA EDITRICE AMBROSIANA
 al pubblico € 32,00

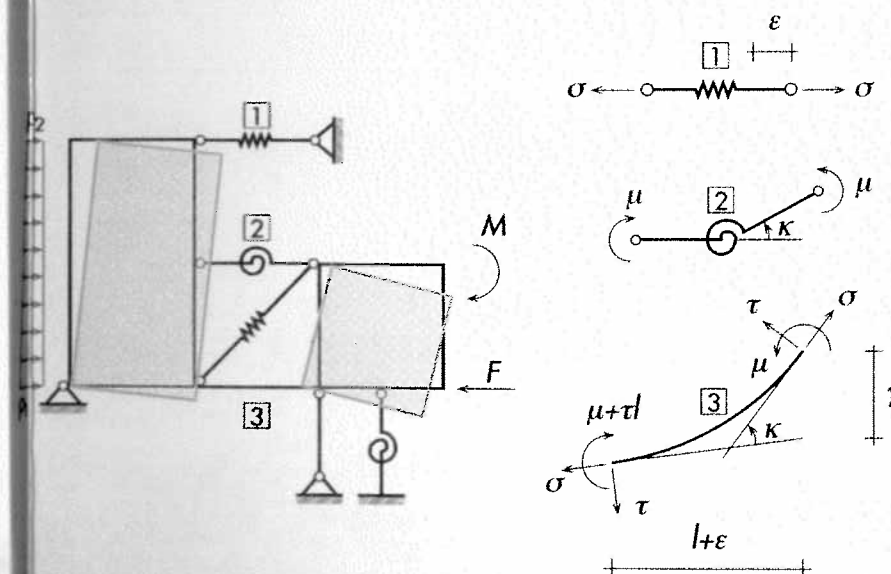


Angelo Luongo
Achille Paolone

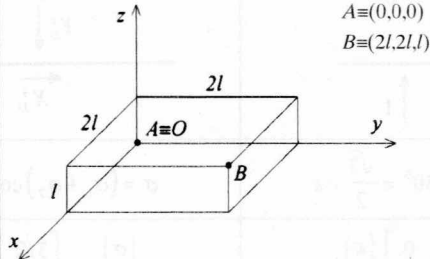
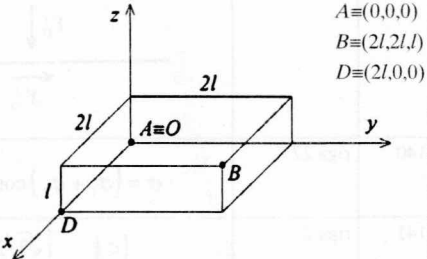
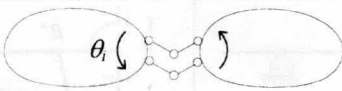
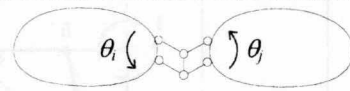
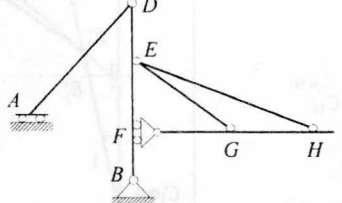
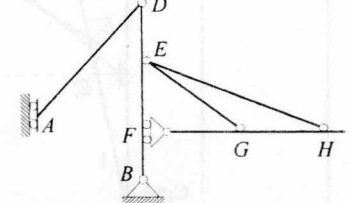
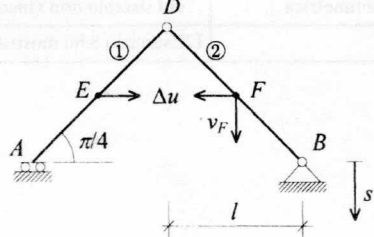
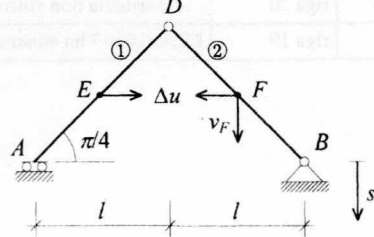
MECCANICA
DELLE STRUTTURE
SISTEMI RIGIDI
AD ELASTICITÀ CONCENTRATA

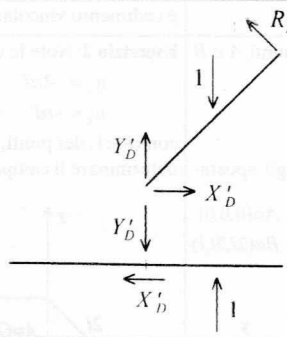
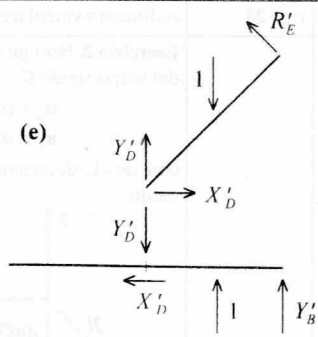
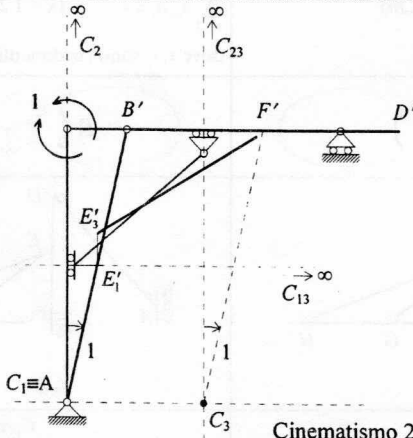
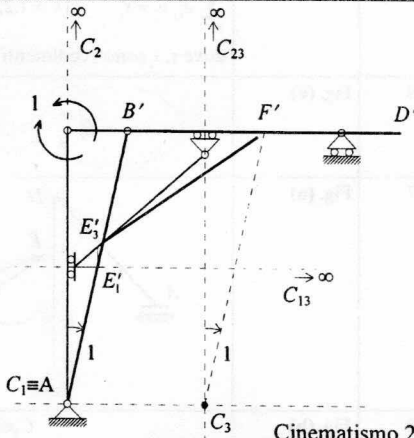
Angelo Luongo - Achille Paolone
MECCANICA DELLE STRUTTURE AD ELASTICITÀ CONCENTRATA

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI



CASA EDITRICE AMBROSIANA

Pagina	Riferimento	Errata	Corrige
XIV	riga 14	vettore delle incognite iperstatiche	χ vettore delle incognite iperstatiche
XIV	riga 17	matrice degli autovettori	Φ matrice degli autovettori
XIV	riga 28	cedimento vincolare rotazionale	ϕ cedimento vincolare rotazionale
6		<p>Esercizio 2: Noti gli spostamenti dei punti A e B del corpo rigido C</p> $\mathbf{u}_A = \alpha l (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ $\mathbf{u}_B = \alpha l (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ <p>con $\alpha \ll 1$, determinare il campo degli spostamenti.</p>  <p>$A \equiv (0,0,0)$ $B \equiv (2l, 2l, l)$</p> <p>È conveniente assumere il polo O coincidente con uno dei due punti, ad esempio A. È perciò $u_0 = -2\alpha l$, $v_0 = \alpha l$, $w_0 = -3\alpha l$. Scrivendo le (8) per $P=B$, si ha:</p> $\begin{Bmatrix} -\alpha l \\ -\alpha l \\ -\alpha l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\alpha l \\ \alpha l \\ -3\alpha l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ +\theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2l \\ 2l \\ l \end{Bmatrix}$	<p>Esercizio 2: Note le componenti di spostamento</p> $u_A = -2\alpha l \quad v_A = \alpha l \quad w_A = -3\alpha l$ $u_B = -\alpha l \quad v_B = -\alpha l \quad w_D = -5\alpha l$ <p>con $\alpha \ll 1$, dei punti, A B e D del corpo rigido C, determinare il campo degli spostamenti.</p>  <p>$A \equiv (0,0,0)$ $B \equiv (2l, 2l, l)$ $D \equiv (0, 2l, 0)$</p> <p>È conveniente assumere il polo O coincidente con il punto A. È perciò $u_0 = -2\alpha l$, $v_0 = \alpha l$, $w_0 = -3\alpha l$. Scrivendo le (8) per $P=B$ e D, si ha:</p> $\begin{aligned} -\alpha l &= -2\alpha l - 2l\theta_z + l\theta_y \\ -\alpha l &= \alpha l + 2l\theta_z - l\theta_x \\ -5\alpha l &= -3\alpha l - 2l\theta_y \end{aligned}$
15		$\sum_{i=1}^n a_{ki} u_i = s_i \quad (k=1,2,\dots,m)$ <p>dove s, s_i sono i cedimenti ...</p>	$\sum_{i=1}^n a_{ki} u_i = s_k \quad (k=1,2,\dots,m)$ <p>dove s, s_k sono i cedimenti ...</p>
18	Fig. (e)		
37	Fig. (a)		
50	Fig. (b)	$C_3 \equiv S$	$C_{13} \equiv S$
117	Fig. (a)		

Pagina	Riferimento	Errata	Corrige
120	riga 6	$\sum_{i=2} M'_A = 0 \Rightarrow Y'_B = \frac{3}{8}$	$\sum_{i=2} M'_A = 0 \Rightarrow Y'_B = -\frac{3}{8}$
120	riga 10	$\Delta v = \frac{3}{8} s$	$\Delta v = -\frac{3}{8} s$
120	Fig. (e)		
140	riga 27	$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} c \varepsilon$	$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \cos 30^\circ = \frac{3}{2} c \varepsilon$
141	riga 2	$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}$
153	riga 30	... di indeterminazione $l = d - n$ di indeterminazione $l = n - d$.
170	riga 11	...è $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{u}_q$, laè $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}$, la ...
199	Figg. (a) (b)	p	$p/2$
214	riga 8	$\sigma'_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right\}^T$	$\sigma'_2 = \left\{ \frac{1}{2l}, -\frac{1}{2l}, 0, 0, 1 \right\}^T$
242			
253	riga 20	... del sistema non vincolato è simmetrica del sistema non vincolato, $\hat{\mathbf{F}}$ è simmetrica..
277	riga 19	L'Esercizio 7 ha mostrato ...	L'Esercizio 8 ha mostrato ...

MECCANICA DELLE STRUTTURE

**SISTEMI RIGIDI
AD ELASTICITÀ CONCENTRATA**



DELLO STESSO EDITORE

Tecniche di progettazione

A. Cinuzzi, S. Gaudiano

L'architettura dell'equilibrio e della deformazione - Vol. I e II

A. Migliacci

Progetti di strutture

A. Migliacci

Progetto agli stati limite delle strutture in cemento armato - parte I e II

A. Migliacci, F. Mola

Progetto di strade

A. Ranzo, A. Scalamandr 

**Angelo Luongo
Achille Paolone**

**MECCANICA
DELLE STRUTTURE**
SISTEMI RIGIDI AD ELASTICIT  CONCENTRATA



CASA EDITRICE AMBROSIANA

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate a:

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'Ingegno (AIDRO)
via delle Erbe 2
20121 Milano
tel. e fax 02809506
e-mail: aidro@iol.it

Quando, ai sensi dell'art. 181 ter l. 633/1941, acquisterà efficacia il nuovo testo dell'art. 68, co. 4 l. 633/1941, introdotto dall'art. 2 l. 248/2000, la riproduzione a mezzo fotocopia potrà essere effettuata, per uso personale (cioè privato e individuale), con pagamento, da parte del responsabile del punto (o centro) di fotocopia, a SIAE del compenso di legge.

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale. La riproduzione a mezzo fotocopia degli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è pertanto consentita, senza limiti quantitativi. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Prima edizione Masson: 1997

Ristampa
4 3 2 1 2000 2001 2002 2003 2004

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:

C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana
via Gargano 21
20139 Milano
fax 02 5220226
e-mail: cearedaz@tin.it

Stampato da La Fenice Grafica
via Roma 71, Borghetto Lodigiano (LO)
per conto della C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana,
via Gargano 21, 20139 Milano

Indice

<i>Elenco dei principali simboli</i>	XI
<i>Elenco delle abbreviazioni</i>	XV
<i>Introduzione</i>	XVII
 Cap. 1 - Cinematica dei sistemi di corpi rigidi	
1.1 Spostamenti rigidi	1
1.1.1 Spostamento di un punto materiale	1
1.1.2 Formula generale dello spostamento rigido	1
1.1.3 Spostamenti rigidi infinitesimi	2
1.1.4 Spostamenti generalizzati	4
1.1.5 Spostamenti rigidi piani	6
1.1.6 Centro di rotazione	7
1.1.7 Sistemi di corpi rigidi	10
1.2 Vincoli	12
1.2.1 Condizioni di vincolo	12
1.2.2 Condizioni di vincolo linearizzate	14
1.2.3 Cedimenti vincolari	15
1.2.4 Classificazione dei vincoli piani	16
1.2.5 Equivalenza dei vincoli piani	19
1.2.6 Alcuni vincoli spaziali	20
1.3 Il problema cinematico	21
1.3.1 Posizione del problema	21
1.3.2 Il teorema di Rouché-Capelli	22
1.3.3 Classificazione cinematica	27
1.3.4 Classificazione diretta	34
1.3.5 Vincoli multipli	38
1.3.6 Distorsioni	40
1.4 Cinematica grafica	43
1.4.1 Centri di rotazione relativa e loro proprietà	43
1.4.2 Esempi di applicazione del metodo grafico	45

Cap. 2 - Statica dei sistemi di corpi rigidi	55
2.1 Sistemi di forze	55
2.1.1 Equazioni cardinali della statica	55
2.1.2 Forza e momento di una forza	56
2.1.3 Sistemi equivalenti di forze	58
2.1.4 Coppia	58
2.1.5 Operazioni elementari di equivalenza	59
2.1.6 Riduzione ad un polo di un sistema di forze	60
2.1.7 Sistemi piani di forze	63
2.1.8 Sistemi di corpi rigidi	65
2.1.9 Forze ripartite	66
2.2 Reazioni vincolari	71
2.2.1 Caratterizzazione statica dei vincoli	71
2.2.2 Classificazione dei vincoli piani	71
2.2.3 Equivalenza dei vincoli piani	73
2.2.4 Alcuni vincoli spaziali	74
2.3 Il problema statico	75
2.3.1 Le equazioni cardinali della statica	75
2.3.2 Classificazione statica	80
2.3.3 Classificazione diretta	85
2.3.4 Vincoli multipli; forze applicate a cerniere	86
2.3.5 Sollecitazioni interne	90
2.4 Metodi strategici di soluzione	74
 Cap. 3 - Dualità dei problemi cinematico e statico	
3.1 La dualità	95
3.1.1 Aspetti geometrici e dinamici	95
3.1.2 Il singolo corpo rigido	96
3.1.3 I sistemi di corpi rigidi	100
3.1.4 Altre proprietà di dualità: i sistemi impossibili e indeterminati	102
3.2 Il teorema dei lavori virtuali	102
3.2.1 Il lavoro virtuale	103
3.2.2 Il singolo corpo rigido	103
3.2.3 I sistemi di corpi rigidi	105
3.2.4 L'identità bilineare	106
3.2.5 I corollari del teorema dei lavori virtuali	108
3.3 Applicazioni del teorema dei lavori virtuali	111
3.3.1 Reazioni vincolari e sollecitazioni di sistemi staticamente determinati	111
3.3.2 Spostamenti di sistemi cinematicamente determinati	117
3.3.3 Sistemi cinematicamente/staticamente impossibili	121

Cap. 4 - Sistemi rigidi ad elasticità concentrata: stati locali di deformazione e tensione	
4.1 Introduzione	123
4.1.1 Limiti del modello rigido	123
4.1.2 Modello a deformabilità concentrata: analisi locale e globale	124
4.1.3 Organi deformabili monodimensionali	125
4.2 Cinematica: analisi locale della deformazione	125
4.2.1 Misura della deformazione	125
4.2.2 Matrice di congruenza locale	126
4.2.3 Stato di deformazione piano	127
4.3 Statica: analisi locale della tensione	128
4.3.1 Misura della tensione	128
4.3.2 Matrice di equilibrio locale	129
4.3.3 Stato di tensione piano	130
4.4 Dualità e lavoro virtuale interno	131
4.5 Legame elastico	132
4.5.1 Legame elastico lineare omogeneo	132
4.5.2 Energia potenziale elastica	133
4.5.3 Energia complementare elastica	135
4.5.4 Legame elastico lineare non omogeneo	136
4.6 Esempi di organi elastici	136
4.6.1 Organi elastici semidefiniti: dimensione elastica	136
4.6.2 Organi elastici semplici	137
4.6.3 Organi elastici composti	138
4.6.4 Travi piane elastiche	142
 Cap. 5 - Sistemi rigidi ad elasticità concentrata: stati globali di deformazione e tensione	
5.1 Il modello a deformabilità concentrata	147
5.2 Cinematica : analisi globale della deformazione	148
5.2.1 Il problema cinematico	148
5.2.2 La matrice di congruenza globale	149
5.2.3 Classificazione cinematica	151
5.2.4 Sistemi cinematicamente impossibili: le equazioni di compatibilità cinematica	152
5.2.5 Sistemi cinematicamente indeterminati: i modi rigidi	153
5.3 Statica: analisi globale della tensione	154
5.3.1 Il problema statico	154
5.3.2 La matrice di equilibrio globale	155
5.3.3 Classificazione statica	158
5.3.4 Sistemi staticamente indeterminati: le incognite iperstatiche	160
5.3.5 Sistemi staticamente impossibili: le equazioni di compatibilità statica	162

5.4	La dualità. Il teorema dei lavori virtuali	162
5.4.1	Le proprietà di dualità	162
5.4.2	Il teorema dei lavori virtuali	164
5.4.3	I corollari del teorema dei lavori virtuali	165
5.4.4	La formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili	166
5.4.5	Le condizioni di compatibilità statica e cinematica	170
5.5	Il legame elastico	171
5.5.1	La matrice elastica globale	171
5.5.2	L'energia potenziale elastica e l'energia complementare elastica	171
5.6	Sistemi con organi elastici molteplici	173

Cap. 6 - Il problema elastico

6.1	Formulazione del problema elastico	177
6.1.1	Posizione del problema	177
6.1.2	Le equazioni del problema elastico	178
6.1.3	Teorema di esistenza ed unicità	181
6.1.4	Metodi di soluzione del problema elastico	183
6.2	Il metodo degli spostamenti	186
6.2.1	Lo spirito del metodo	186
6.2.2	Il metodo diretto	187
6.2.3	I coefficienti di rigidità	189
6.2.4	Formulazione integrale: l'equazione dei lavori virtuali	190
6.2.5	Formulazione variazionale: il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale	192
6.3	Il metodo delle forze	194
6.3.1	Lo spirito del metodo	194
6.3.2	Il metodo diretto	195
6.3.3	Il significato geometrico delle equazioni di compatibilità cinematica: la formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili	200
6.3.4	I coefficienti di flessibilità	201
6.3.5	Il calcolo degli spostamenti nei sistemi iperstatici mediante la <i>FGSD</i>	202
6.3.6	Formulazione integrale: l'equazione dei lavori virtuali complementare	205
6.3.7	Formulazione variazionale: il teorema di stazionarietà dell'energia complementare elastica	207
6.4	Gli stati di coazione	209
6.4.1	Le equazioni del problema	209
6.4.2	Il metodo degli spostamenti	210
6.4.3	Il metodo delle forze	213
6.4.4	Le formulazioni integrali e variazionali	215

Cap. 7 - Il problema elastico per i sistemi vincolati

7.1	Le grandezze lagrangiane	217
7.1.1	Premessa	217
7.1.2	I parametri lagrangiani	217
7.1.3	Le equazioni lagrangiane di equilibrio	219
7.2	Analisi della deformazione	220
7.2.1	Le equazioni di congruenza	220
7.2.2	Sistemi cinematicamente impossibili: le equazioni di compatibilità cinematica	224
7.2.3	Sistemi cinematicamente indeterminati: i modi rigidi	225
7.3	Analisi della tensione	225
7.3.1	Le equazioni di equilibrio	225
7.3.2	Sistemi staticamente indeterminati: stati di autotenso-reazione	230
7.3.3	Sistemi staticamente impossibili: le equazioni di compatibilità statica	231
7.4	Dualità e teorema dei lavori virtuali	231
7.4.1	Le proprietà di dualità	231
7.4.2	Il teorema dei lavori virtuali nella forma estesa	232
7.4.3	Il teorema dei lavori virtuali nella forma lagrangiana	233
7.4.4	Le condizioni di compatibilità statica e cinematica	234
7.4.5	La formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili vincolati	236
7.5	Il problema elastico	238
7.5.1	Le equazioni del problema	238
7.5.2	Il metodo degli spostamenti	239
7.5.3	La formulazione integrale dell'equilibrio: l'equazione dei lavori virtuali	249
7.5.4	La formulazione variazionale dell'equilibrio: il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale	251
7.5.5	Il metodo delle forze	253
7.5.6	La formulazione integrale della congruenza: l'equazione dei lavori virtuali complementare	256
7.5.7	La formulazione variazionale della congruenza: il teorema di stazionarietà dell'energia complementare totale	258

Cap. 8 - Sistemi di travi elastiche

8.1	Modelli discreti di sistemi di travi	261
8.1.1	Strutture reticolari e telai	261
8.1.2	Sistemi di corpi puntiformi	262
8.1.3	Nodi orientati e non orientati	262
8.2	Strutture reticolari elastiche	263
8.2.1	Il sistema	263
8.2.2	Il problema cinematico	264
8.2.3	Il problema statico	267

8.2.4 Metodi strategici di soluzione del problema statico	270
8.2.5 Il problema elastico	272
8.3 Telai elastici	277
8.3.1 Il sistema	277
8.3.2 Il problema cinematico	278
8.3.3 Variazioni termiche	280
8.3.4 Il problema statico	282
8.3.5 Il problema elastico	285
8.4 Telai di travi inestensibili	294
8.4.1 Vincoli interni di inestensibilità	294
8.4.2 I parametri lagrangiani	295
8.4.3 Deformazioni e tensioni, attive e reattive	296
8.4.4 Equazioni lagrangiane di equilibrio	297
8.4.5 L'impiego dell'equazione dei lavori virtuali	298
8.4.6 Calcolo delle tensioni reattive e reazioni vincolari	299
8.4.7 Applicazioni	300

Cap. 9 - Introduzione ai problemi geometricamente non lineari: spostamenti finiti e teoria linearizzata

9.1 Il problema elastico geometricamente non lineare	309
9.1.1 Limiti della teoria lineare	309
9.1.2 Spostamenti e deformazioni finiti	310
9.1.3 L'equilibrio nella configurazione variata	312
9.1.4 La formulazione diretta del problema elastico geometricamente non lineare	314
9.1.5 Spostamenti infinitesimi del sistema deformato	316
9.1.6 La matrice di congruenza infinitesima del sistema deformato	319
9.1.7 Dualità	320
9.1.8 Il teorema dei lavori virtuali: la formulazione integrale dell'equilibrio	321
9.1.9 Il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale	322
9.2 La teoria linearizzata	324
9.2.1 L'analisi incrementale	324
9.2.2 Il problema elastico incrementale	324
9.2.3 La linearizzazione negli incrementi: l'equilibrio adiacente	326
9.2.4 Le equazioni dell'equilibrio adiacente in termini di spostamento	327
9.2.5 La scrittura diretta delle condizioni di equilibrio adiacente	331
9.2.6 La formulazione integrale dell'equilibrio	334
9.2.7 Applicazioni della formulazione integrale	336
9.2.8 La formulazione variazionale dell'equilibrio	338
9.2.9 Applicazioni della formulazione variazionale	342

Cap. 10 - Sistemi presollecitati: rigidità geometrica e biforcazione dell'equilibrio

10.1 Teoria linearizzata	345
10.1.1 Premessa	345
10.1.2 Posizione del problema	345
10.1.3 Le equazioni del problema	347
10.1.4 Formulazione agli spostamenti	347
10.2 Sistemi labili presollecitati	353
10.3 Biforcazione dell'equilibrio	358
10.3.1 Stati critici e punti di biforcazione	358
10.3.2 Biforcazioni di sistemi ad un grado di libertà	359
10.3.3 Biforcazioni di sistemi a più gradi di libertà	362
10.3.4 Proprietà di ortogonalità dei modi critici	368
10.3.5 Forze di disturbo e imperfezioni: sistemi ad un grado di libertà	369
10.3.6 Forze di disturbo e imperfezioni: sistemi a più gradi di libertà	372
10.3.7 Limiti della teoria linearizzata: cenni sul comportamento postcritico	375
10.3.8 Influenza degli spostamenti precritici	379
10.3.9 Formulazione integrale	383
10.3.10 Formulazione variazionale	386

Cap. 11 - Elementi di dinamica delle strutture

11.1 Il problema elastodinamico	391
11.1.1 Premessa	391
11.1.2 Posizione del problema	392
11.1.3 Forze d'inerzia	392
11.1.4 Matrice di massa	393
11.1.5 La formulazione diretta	398
11.1.6 La formulazione integrale	400
11.1.7 La formulazione variazionale	401
11.1.8 Sistemi definiti/semidefiniti: proprietà di $\hat{\mathbf{M}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$	404
11.2 La risposta libera	404
11.2.1 Le equazioni del moto	404
11.2.2 Moti armonici: frequenze e modi naturali	404
11.2.3 Sistemi cinematicamente semidefiniti: condensazione statica	407
11.2.4 Sistemi elasticamente semidefiniti: moti rigidi	408
11.2.5 Sistemi presollecitati	410
11.2.6 Proprietà di ortogonalità dei modi naturali	412
11.2.7 Soluzione generale delle equazioni del moto. Condizioni iniziali	413
11.3 La risposta a forzante armonica	416
11.3.1 Equazioni del moto	416
11.3.2 Soluzione generale	416
11.3.3 Risonanza	418

11.3.4 Spostamenti impressi	422
11.3.5 Limiti della teoria lineare: cenni di dinamica non lineare	425
11.4 Cenni di stabilità dell'equilibrio	429
11.4.1 Introduzione	429
11.4.2 Definizione di stabilità di una posizione di equilibrio	429
11.4.3 Stabilità dei sistemi elastici soggetti a forze conservative	430
11.4.4 Relazione tra gli esponenti caratteristici e gli autovalori della matrice di rigidezza	431
11.4.5 Interpretazione energetica: Teorema di Lagrange	432
11.4.6 Stabilità e biforcazione	432
11.4.7 Applicazioni	432

**Appendice A - Sistemi di equazioni lineari indeterminati e impossibili.
Identità bilineare**

A.1 Sistemi indeterminati	437
A.2 Sistemi impossibili	438
A.3 Proprietà di dualità	439
A.4 Problemi aggiunti: l'identità bilineare	440

Appendice B - Il problema agli autovalori

B.1 Il problema simmetrico in forma non standard	441
B.2 Proprietà di autovalori e autovettori del problema non standard	442
B.3 Rapporto di Rayleigh. Matrici definite positive	444
B.4 Il problema agli autovalori in forma standard	444
B.5 Decomposizione di una matrice simmetrica definita positiva	445
B.6 Riduzione alla forma standard del problema non standard	445
B.7 Soluzione del problema non omogeneo nella base degli autovettori	446

<i>Indice delle Osservazioni</i>	447
----------------------------------	-----

<i>Indice degli Esercizi</i>	451
------------------------------	-----

Avvertenza

La numerazione di Equazioni, Paragrafi, Figure, Osservazioni ed Esercizi è reinizializzata all'inizio di ciascun capitolo (numerazione contratta). Rimandi ad altri capitoli sono preceduti dal numero del capitolo in carattere grassetto (ad esempio: la terza equazione del primo capitolo è richiamata come Eq. 3 nel capitolo, e come Eq. 1.3 negli altri capitoli). La ricerca dei paragrafi è facilitata dalla numerazione (estesa) posta sulla testatina delle pagine dispari; quella di osservazioni ed esercizi da un apposito indice posto a fine testo.

Elenco dei principali simboli

\mathbf{a}_k	vettore di influenza su η_k degli spostamenti generalizzati
\mathbf{b}_k	vettore di riduzione ad un polo della forza \mathbf{F}_k
\mathbf{d}	vettore delle funzioni non lineari di congruenza
\mathbf{e}	versore di una retta
\mathbf{f}	vettore delle forze attive generalizzate
\mathbf{f}_v	vettore delle forze vincolari generalizzate
\mathbf{f}_e	vettore delle forze elastiche generalizzate
\mathbf{f}^I	vettore delle forze d'inerzia generalizzate
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	versori ortonormali di una base
\mathbf{m}	vettore delle coppie interne
\mathbf{p}	vettore delle forze attive lagrangiane
\mathbf{p}^I	vettore delle forze d'inerzia lagrangiane
\mathbf{p}_s	vettore delle forze lagrangiane associate ai cedimenti vincolari
$\bar{\mathbf{p}}$	vettore delle forze lagrangiane associate alle deformazioni imposte
\mathbf{q}	vettore dei parametri lagrangiani
$\bar{\mathbf{q}}$	vettore dei parametri lagrangiani di presollecitazione
$\dot{\mathbf{q}}$	vettore dei parametri lagrangiani incrementali; vettore velocità dei parametri lagrangiani
\mathbf{r}	vettore delle reazioni vincolari
\mathbf{r}_x	vettore delle autoreazioni
\mathbf{s}	vettore dei cedimenti vincolari
\mathbf{t}	vettore delle forze interne
\mathbf{u}	vettore degli spostamenti generalizzati
$\bar{\mathbf{u}}$	vettore degli spostamenti generalizzati di presollecitazione
$\dot{\mathbf{u}}$	vettore degli spostamenti generalizzati incrementali; vettore velocità degli spostamenti generalizzati
\mathbf{u}_P	vettore spostamento del punto P
\mathbf{u}_q	vettore degli spostamenti generalizzati congruenti con cedimenti o deformazioni nulle
\mathbf{x}_P	vettore posizione del punto P

A	matrice di congruenza dei sistemi rigidi
B	matrice di equilibrio dei sistemi rigidi
C	matrice elastica
D	matrice di congruenza dei sistemi deformabili non vincolati
\hat{D}	matrice di congruenza dei sistemi deformabili vincolati
E	matrice di equilibrio dei sistemi deformabili non vincolati
\hat{E}	matrice di equilibrio dei sistemi deformabili vincolati
F	matrice di flessibilità; vettore forza
G	matrice geometrica
H	matrice di deformabilità
I	matrice identità
K	matrice di rigidezza dei sistemi non vincolati
\hat{K}	matrice di rigidezza dei sistemi vincolati
M	matrice di massa dei sistemi non vincolati; coppia
\hat{M}	matrice di massa dei sistemi vincolati
M(O)	momento di una forza rispetto al polo O
Q	matrice di compatibilità cinematica, dei sistemi rigidi e dei sistemi deformabili non vincolati
\hat{Q}	matrice di compatibilità cinematica, dei sistemi rigidi e dei sistemi deformabili vincolati
R	matrice delle autoreazioni dei sistemi rigidi; vettore reazione vincolare
\hat{R}	matrice delle autoreazioni dei sistemi deformabili vincolati
S	matrice delle autotensioni dei sistemi non vincolati
\hat{S}	matrice delle autotensioni dei sistemi vincolati
U	matrice dei modi cinematici, dei sistemi rigidi e dei sistemi deformabili non vincolati
\hat{U}	matrice dei modi cinematici dei sistemi deformabili vincolati
V	matrice di compatibilità statica, dei sistemi rigidi e dei sistemi deformabili non vincolati
\hat{V}	matrice di compatibilità statica dei sistemi deformabili vincolati
c	coefficiente elastico
d	dimensione elastica
g	coefficiente di rigidezza geometrica
h	coefficiente di deformabilità
k	coefficiente di rigidezza elastica
l	grado di labilità
m	molteplicità dei vincoli
n	numero dei g.d.l.
n_c	numero dei corpi
n_e	numero degli organi elastici
n_v	numero dei vincoli

p	forze attive ripartite; forza lagrangiana; rango di una matrice
p^I	forze d'inerzia ripartite
q	parametro lagrangiano
r	grado di iperstaticità
s	cedimento vincolare
t	tempo
u, v, w	componenti di spostamento
x, y, z	coordinate
C_i	centro di rotazione assoluto del corpo <i>i</i>
C_{ij}	centro di rotazione relativo tra i corpi <i>i</i> e <i>j</i>
F	forza attiva
F^I	forza d'inerzia
\bar{F}	forza attiva di presollecitazione
\dot{F}	forza attiva incrementale
H	hamiltoniana
L_a	lavoro virtuale attivo
L_e	lavoro virtuale esterno
L_i	lavoro virtuale interno
L_v	lavoro virtuale vincolare
M_A	coppia applicata nel punto A
M_a	momento di una forza rispetto all'asse <i>a</i>
R_A	reazione vincolare applicata nel punto A
T	energia cinetica; temperatura
U	energia potenziale totale
V	energia complementare totale
W	lavoro delle forze attive
X, Y, Z	componenti di forza, attiva e vincolare
C	configurazione naturale di un sistema deformabile
\bar{C}	configurazione di presollecitazione di un sistema deformabile
C'	configurazione variata di un sistema deformabile
C_i	corpo rigido <i>i</i> -esimo
F	sistema di forze
L_i	lavoro interno o di deformazione
P	posizione di un corpo rigido
ε	vettore deformazione
$\bar{\varepsilon}$	vettore deformazione imposta; vettore di predeformazione
$\dot{\varepsilon}$	vettore deformazione incrementale

η	vettore componenti di spostamento; vettore coordinate normali
η_0	vettore spostamenti del sistema principale, dovuti ai carichi
η_s	vettore spostamenti del sistema principale, dovuti ai cedimenti
$\bar{\eta}$	vettore spostamenti del sistema principale, dovuti a deformazioni imposte
θ	vettore rotazione
κ	vettore curvatura
μ	vettore momento
ξ	vettore delle forze modali
ρ	vettore delle ampiezze dei modi rigidi dei sistemi vincolati
σ	vettore tensione
$\bar{\sigma}$	vettore pretensione
$\dot{\sigma}$	vettore tensione incrementale
σ_χ	vettore delle autotensioni vettore delle incognite iperstatiche
Θ	matrice rotazione
Λ	matrice degli autovalori matrice degli autovettori
γ	deformazione a taglio; esponente caratteristico
ε	deformazione estensionale
η	componente di spostamento; coordinata normale
θ	rotazione di un corpo rigido
κ	curvatura
λ	autovalore; snellezza della trave
μ	momento flettente
ρ	densità di massa; giratore di inerzia
σ	tensione normale
τ	tensione tangenziale cedimento vincolare rotazionale
φ	rotazione di un organo elastico
χ	incognita iperstatica
ω	frequenza circolare
Θ	gradiente termico

Elenco delle abbreviazioni

<i>g.d.l.</i>	gradi di libertà
<i>CNES</i>	condizione necessaria e sufficiente
<i>ECE</i>	energia complementare elastica
<i>ECT</i>	energia complementare totale
<i>ELV</i>	equazione dei lavori virtuali
<i>ELVC</i>	equazione dei lavori virtuali complementare
<i>EPE</i>	energia potenziale elastica
<i>EPT</i>	energia potenziale totale
<i>FGSD</i>	formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili
<i>FGSR</i>	formula generale spostamento rigido
<i>SCR</i>	sistemi di corpi rigidi
<i>TLV</i>	teorema dei lavori virtuali
<i>TLVC</i>	teorema dei lavori virtuali complementare

Introduzione

1. Gli obiettivi

Il testo si propone come strumento didattico a supporto dell'apprendimento della Scienza delle Costruzioni e delle discipline ad essa affini. La presentazione della materia è fortemente innovativa; infatti, tutti i principi fondamentali ed i metodi di calcolo, che sono tradizionalmente esposti nella Scienza delle Costruzioni e nella Teoria delle Strutture con riferimento a mezzi continui ad una, due o tre dimensioni, vengono qui illustrati e discussi con riferimento a strutture naturalmente discrete, costituite cioè da corpi rigidi (estesi o puntiformi) ed organi elastici. In questo modo la struttura formale del problema elastico (e cioè la congruenza, l'equilibrio e il legame costitutivo, i metodi degli spostamenti e delle forze, le formulazioni dirette, integrali e variazionali), struttura che costituisce l'ossatura portante e l'aspetto maggiormente formativo della disciplina, può essere illustrata con l'ausilio di soli strumenti algebrici (il teorema di Rouché-Capelli), senza necessità quindi di ricorrere a complicazioni formali che, se mal recepite dal discente, si frappongono ad una chiara visione dello sviluppo logico del modello. In quest'ottica, dunque, l'apprendimento delle *tecniche* di analisi delle strutture continue è postposta all'apprendimento *dei principi metodologici*, che vengono illustrati in modo più semplice per i sistemi discreti.

2. I contenuti

Il volume contiene essenzialmente tre parti. La prima, costituita dai primi tre capitoli, si sviluppa a partire da tematiche tradizionali, quali la cinematica (Cap. 1) e la statica (Cap. 2) dei sistemi di corpi rigidi e il teorema dei lavori virtuali (Cap. 3). Tuttavia, già in questa fase, accanto all'illustrazione di metodi classici (analitici, grafici e grafico-analitici) relativi a sistemi cinematicamente/staticamente determinati, viene dato spazio ai sistemi staticamente/cinematicamente impossibili o indeterminati, in quanto prototipi di sistemi continui aventi le medesime caratteristiche formali (si pensi alle

funi, oppure alle lastre). Così, per i sistemi impossibili vengono sviluppate le equazioni di compatibilità cinematica (o esplicite di congruenza) e di compatibilità statica (condizioni sulle forze attive); per i sistemi indeterminati vengono definiti i modi cinematici e gli stati di autoreazione. In tutti i casi si dà ampio rilievo alle proprietà di dualità che legano gli operatori cinematici statici, e alla loro interpretazione in chiave meccanica.

La seconda parte del testo contiene i capitoli dal quarto all'ottavo. In essi viene formulato, risolto ed esemplificato il problema elastico. Nel Cap. 4 vengono introdotti in modo non banale i concetti fondamentali di deformazione e tensione, con riferimento ad un organo deformabile costituito da due nodi di estremità, dotati di orientazione, interagenti. Il sistema, anche se semplice, permette di illustrare concetti importanti, quali il gradiente dello spostamento e il gradiente rigido, la deformazione e la tensione, gli stati piani o spaziali di deformazione e tensione, le proprietà di dualità e il lavoro interno di deformazione, il legame elastico e le energie potenziale e complementare elastica. Si introduce poi in modo intuitivo il legame elastico di travi sottoposte a forze di estremità. Successivamente, nel quinto e sesto capitolo, si analizzano i sistemi costituiti da corpi rigidi ed organi elastici (sistemi a deformabilità concentrata), non vincolati, né al suolo né mutuamente. In particolare, nel Cap. 5 si formulano i problemi cinematico e statico e si mostra l'analogia formale con gli analoghi problemi relativi ai sistemi rigidi (modi rigidi e stati di autotensione nei sistemi indeterminati, nonché condizioni di compatibilità nei sistemi impossibili). Si discute inoltre l'impiego del teorema dei lavori virtuali (formula generale dello spostamento, per i sistemi sia isostatici che iperstatici). Nel Cap. 6 si formula il problema elastico: si danno le condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione, si illustrano le due diverse filosofie di soluzione (metodo degli spostamenti o delle forze) e i tre diversi approcci (formulazione diretta, integrale e variazionale); si studiano infine gli stati di coazione. Il Cap. 7 è dedicato ai sistemi vincolati. Vengono definiti i parametri lagrangiani e le equazioni lagrangiane di equilibrio; queste ultime sono ricavate come condizione di compatibilità statica del sistema rigido associato, ottenuto privando degli organi elastici la struttura originaria. Del teorema dei lavori virtuali si danno due formulazioni, una estesa (che coinvolge reazioni e cedimenti vincolari), l'altra in termini di grandezze lagrangiane. La prima, anche se più complessa, è però utile, perché formalmente identica a quella che si dà per il continuo deformabile vincolato. Tutti gli aspetti del problema elastico vengono rivisitati ed adattati al problema in questione. Il Cap. 8 è dedicato allo studio dei sistemi reticolari e dei telai, visti come strutture costituite da corpi puntiformi collegati da organi elastici (aste o travi) e vincolati al suolo. Per i telai, piuttosto che privilegiare gli aspetti operativi, si è preferito porre l'accento sugli aspetti metodologici, in modo da presentare la trattazione come caso particolare di quella sviluppata per i sistemi generici. Un paragrafo è dedicato ai telai assialmente rigidi: interpretata l'inesistibilità delle travi come un vincolo per il modello deformabile, l'analisi è sviluppata coerentemente con i metodi introdotti precedentemente per i sistemi vincolati.

La terza ed ultima parte del testo è dedicata ai problemi non lineari, alla biforcazione

e stabilità dell'equilibrio, nonché alla dinamica lineare. Il Cap. 9 fornisce elementi introduttivi dell'analisi geometricamente non lineare di strutture elastiche discrete, con approccio agli spostamenti. Dopo aver esposto il metodo diretto, si formulano in campo non lineare il teorema dei lavori virtuali e il teorema dell'energia potenziale totale. Dalla teoria non lineare viene poi fatta discendere la teoria linearizzata dei sistemi presollecitati, come singolo passo dell'analisi incrementale: vengono dedotte le equazioni incrementali dell'equilibrio e le forme incrementali del teorema dei lavori virtuali e dell'energia potenziale totale. L'interpretazione meccanica della matrice di rigidezza geometrica, introdotta nel nono capitolo, viene invece discussa nel Cap. 10. Viene prima illustrato il problema dell'equilibrio di sistemi labili presollecitati (tipo fune discreta), poi viene presentato il problema della biforcazione dell'equilibrio. Qui sono introdotti i concetti di carico critico, modo critico, percorso fondamentale e biforcato e fattore di amplificazione statica. Viene analizzato sinteticamente il comportamento postcritico di sistemi generici ad un grado di libertà, in presenza oppure no di imperfezioni, e vengono discussi criticamente i limiti della teoria linearizzata. Viene inoltre studiata l'influenza delle deformazioni precritiche sul carico di biforcazione. Il Cap. 11, infine, fornisce cenni di dinamica lineare, libera ed armonicamente forzata. Vengono introdotti i concetti di frequenza naturale, modo naturale, fattore di amplificazione dinamica e risonanza. Vengono esaminati i sistemi con matrice di massa o rigidezza semidefinita, che esibiscono delle frequenze infinite o nulle, o che possiedono rigidezza geometrica. Si forniscono brevi cenni sulla dinamica non lineare dell'oscillatore elementare, necessari a discutere in modo critico i limiti della teoria lineare, e si sottolinea l'analogia formale con il problema della biforcazione dell'equilibrio. Infine viene precisato da un punto di vista dinamico il concetto di stabilità dell'equilibrio, prima introdotto sulla base di sole considerazioni statiche.

Il testo si chiude con due appendici: la prima è relativa ai sistemi lineari sovra/sottodeterminati, e alle relative condizioni di solvibilità (compatibilità) e dualità; la seconda è relativa al problema algebrico agli autovalori posto in forma non standard, con relative proprietà di ortogonalità degli autovettori.

3. Lo stile

Lo stile di presentazione è improntato alla massima sintesi. Il concetto è prima esposto in modo astratto, quindi viene immediatamente illustrato con un esempio, poi viene commentato con una o più osservazioni. Gli esercizi, numerosissimi (circa centotanta, tutti svolti) accompagnano il lettore in un apprendimento graduale della materia. Spesso uno stesso tema è frazionato in più esercizi, in modo da facilitare l'assimilazione del procedimento. *L'esposizione della teoria è sempre orientata all'applicazione*, che è supposta di tipo manuale. Quindi, il formalismo operatoriale è utilizzato solo per chiarire i concetti, ma quasi mai per risolvere i problemi. Tuttavia le osservazioni (circa duecento) offrono due chiavi di lettura del testo, molto diverse tra loro: omettendole si impara ad "operare", cioè ad apprendere il metodo e a risolvere i problemi; studiandole si impara a "ragionare", cioè ad apprezzare le analogie, le differenze e le interpretazioni meccaniche dei procedimenti analitici, che costituisco-

no il tessuto della Scienza delle Costruzioni. Attraverso le osservazioni, dunque, si vuole da un lato stimolare la capacità critica del discente, e dall'altro aiutarlo in un processo di sintesi che è di grande utilità nell'apprendimento di una materia così vasta. Ovviamente questi approfondimenti possono essere rimandati ad una seconda lettura.

4. I percorsi di lettura

Il testo è strutturato in modo tale da permettere una lettura parziale. Infatti, alcune lievi sovrapposizioni tra i capitoli ed un'articolata rete di rimandi rendono possibile l'omissione di alcuni argomenti. Esistono perciò differenti percorsi di lettura, di seguito elencati in ordine crescente di approfondimento della materia.

Percorso 1 (Cap. 1÷3). Fornisce un'estesa visione dei problemi di cinematica e statica dei sistemi rigidi.

Percorso 2A (Cap. 1÷3, 5, 6 e Par. 8.1, 8.2). Fornisce una chiara conoscenza del problema elastico discreto, limitatamente ad organi elastici semplici (*molle*) e in assenza di vincoli; il problema è esemplificato dai sistemi reticolari dove l'introduzione dei vincoli è immediata.

Percorso 2B (Cap. 1÷6 e Par. 8.1÷8.3). Rispetto al percorso 2A fornisce una più profonda conoscenza dei concetti di deformazione e tensione; viene inoltre introdotta la trave come organo elastico complesso; vengono studiati i telai elastici.

Percorso 2C (Cap. 1÷8). Fornisce una completa conoscenza del problema elastico, discusso in presenza di vincoli ed organi elastici complessi (*travi*); vengono analizzati anche i telai di travi inestensibili.

Percorso 3A (Cap. 1÷8, 10). Oltre all'analisi del problema elastico discreto, introduce allo studio della biforcazione dell'equilibrio e quella dei sistemi labili presollecitati.

Percorso 3B (Cap. 1÷8, 10, 11). Aggiunge al percorso 3A l'illustrazione di alcuni elementi di Dinamica delle Strutture.

Percorso 4A (Cap. 1÷10). Inquadra la teoria linearizzata in una prospettiva più ampia, facendola discendere dal problema elastico geometricamente non lineare.

Percorso 4B (Cap. 1÷11). Aggiunge al percorso 4A l'illustrazione di alcuni elementi di Dinamica delle Strutture.

Il lettore che già conosce i principi fondamentali di cinematica e statica dei sistemi rigidi può senz'altro iniziare la lettura dal Cap. 4.

5. A chi è rivolto

Il testo si pone trasversalmente ai corsi di Statica (Facoltà di Architettura), Scienza delle Costruzioni (Architettura ed Ingegneria), Scienza delle Costruzioni II, Teoria delle Strutture (Ingegneria). La sua organizzazione in percorsi di lettura ne permette

usi diversi. I primi tre capitoli, infatti, sono di supporto a corsi tradizionali di Statica, di Scienza delle Costruzioni e al primo modulo di Scienza delle Costruzioni per il Diploma Universitario (*percorso 1*). Tuttavia, una revisione coraggiosa dei programmi di Statica, tenuto conto dei modesti requisiti di base richiesti al lettore, potrebbe introdurre numerosi elementi qui sviluppati nella seconda parte, alleggerendo così notevolmente il successivo corso di Scienza delle Costruzioni. La seconda parte del testo, con i suoi diversi livelli di approfondimento (*percorsi 2A, 2B, 2C oppure 3A*) è indicata per tutti i corsi sopra menzionati, il cui docente recepisca la validità di questa forma di didattica. La terza parte del testo è di ausilio ai corsi di approfondimento di Teoria delle Strutture e Scienza delle Costruzioni II (*percorsi 3 e 4*, con eventuale omissione dei primi tre capitoli). Il testo è anche consigliato agli studenti dei Dottorati di Ricerca in Ingegneria delle Strutture, che ovviamente conoscono la materia, ma che possono rileggerla in chiave diversa, in un'opera di risistemizzazione della propria conoscenza.

L'auspicio degli autori, comunque, è che questa forma innovativa di presentazione della materia possa essere interamente adottata, o almeno sperimentata, in un corso di Scienza delle Costruzioni per Ingegneri o Architetti. A valle di questo testo, infatti, utilizzando lo stesso formalismo operatoriale (differenziale, invece che algebrico) sarà possibile analizzare i sistemi continui: il mezzo continuo tridimensionale, le lastre, le piastre, l'asta, la trave, l'arco, il filo, la membrana, etc. Per ognuno di questi sistemi infatti, sarà sufficiente specializzare gli operatori, essendo già stata recepita dal discente l'intera problematica.

Ringraziamenti

Alla realizzazione di questo libro ha dato un importante contributo l'Arch. Gianluca Canofeni che con professionalità, dedizione e competenza ha realizzato le figure.

Gli autori intendono rivolgere un particolare ringraziamento al Dr. Giuseppe Piccardo per la revisione puntuale del testo; un ulteriore ringraziamento va ai Dr. Franco Di Fabio, Monica Pasca e Angelo Di Egidio per aver corretto le bozze di stampa.

Cinematica dei sistemi di corpi rigidi

1. Spostamenti rigidi

1.1 Spostamento di un punto materiale

Si consideri un corpo rigido C in due differenti posizioni \mathcal{P} e \mathcal{P}' (Fig. 1). Si assuma \mathcal{P} quale *posizione di riferimento* di C e \mathcal{P}' quale *posizione variata*. Sia E il generico elemento materiale del corpo, che occupa il punto P nella posizione \mathcal{P} ed il punto P' nella posizione \mathcal{P}' . Si definisce *spostamento dell'elemento E* il vettore

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{OP}' - \mathbf{OP} = \mathbf{PP}' \quad (1)$$

Poiché in \mathcal{P} esiste corrispondenza biunivoca tra gli elementi materiali e i punti dello spazio da essi occupati, si parla più semplicemente di *spostamento del punto P* , confondendo così l'elemento materiale E con il punto P occupato nella posizione (privilegiata) \mathcal{P} .

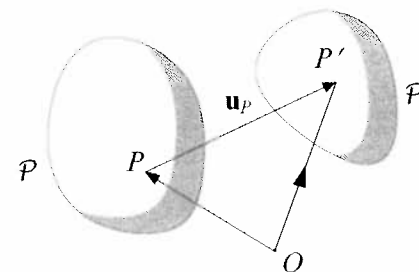


Fig. 1 Spostamento di un punto materiale

1.2 Formula generale dello spostamento rigido

Il generico spostamento del corpo, corrispondente alla trasformazione $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, può essere espresso come somma di una traslazione \mathbf{u}_0 e di una rotazione θ (si veda la Fig. 2). Si ottiene la seguente relazione vettoriale:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_0 + (\cos \theta - 1)\mathbf{CP} + \sin \theta \mathbf{e} \times \mathbf{CP} \quad (2)$$

La (2) è detta *formula generale dello spostamento rigido (FGSR)*. In essa \mathbf{u}_0 è il vettore spostamento di un punto O arbitrariamente scelto, considerato solidale a C , $\theta = \theta \mathbf{e}$ è un vettore rotazione applicato ad una retta a passante per O e C è la proiezione ortogonale di P su a (Fig. 2). La retta a prende il nome di *asse della rotazione*. Si dice che gli spostamenti sono stati “riferiti” o “ridotti” al polo O .

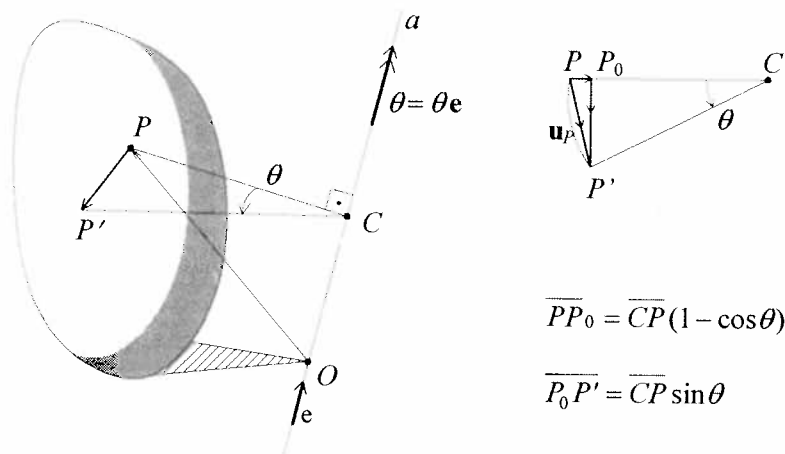


Fig. 2 Rotazione rigida finita

1.3 Spostamenti rigidi infinitesimi

Se le posizioni P e P' sono molto prossime, tanto che \mathbf{u}_0 e θ possono essere riguardati come infinitesimi del primo ordine, si può operare una notevole semplificazione della FGSR. Infatti, sviluppando in serie le funzioni circolari si ha: $\cos \theta = 1 + O(\theta^2)$ e $\sin \theta = \theta + O(\theta^3)$. Ritenendo solo i termini del primo ordine la (2) si scrive

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_0 + \theta \times \mathbf{OP} \quad (3)$$

in quanto $\theta \times \mathbf{CP} = \theta \times (\mathbf{CO} + \mathbf{OP}) = \theta \times \mathbf{OP}$. La (3) è la *formula generale dello spostamento rigido infinitesimo*; nel seguito, se non specificato diversamente, si farà riferimento ad essa come FGSR.

- **Osservazione 1.** La (3) può anche essere ottenuta a partire dalla relazione, nota dalla Meccanica Razionale,

$$\mathbf{V}_P(t) = \mathbf{V}_0(t) + \omega(t) \times \mathbf{OP}(t) \quad (4)$$

che esprime la velocità $\mathbf{V}_P(t)$ del generico punto P all'istante t in funzione della velocità $\mathbf{V}_0(t)$ del polo O e del vettore velocità angolare $\omega(t)$, applicato all'asse a . Moltiplicando la (4) per il tempuscolo dt , tenuto conto che gli spostamenti di P ed O in tale intervallo sono rispettivamente $d\mathbf{U}_P = \mathbf{V}_P dt$ e $d\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0 dt$, e che la rotazione è $d\theta = \omega dt$, si riottiene la (3) ove si indichi con $\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_0, \theta$ rispettivamente $d\mathbf{U}_P, d\mathbf{U}_0, d\theta$. Può quindi concludersi che la *cinematica degli spostamenti rigidi infinitesimi coincide con la cinematica degli atti di moto*.

- **Osservazione 2.** In una rotazione rigida infinitesima il punto P si sposta ortogonalmente al piano passante per a e per P (Fig. 3a); lo spostamento è pari in modulo al prodotto dell'ampiezza della rotazione θ per il braccio CP , distanza di P dall'asse della rotazione (Fig. 3b). L'arco di circonferenza descritto da P in una rotazione finita è approssimato dal segmento rettilineo $\overline{PP'}$.

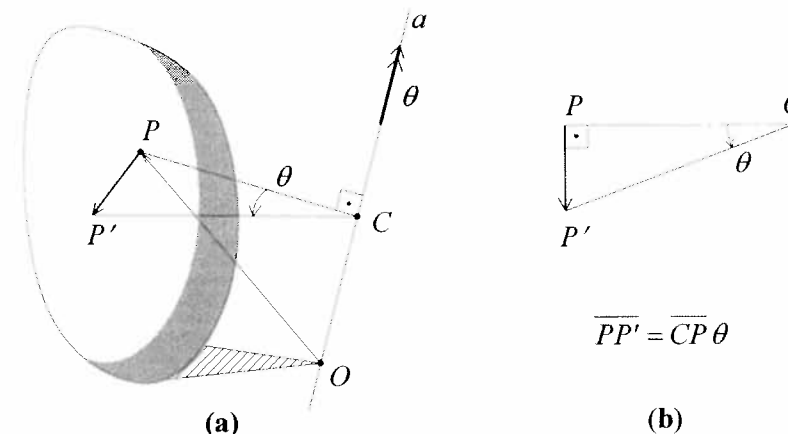


Fig. 3 Rotazione rigida infinitesima

- **Osservazione 3.** Le componenti di spostamento di due punti secondo la loro congiungente sono uguali. Detti infatti P e Q i punti, \mathbf{u}_P e \mathbf{u}_Q gli spostamenti, ed \mathbf{e}_{PQ} il versore della retta congiungente P e Q , dalla FGSR si ha (Fig. 4):

$$(\mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P) \cdot \mathbf{e}_{PQ} = \theta \times (\mathbf{OQ} - \mathbf{OP}) \cdot \mathbf{e}_{PQ} = (\theta \times \mathbf{PQ}) \cdot \mathbf{e}_{PQ} = 0 \quad (5)$$

La (5) è una conseguenza dell'ineestensibilità del segmento PQ ; infatti il primo membro rappresenta l'approssimazione lineare dell'allungamento del segmento PQ , come apparirà più chiaramente nel seguito (si veda anche l'Esercizio 4).

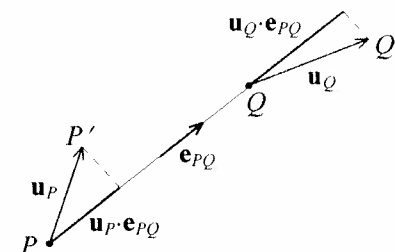


Fig. 4 Proprietà di inestensibilità dei segmenti rettilinei

Esercizio 1: Noti \mathbf{u}_0 e θ , modificare il polo di riferimento $O \in a$ in $\Omega \notin a$.

Dalla (3) applicata a $P = \Omega$ si ricava: $\mathbf{u}_\Omega = \mathbf{u}_0 + \theta \times \mathbf{O}\Omega$. Risolvendo rispetto ad \mathbf{u}_0 e sostituendo nella (3) si ha: $\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_\Omega + \theta \times (\mathbf{OP} - \mathbf{O}\Omega)$. Tenuto conto che $\mathbf{OP} = \mathbf{O}\Omega + \Omega\mathbf{P}$ si ottiene $\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_\Omega + \theta \times \Omega\mathbf{P}$. Lo spostamento \mathbf{u}_P è quindi descritto dalla traslazione \mathbf{u}_Ω e dalla rotazione θ applicata alla retta b parallela ad a passante per Ω , che infatti lascia inalterata la posizione di Ω .

1.4 Spostamenti generalizzati

Per ottenere la rappresentazione scalare della FGSR è necessario esprimere ciascun vettore in un riferimento ortogonale $Oxyz$ (Fig. 5):

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_0 &= u_0 \mathbf{i} + v_0 \mathbf{j} + w_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_P &= u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\theta} &= \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k}\end{aligned}\quad (6)$$

essendo $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i versori della base e (x, y, z) le coordinate di P . Ricordando che:

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (7)$$

la (3), scritta per componenti, diviene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & +\theta_y \\ +\theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & +\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Posto

$$\mathbf{u}_P = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & +\theta_y \\ +\theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & +\theta_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (9)$$

le (8) possono sinteticamente porsi nella forma simbolica:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{x}_P \quad (10)$$

La matrice antisimmetrica $\boldsymbol{\Theta}$ prende il nome di *matrice rotazione infinitesima*. Al variare di x, y, z , le (8) (o, equivalentemente le (10)) descrivono le funzioni $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, cioè il *campo degli spostamenti*. Note quindi le sei grandezze

$$\mathbf{u} = \{ u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z \}^T \quad (11)$$

è noto lo spostamento di ogni punto P del corpo. Le sei grandezze prendono il nome di *spostamenti generalizzati*. Essi costituiscono l'insieme dei parametri geometrici atti a definire le posizioni distinte del corpo. Il vettore \mathbf{u} , di dimensioni (6×1) , è il vettore degli spostamenti generalizzati. Gli spostamenti u, v, w sono *funzioni lineari* degli spostamenti generalizzati; ciò è conseguenza dell'ipotesi di spostamenti infinitesimi.

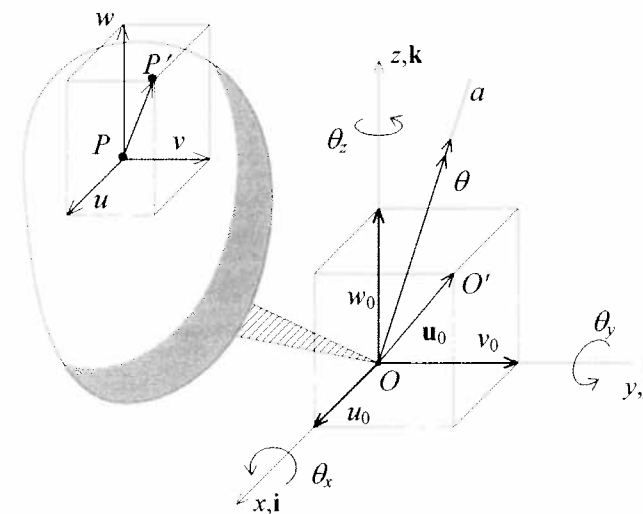


Fig. 5 Componenti di spostamento e di rotazione

- **Osservazione 4.** Se l'origine Ω del sistema di assi coordinati x, y, z non coincide con il polo O di riduzione degli spostamenti, le (7) e (8) assumono rispettivamente la forma

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & +\theta_y \\ +\theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & +\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{Bmatrix}$$

da cui, in forza delle posizioni (9), e posto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$, la (10) diviene:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0)$$

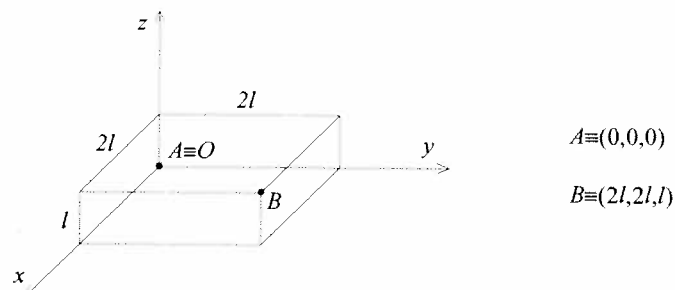
- **Osservazione 5.** Ogni corpo rigido può assumere ∞^6 posizioni nello spazio, una per ogni spostamento generalizzato. Si dice anche che *il corpo rigido ha sei gradi di libertà (g.d.l.)*. Questa proprietà non dipende dalla linearizzazione, ma è valida anche in regime di spostamenti finiti, come si evince dalla (2), che appunto dipende dalle sei componenti di \mathbf{u}_0 e $\boldsymbol{\theta}$.
- **Osservazione 6.** I gradi di libertà di un corpo rigido sono solo sei, a differenza di quelli di uno schema particellare che sono tre per ciascuna particella. Ciò è conseguenza del *vincolo di rigidità*, implicito nella FGSR, che impone che ogni spostamento lasci inalterate le mutue distanze tra gli elementi materiali (inestensibilità dei segmenti).
- **Osservazione 7.** Nell'ambito della cinematica linearizzata vale il principio di sovrapposizione degli effetti. In altri termini, una successione di spostamenti rigidi infinitesimi determina uno spostamento risultante indipendente dall'ordine di applicazione dei singoli spostamenti. Esso può essere calcolato quale somma degli spostamenti valutati a partire dalla configurazione di riferimento.

Esercizio 2: Noti gli spostamenti dei punti A e B del corpo rigido C

$$\mathbf{u}_A = \alpha l (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$$\mathbf{u}_B = -\alpha l (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

con $\alpha \ll 1$, determinare il campo degli spostamenti.



È conveniente assumere il polo O coincidente con uno dei due punti, ad esempio A . È perciò $u_0 = -2\alpha l$, $v_0 = \alpha l$, $w_0 = -3\alpha l$. Scrivendo le (8) per $P \equiv B$, si ha:

$$\begin{Bmatrix} -\alpha l \\ -\alpha l \\ -\alpha l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\alpha l \\ \alpha l \\ -3\alpha l \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & +\theta_y \\ +\theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & +\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2l \\ 2l \\ l \end{Bmatrix}$$

Si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite che, risolto, fornisce le componenti delle rotazione incognite: $\theta_x = 2\alpha$, $\theta_y = \alpha$, $\theta_z = 0$. Noti \mathbf{u}_0 e θ può scriversi la FGSR:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \alpha l \begin{Bmatrix} -2 \\ +1 \\ -3 \end{Bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

che descrive il campo degli spostamenti richiesto.

Si noti che lo spostamento del corpo è stato determinato in modo univoco in quanto sono state assegnate complessivamente sei componenti di spostamento, tante quanti sono gli spostamenti generalizzati.

1.5 Spostamenti rigidi piani

Uno *spostamento rigido piano* è uno spostamento in cui tutti i punti P del corpo si spostano parallelamente ad un piano. Detto xy questo piano, dalle (8) si vede che $w=0$ per ogni x ed y solo se $w_0=\theta_x=\theta_y=0$. Posto $\theta_z=\theta$, la formula generale dello spostamento rigido piano, con $O \equiv C$, si scrive:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Ogni spostamento rigido piano è individuato perciò da tre soli spostamenti generalizzati:

$$\mathbf{u} = \{ u_0 \quad v_0 \quad \theta \}^T \quad (13)$$

Un *corpo rigido piano* (cioè suscettibile di soli spostamenti piani) ha quindi *tre gradi di libertà*. La (12) esprime il generico spostamento come somma di una traslazione di componenti u_0 , v_0 e di una rotazione θ secondo un asse ortogonale al piano, di traccia $O \equiv C$. Si dice anche che la rotazione avviene "intorno" ad O . In base all'Osservazione 3 si vede che le componenti di spostamento di P coincidono con i moduli degli spostamenti di P_x e P_y , proiezioni di P sugli assi, a causa dell'inesistibilità dei segmenti PP_x , PP_y (Fig. 6a).

- Osservazione 8.** In una rotazione rigida infinitesima, la componente η_r dello spostamento di un punto P secondo una retta r è pari in modulo al prodotto dell'ampiezza della rotazione per la distanza d_r della retta r dall'asse di rotazione (Fig. 6b). Infatti, dall'Osservazione 2, tenendo conto che $O \equiv C$, si ha:

$$\eta_r = \mathbf{PP}' \cdot \mathbf{e}_r = \theta \overline{OP} \cos \alpha = \theta d_r \quad (14)$$

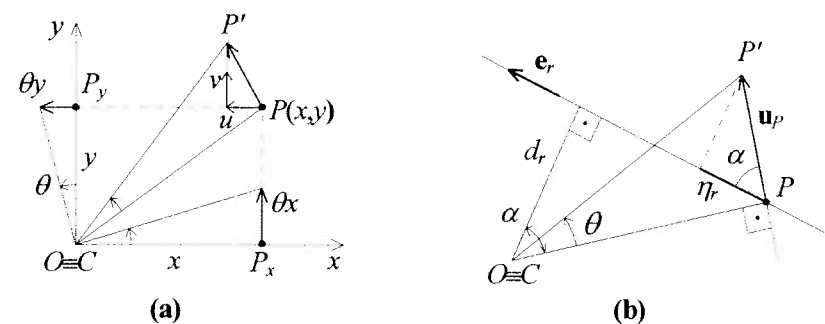


Fig. 6 Rotazione rigida infinitesima

1.6 Centro di rotazione

Dalle (12) segue che il punto C di coordinate

$$x_C = -\frac{v_0}{\theta}, \quad y_C = \frac{u_0}{\theta} \quad (15)$$

ha componenti di spostamento $u=v=0$; C è detto *centro di rotazione*. Con le (15) la FGSR (12) può anche riscriversi:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{Bmatrix} \quad (16)$$

che mostra che *ogni spostamento rigido piano è una rotazione*. Traslando gli assi in C (Fig. 7), posto quindi

$$x^* = x - x_C \quad y^* = y - y_C \quad (17)$$

le (16) assumono la forma,

$$u = -\theta y^* \quad v = \theta x^* \quad (18)$$

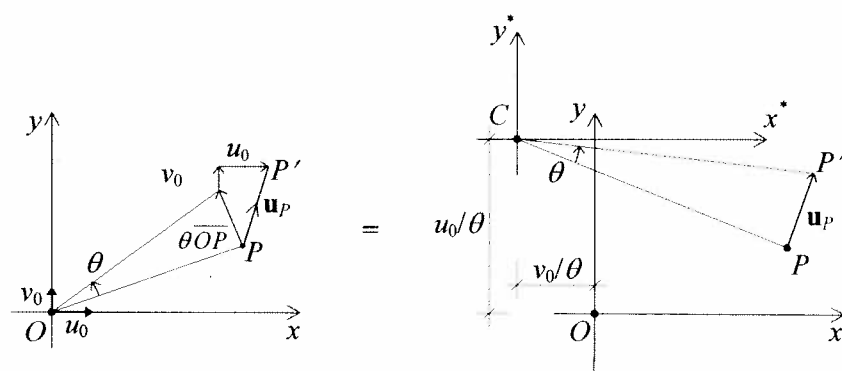


Fig. 7 Spostamento rigido piano come rotazione intorno al centro C

- **Osservazione 9.** Se, come caso particolare, è $\theta=0$, il centro C è all'infinito, essendo $x_C = \infty$, $y_C = \infty$. Poiché è $y_C/x_C = -u_0/v_0$, C è il punto improprio della retta ortogonale al vettore traslazione:

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{i} + v_0 \mathbf{j} \quad (19)$$

essendo $\mathbf{OC} \cdot \mathbf{u}_0 = 0$. Una traslazione è dunque una rotazione infinitesima intorno ad un punto all'infinito.

- **Osservazione 10.** L'applicazione di più rotazioni θ_i intorno a centri $C_i \equiv (x_{C_i}, y_{C_i})$ è una rotazione d'ampiezza pari alla somma delle ampiezze, e centro il baricentro delle rotazioni componenti. Infatti, in base alla FGSR (Eq. 16) e all'Osservazione 7, le componenti dello spostamento del generico punto P conseguente all'applicazione di più rotazioni θ_i sono fornite da:

$$\begin{aligned} u &= -\sum \theta_i (y - y_{C_i}) \\ v &= +\sum \theta_i (x - x_{C_i}) \end{aligned} \quad (20)$$

ossia:

$$\begin{aligned} u &= -\theta (y - y_C) \\ v &= +\theta (x - x_C) \end{aligned} \quad (21)$$

ove si è posto:

$$\theta = \sum \theta_i; \quad x_C = \frac{\sum x_{C_i} \theta_i}{\sum \theta_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_{C_i} \theta_i}{\sum \theta_i} \quad (22)$$

Ricordando le (16) e la definizione di baricentro di una grandezza scalare funzione del posto si perviene all'asserto. In forza delle (22), la somma di due rotazioni θ_1 e θ_2 intorno a due centri $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$ è una rotazione d'ampiezza $\theta = \theta_1 + \theta_2$ intorno al punto C baricentro dei due punti C_1, C_2 . In particolare il centro di rotazione C è interno al segmento C_1C_2 quando θ_1 e θ_2 sono equiversi (Fig. 8a), ed è invece esterno a C_1C_2 quando θ_1 e θ_2 sono di segno contrario; in quest'ultimo caso esso giace dalla parte del centro di rotazione cui è associata l'ampiezza maggiore in modulo (θ_2 in Fig. 8b).

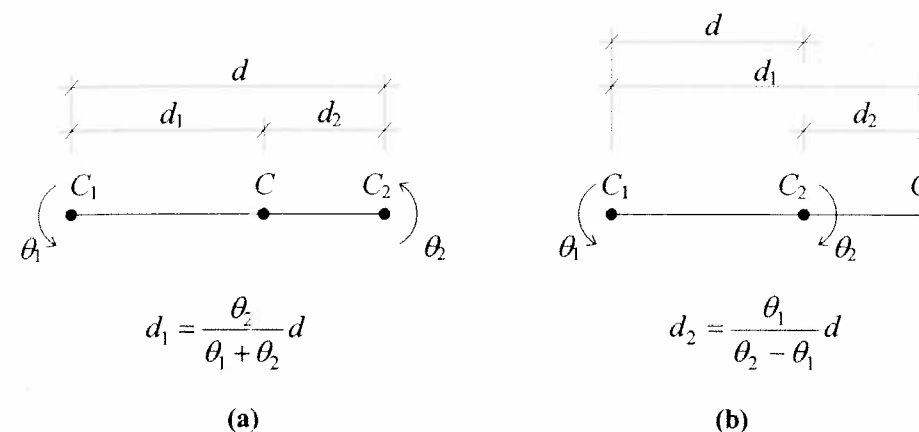
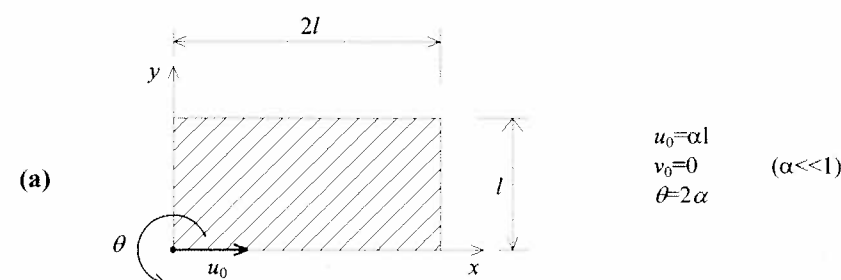


Fig. 8 Composizione di due rotazioni elementari

Esercizio 3: Noti \mathbf{u}_0 e θ (Fig. a) tracciare il diagramma degli spostamenti $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Determinare il centro di rotazione C.



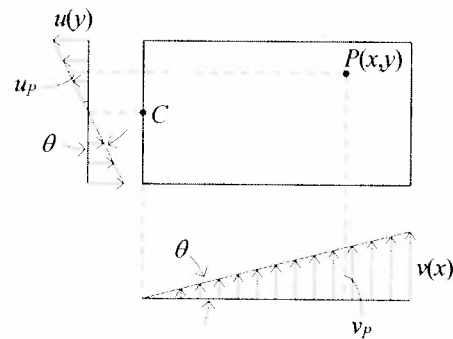
La FGSR per il caso piano in questione si scrive (Eq. 12):

$$\begin{aligned} u &= \alpha l - 2 \alpha y \\ v &= 2 \alpha x \end{aligned}$$

Il centro di rotazione C si ottiene ponendo $u=v=0$. Si trova $x_C=0$, $y_C=l/2$. Il campo degli spostamenti può risciversi (Eq. 16):

$$\begin{aligned} u &= -2 \alpha \left(y - \frac{l}{2} \right) \\ v &= 2 \alpha x \end{aligned}$$

Le funzioni sono diagrammate in Fig. (b). Gli spostamenti u e v del generico punto P si leggono sui diagrammi proiettando P ortogonalmente agli assi. Gli spostamenti di C, per definizione, sono nulli. I diagrammi di u e di v si possono anche ottenere ruotando intorno a C le rette di riferimento (rispettivamente verticale e orizzontale) di un angolo θ nel verso della rotazione del corpo.



1.7 Sistemi di corpi rigidi

Si consideri ora un sistema di n_c corpi rigidi C_i ($i=1,2,\dots,n_c$) in una data configurazione di riferimento. Per ciascuno di essi vale una formula analoga alla (3):

$$\mathbf{u}_{P_i} = \mathbf{u}_{O_i} + \boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{O}_i P_i \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (23)$$

in cui: P_i è un punto di C_i ed \mathbf{u}_{P_i} è il suo spostamento; O_i è un punto arbitrariamente scelto considerato solidale a C_i ed \mathbf{u}_{O_i} è il suo spostamento; $\boldsymbol{\theta}_i$ è il vettore rotazione di C_i , applicato ad una retta a_i passante per O_i (Fig. 9). Le (23) possono essere poste nella forma scalare (8):

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{zi} & +\theta_{yi} \\ +\theta_{zi} & 0 & -\theta_{xi} \\ -\theta_{yi} & +\theta_{xi} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (24)$$

dove tutte le grandezze, coordinate di P_i , componenti di spostamento e rotazione, sono riferite alla i -esima terna ortogonale $O_i x_i y_i z_i$ (Fig. 10).

I parametri necessari a descrivere la configurazione variata del sistema sono dunque $6n_c$, sei per ciascun corpo, e possono essere ordinati in un vettore \mathbf{u} di dimensioni $6n_c \times 1$:

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_{n_c}\}^T \quad (25)$$

dove

$$\mathbf{u}_i = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (26)$$

Questi parametri descrivono, attraverso le (24), il campo di spostamento di ciascun corpo misurato a partire dalla configurazione di riferimento. Un sistema costituito da n_c corpi rigidi ha perciò $n=6n_c$ g.d.l..

Nel caso piano le (24) si modificano come segue:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (27)$$

dove $\theta_i \equiv \theta_{zi}$. Il vettore degli spostamenti generalizzati (25) ha dimensioni $3n_c \times 1$

essendo

$$\mathbf{u}_i = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad \theta_i\} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (28)$$

Un sistema costituito da n_c corpi piani ha perciò $n=3n_c$ g.d.l..

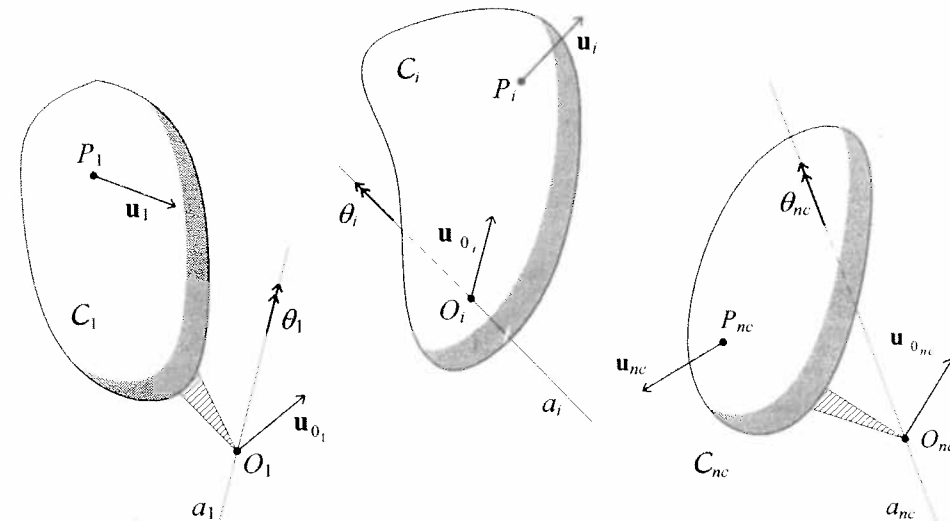


Fig. 9 Sistema di n_c corpi; spostamenti ridotti agli n_c poli O_i

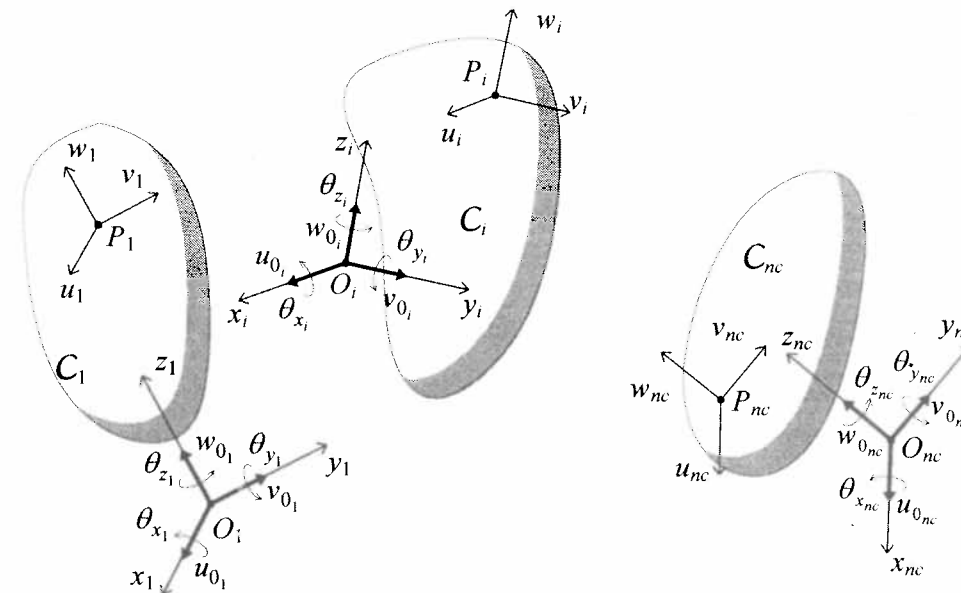


Fig. 10 Spostamenti generalizzati e componenti di spostamento

Osservazione 11. La scelta dei poli O_i è arbitraria, così come è arbitraria la scelta dell'orientazione della terna $O_i x_i y_i z_i$. Può pertanto essere utile scegliere tutti i poli coincidenti con un unico punto $O \equiv O_1 \equiv O_2 \equiv \dots \equiv O_{n_c}$, e scegliere inoltre un'unica terna di riferimento $Oxyz$. In questo modo le (24) si riscrivono:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_{z_i} & +\theta_{y_i} \\ +\theta_{z_i} & 0 & -\theta_{x_i} \\ -\theta_{y_i} & +\theta_{x_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n_c) \quad (29)$$

Va osservato che ciascun punto O_i è solidale ad un diverso corpo C_i . Così questi punti coincidono con O solo nella configurazione di riferimento, mentre in generale sono tra loro distinti nella configurazione variata (si veda in proposito la Fig. 11, dove è rappresentato un caso piano in cui $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$).

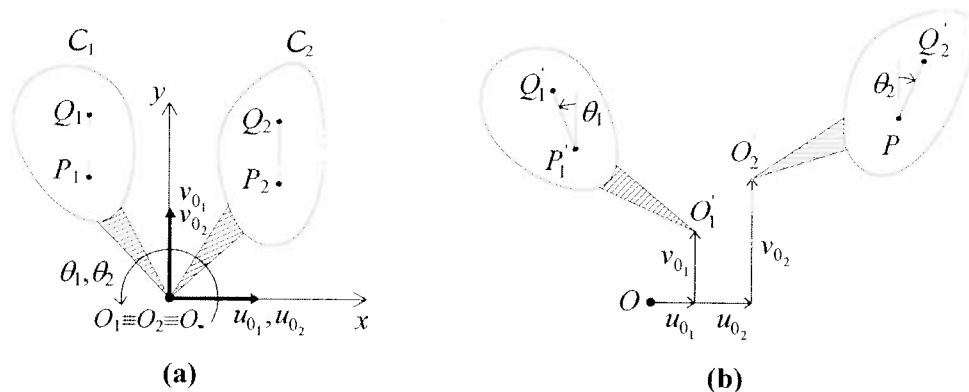


Fig. 11 Sistema piano di due corpi riferiti a due poli inizialmente coincidenti; (a) configurazione di riferimento, (b) configurazione variata

2. Vincoli

2.1 Condizioni di vincolo

Un vincolo è un dispositivo meccanico atto a limitare le possibilità di movimento dei punti del corpo cui è applicato. Qui si considerano solo vincoli bilaterali, indipendenti dal tempo, privi di attrito. Un vincolo è *esterno* se collega il corpo al suolo, è *interno* se collega tra loro due o più corpi. Un vincolo esterno limita gli spostamenti assoluti del punto P del corpo C cui è applicato (Fig. 12a); un vincolo interno limita gli spostamenti relativi tra i due punti P_i e P_j dei corpi C_i e C_j che collega (Fig. 12b).

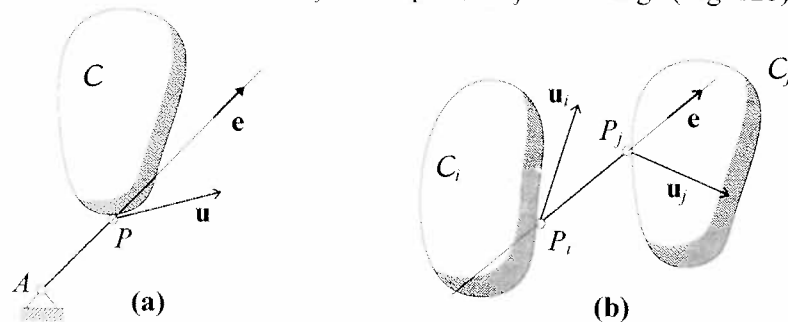


Fig. 12 Vincolo semplice (a) esterno e (b) interno

La limitazione degli spostamenti esercitata dal dispositivo meccanico si traduce in una o più condizioni del tipo:

$$F(u, v, w) = 0 \quad (30)$$

oppure:

$$G(u_i, v_i, w_i; u_j, v_j, w_j) = 0 \quad (31)$$

secondo che il vincolo sia rispettivamente esterno (Fig. 12a) o interno (Fig. 12b). Gli spostamenti di P , ovvero di P_i e P_j , sono esprimibili attraverso la FGS in funzione degli spostamenti generalizzati. Se si considerano spostamenti finiti, questa dipendenza è non lineare (Eq. 2). Le condizioni di vincolo possono quindi essere espresse in termini di queste coordinate come

$$f(u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z) = 0 \quad (32)$$

oppure

$$g(u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}; u_{0j}, v_{0j}, w_{0j}, \theta_{x_j}, \theta_{y_j}, \theta_{z_j}) = 0 \quad (33)$$

Nella (32) appaiono i sei spostamenti generalizzati di C e nella (33) i dodici spostamenti generalizzati di C_i e C_j .

Un vincolo è detto *semplice* se è esprimibile attraverso una condizione del tipo (32) o (33); è detto *molteplice*, di molteplicità m , se è esprimibile attraverso m condizioni ancora del tipo (32) o (33):

$$\begin{aligned} f_k(u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z) &= 0 & (k = 1, 2, \dots, m) \\ g_k(u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}; u_{0j}, v_{0j}, w_{0j}, \theta_{x_j}, \theta_{y_j}, \theta_{z_j}) &= 0 & (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (34)$$

Un vincolo di molteplicità m equivale perciò ad m vincoli semplici. Da un punto di vista geometrico ciascuna delle relazioni precedenti descrive una superficie nello spazio degli spostamenti generalizzati. Esse impongono al sistema di assumere tutte e solo le configurazioni corrispondenti a valori delle coordinate appartenenti alla superficie così individuata.

Le (32)÷(34) sono dette *condizioni* (o relazioni) di *vincolo*. Gli spostamenti generalizzati non possono quindi essere scelti in modo arbitrario ma devono essere tali da soddisfare le relazioni di vincolo. Così, una relazione del tipo (32) abbassa di uno il numero dei g.d.l. del corpo C , in quanto scelti ad arbitrio cinque parametri, il sesto è determinato dalla condizione di vincolo. Analogamente, una relazione del tipo (33) riduce ad undici il numero dei g.d.l. In generale, un vincolo di molteplicità m abbassa di m unità il numero dei gradi di libertà del sistema.

Se i vincoli sono $n_c > 1$, ciascuno con molteplicità m_1, m_2, \dots, m_{n_c} , si definisce *molteplicità globale* m dei vincoli la somma delle molteplicità, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_{n_c}$. Un sistema costituito da n_c corpi vincolati da un complesso di vincoli di molteplicità globale m ha un numero di g.d.l. pari a $(n - m)$ con $n = 6n_c$.

Una configurazione individuata da parametri che soddisfano tutte le relazioni di vincolo è detta *compatibile*, o *congruente*.

- **Osservazione 12.** Nella formulazione delle condizioni di vincolo si riconoscono due aspetti che è consigliabile tenere sempre separati nelle applicazioni, procedendo secondo questi due passi:

- I. si scrivono le condizioni di vincolo in termini degli spostamenti dei punti vincolati;
- II. attraverso la FGSR si esprimono questi spostamenti in funzione delle variabili di configurazione.

- **Osservazione 13.** Nella scrittura delle condizioni di vincolo, il primo passo traduce la compatibilità cinematica con i vincoli *esterni* ai corpi (anche se eventualmente interni al sistema); il secondo passo traduce la compatibilità *interna* dei singoli corpi, nel rispetto della condizione di rigidità del corpo implicita nella FGSR (si veda l'Osservazione 6). Quando, nel seguito del testo, si rilascerà l'ipotesi di rigidità e si tratterà la cinematica del corpo deformabile, le condizioni di vincolo esterno resteranno immutate, mentre varieranno quelle di vincolo interno.

2.2 Condizioni di vincolo linearizzate

Le condizioni di vincolo (32) ÷ (34) sono generalmente *non lineari*. Limitando l'interesse a spostamenti \mathbf{u} infinitesimi, possono essere sostituite dalle loro *approssimazioni lineari*. Ad esempio il vincolo semplice in Fig. 12a (biella o pendolo) impone al punto P di appartenere, in ogni posizione P' compatibile, ad una superficie sferica di centro A e di raggio pari alla lunghezza della biella. Linearizzare il vincolo vuol dire sostituire alla sfera il suo piano tangente nella configurazione di riferimento.

Le relazioni (32), (33) linearizzate sono del tipo:

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0 \quad (35)$$

e le relazioni (34)

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} u_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (36)$$

dove $n=6$ oppure $n=12$ e a_i, a_{ki} sono dei coefficienti.

- **Osservazione 14.** Le equazioni di vincolo sono lineari negli spostamenti generalizzati se, e solo se, (a) le condizioni geometriche sono linearizzate (approssimazione di superfici con piani e curve con rette) e (b) la FGSR è linearizzata (Eq. 3 in luogo di Eq. 2).

Esercizio 4: Scrivere le condizioni linearizzate relative ai vincoli di Fig. 12.

Detto \mathbf{e} il versore della retta secondo cui è disposto il pendolo, nel caso (a) bisogna imporre che \mathbf{u} sia ortogonale ad \mathbf{e} :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

cioè:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

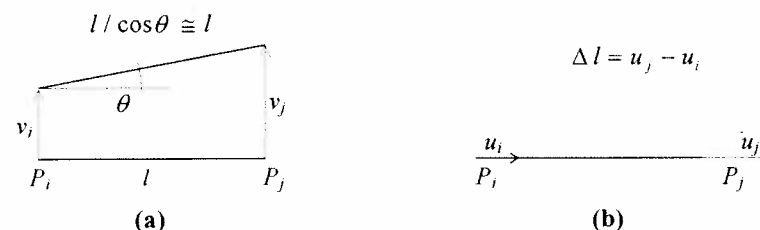
dove α, β, γ sono le componenti di \mathbf{e} (coseni direttori della retta). Esprimendo u, v, w come funzioni lineari di u_1, \dots, u_6 tramite la FGSR si ottiene un'equazione del tipo (35), con $n=6$.

Nel caso (b) bisogna imporre che il segmento $P_i P_j$ abbia allungamento nullo (biella inestensibile). Poiché le componenti di \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_j normali al segmento non producono allungamento al primo ordine (condizione linearizzata, si veda la figura, dove è illustrato un caso piano), l'allungamento Δl è dovuto alla sola differenza delle componenti longitudinali. Imposto che Δl sia nullo si ha:

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{e} - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e} = 0$$

ovvero

$$(u_j - u_i)\alpha + (v_j - v_i)\beta + (w_j - w_i)\gamma = 0$$



(a) Spostamenti normali al segmento: $\Delta l=0$; (b) Spostamenti paralleli al segmento: $\Delta l \neq 0$

Esprese u_i, v_i, w_i in funzione degli spostamenti generalizzati del corpo C_i , u_1, \dots, u_6 , e u_j, v_j, w_j in funzione degli spostamenti generalizzati di C_j , u_1, \dots, u_6 , si ottiene una condizione del tipo (36), con $n=12$.

Si noti che la condizione di inestensibilità del pendolo è quella già discussa nell'Osservazione 3; essa impone agli spostamenti di due punti di un corpo di avere la medesima componente secondo la loro congiungente.

2.3 Cedimenti vincolari

Si definiscono *cedimenti vincolari* gli spostamenti (assoluti o relativi) assegnati ai punti di applicazione dei vincoli. In presenza di cedimenti vincolari le condizioni di vincolo sono *non omogenee*; ad esempio le (35) si scrivono:

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i = s \quad (37)$$

e le (36)

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} u_i = s_i \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (38)$$

dove s, s_i sono i cedimenti vincolari noti.

Esercizio 5: Scrivere le condizioni relative ai vincoli di Fig. 12, assegnato un allungamento Δl ai pendoli, oppure uno spostamento \mathbf{u}_A ad A .

Assegnato Δl , deve essere

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = \Delta l$$

nel caso (a), e

$$(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{e} = \Delta l$$

nel caso (b). Le condizioni di vincolo dell'Esercizio 4 si modificano perciò per la presenza di un termine noto $s = \Delta l$.

Se invece viene assegnato lo spostamento al suolo \mathbf{u}_A , la condizione di vincolo è $\Delta l = 0$, cioè

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_A) \cdot \mathbf{e} = 0$$

Il cedimento vincolare è quindi rappresentato dalla componente di \mathbf{u}_A nella direzione del pendolo, $s = \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{e}$. Questa circostanza traduce il fatto che la componente di \mathbf{u}_A ortogonale ad \mathbf{e} non costituisce cedimento vincolare, in quanto, essendo consentita dal vincolo (al primo ordine), non assegna alcuna condizione allo spostamento \mathbf{u} del punto P .

2.4 Classificazione dei vincoli piani

Con riferimento alla Fig. 13 si esaminano diversi tipi di vincolo piani. La figura illustra la denominazione del vincolo, il simbolo che lo rappresenta, la molteplicità m e le condizioni espresse in termini dello spostamento \mathbf{u}_A del punto A cui è applicato.

Il *carrello* è un vincolo semplice, che impedisce la componente di spostamento del punto A del corpo nella direzione normale a quella di scorrimento del carrello. Si ricordi che i vincoli sono assunti bilaterali, cosicché, a dispetto del simbolo adottato per rappresentarlo, il vincolo non consente il distacco dalla retta di scorrimento. Ad un corpo vincolato da un carrello restano due *g.d.l.*, una traslazione parallela alla retta di scorrimento e la rotazione.

La *cerniera* è un vincolo doppio, che impedisce lo spostamento del punto del corpo cui è applicata.

Il *glifo*, o pattino, è un vincolo doppio, che impedisce la traslazione in direzione normale alla retta di scorrimento e la rotazione del corpo. Al corpo resta una sola componente di traslazione. Il glifo equivale dunque ad una cerniera posta all'infinito (si veda l'Osservazione 9).

L'*incastro* è un vincolo triplo, che impedisce la traslazione di A e la rotazione del corpo cui A appartiene. Al corpo non restano *g.d.l.*.

Il *bipendolo* è un vincolo poco usato nelle applicazioni, la cui denominazione non è universalmente accettata. È un vincolo semplice che impedisce la rotazione del corpo mentre lascia libere le due componenti di traslazione. Un tecnigrafo a bracci è un esempio di bipendolo: esso impedisce al corpo (il sistema di due righe mutuamente incastrate) di ruotare, mantenendo quindi il parallelismo.

In presenza di cedimenti vincolari tutte le relazioni di vincolo scritte diventano non

omogenee, del tipo $u_A = s_{A_x}, v_A = s_{A_y}, \theta = \phi$, dove s_{A_x}, s_{A_y} e ϕ indicano dei valori noti degli spostamenti, assegnati al punto A ovvero al corpo cui A appartiene.

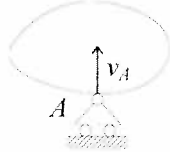
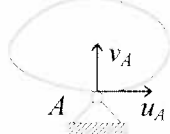
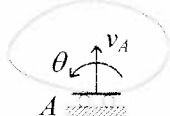
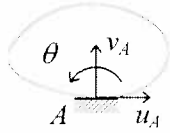

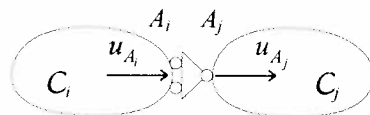
Denominazione	Simbolo e componente di spostamento vincolata	Molteplicità	Prestazione cinematica
a) carrello		$m=1$	$v_A=0$
b) cerniera		$m=2$	$u_A=0, v_A=0$
c) glifo		$m=2$	$v_A=0, \theta=0$
d) incastro		$m=3$	$u_A=0, v_A=0, \theta=0$
e) bipendolo		$m=1$	$\theta=0$

Fig. 13 Vincoli piani esterni

I vincoli esaminati in Fig. 13 sono vincoli esterni. Naturalmente possono essere utilizzati per collegare tra loro due corpi C_i e C_j in due punti A_i, A_j . I diversi casi e le relative condizioni di vincolo sono illustrati in Fig. 14.

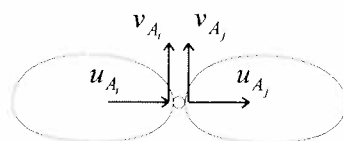
Le condizioni di vincolo impongono che gli spostamenti relativi tra i punti A_i e A_j nelle direzioni vincolate devono annullarsi. Se lo spostamento relativo vincolato è una rotazione (casi c, d, e) le rotazioni dei due corpi (non “dei punti”, che non sono dotati di orientazione!) devono essere uguali. In presenza di cedimenti vincolari interni che assegnano spostamenti relativi diversi da zero, le condizioni diventano non omogenee.

a) carrello



$$u_{A_j} - u_{A_i} = 0$$

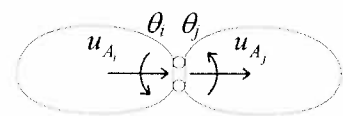
b) cerniera



$$u_{A_j} - u_{A_i} = 0$$

$$v_{A_j} - v_{A_i} = 0$$

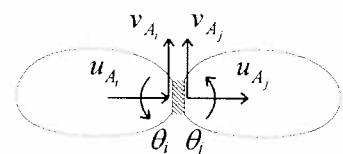
c) glifo



$$u_{A_j} - u_{A_i} = 0$$

$$\theta_j - \theta_i = 0$$

d) incastro

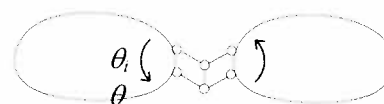


$$u_{A_j} - u_{A_i} = 0$$

$$v_{A_j} - v_{A_i} = 0$$

$$\theta_j - \theta_i = 0$$

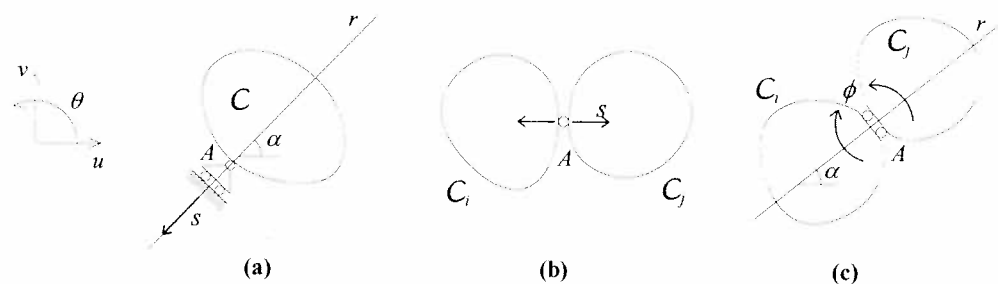
e) bipendolo



$$\theta_j - \theta_i = 0$$

Fig. 14 Vincoli piani interni

Esercizio 6: Si scrivano le condizioni di vincolo relative ai sistemi illustrati in figura.



Nel caso (a) si ha un carrello ($m=1$) che vincola il corpo C al suolo (vincolo esterno) ed assegna al punto A la componente dello spostamento (assoluto) s secondo la retta r . Dette u_A e v_A le componenti dello spostamento di A rispettivamente secondo l'orizzontale e la verticale, deve essere

$$u_A \cos \alpha + v_A \sin \alpha = -s$$

che rappresenta la cercata condizione di vincolo.

Nel caso (b) i due corpi sono collegati da una cerniera interna ($m=2$) applicata in A che assegna

un cedimento vincolare consistente in uno spostamento *relativo* (di allontanamento) s secondo l'orizzontale. Le due condizioni di vincolo si scrivono:

$$u_{A_j} - u_{A_i} = s, \quad v_{A_j} - v_{A_i} = 0$$

dove A_i e A_j sono punti appartenenti rispettivamente a C_i e C_j coincidenti con A , supposto il vincolo di dimensioni infinitesime.

Nel caso (c) i due corpi sono vincolati da un glifo interno ($m=2$). È presente un cedimento vincolare che assegna una rotazione relativa ϕ tra i due corpi nel verso indicato in figura (un osservatore solidale a C_i vede C_j ruotare in verso antiorario; un osservatore solidale a C_j vede C_i ruotare in verso orario). Le condizioni si scrivono:

$$\theta_j - \theta_i = \phi, \quad (u_{A_j} \cos \alpha + v_{A_j} \sin \alpha) - (u_{A_i} \cos \alpha + v_{A_i} \sin \alpha) = 0$$

2.5 Equivalenza dei vincoli piani

Si è già detto che un vincolo di molteplicità m equivale, da un punto di vista analitico, a m vincoli semplici. Questa equivalenza naturalmente vale anche da un punto di vista strettamente meccanico; la Fig. 15 mostra alcune equivalenze.

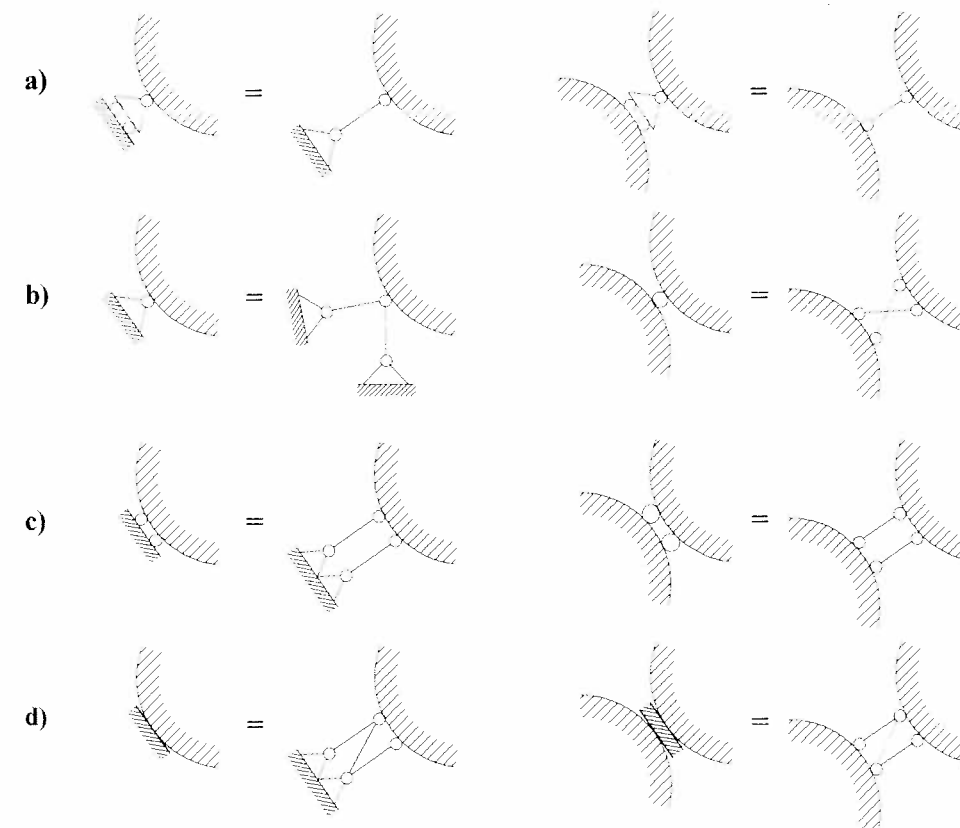
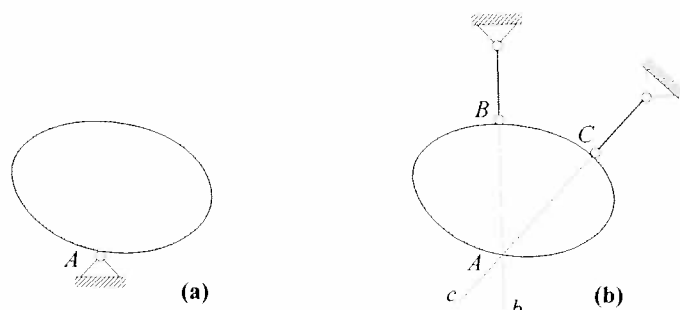


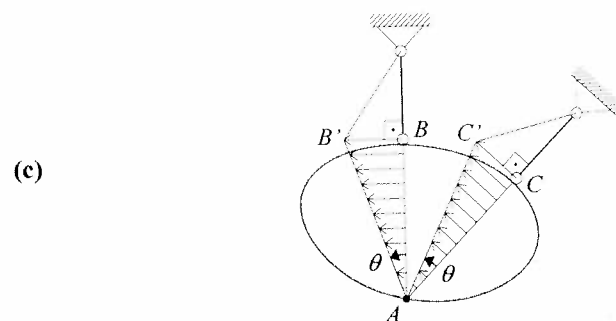
Fig. 15 Equivalenze tra vincoli piani, esterni ed interni

Va tenuto debitamente in conto che, nella maggior parte dei casi, *l'equivalenza sussiste solo in regime di spostamenti infinitesimi* e non in quello di spostamenti finiti. Si noti che il punto di intersezione delle rette di applicazione di due pendoli è punto di applicazione di una cerniera; se le rette si intersecano all'infinito il vincolo equivale ad un glifo, che infatti è una cerniera all'infinito.

Esercizio 7: Dimostrare che i vincoli rappresentati in figura sono equivalenti.



Nella condizione (a), il corpo può solo ruotare intorno ad A , che quindi è centro di rotazione. Nella condizione (b), il punto B ha componente di spostamento nulla secondo la retta b , e il punto C ha componente di spostamento nulla secondo la retta c . Per la condizione di inestensibilità del segmento AB (vedi Osservazione 3) il punto A deve avere spostamento nullo secondo la retta b ; per la condizione di inestensibilità del segmento AC il punto A deve avere componente di spostamento nulla secondo la retta c . In definitiva, dovendo A avere componente di spostamento nulla secondo due rette distinte, deve avere spostamento nullo, ed è quindi centro di rotazione. Anche nella condizione di vincolo (b), dunque, il corpo ruota intorno ad A . La figura (c) mostra gli spostamenti dei segmenti AB e AC , dai quali si evince che lo spostamento del corpo è compatibile con i vincoli, che infatti, al primo ordine, subiscono un allungamento nullo.



2.6 Alcuni vincoli spaziali

Nel caso spaziale può naturalmente aversi una più ampia varietà di vincoli. Alcuni di questi sono:

- la *cerniera sferica*, di molteplicità $m=3$, che impedisce tre componenti di traslazione e lascia libere le tre rotazioni;
- la *cerniera cilindrica*, di molteplicità $m=5$, che impedisce le tre traslazioni e due

rotazioni, lasciando al corpo la sola possibilità di ruotare intorno all'asse della cerniera;

- il *glifo*, o pattino, di molteplicità $m=5$, che permette una sola componente di traslazione;
 - l'*incastro*, di molteplicità $m=6$, che sottrae al corpo tutti i suoi *g.d.l.*
- Come nel caso piano, un vincolo molteplice può realizzarsi con più pendoli.

Esercizio 8: Dimostrare le equivalenze indicate in figura.

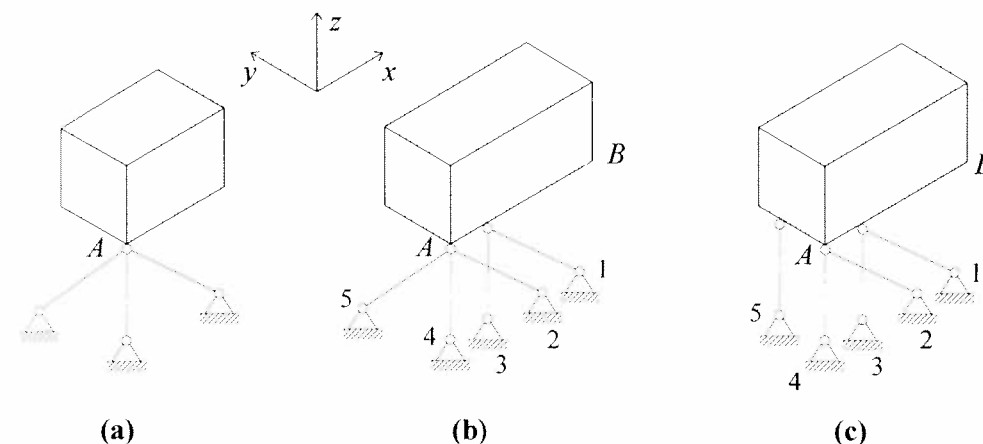


Fig. 16 Equivalenza tra vincoli spaziali: (a) cerniera sferica; (b) cerniera cilindrica di asse AB ; (c) glifo di asse AB

Nel caso (a) i tre pendoli applicati in A impediscono le tre traslazioni u_A, v_A, w_A , cosicché il corpo può solo ruotare intorno ad un qualsiasi asse passante per A . Il vincolo equivale ad una cerniera sferica.

Nel caso (b) i vincoli 1 e 2 costituiscono un glifo nel piano xy , i vincoli 3 e 4 un glifo nel piano xz . Al corpo resta dunque una traslazione secondo x , che però è impedita dal vincolo 5, e una rotazione intorno ad x , che resta libera. Il vincolo è perciò equivalente ad una cerniera cilindrica di asse x .

Nel caso (c), oltre ai glifi 1, 2 e 3, 4 è presente un terzo glifo, 4, 5 che impedisce la rotazione intorno all'asse AB . Resta libera la traslazione secondo x . Il vincolo equivale perciò ad un glifo di asse AB .

3. Il problema cinematico

3.1 Posizione del problema

Si consideri un *sistema di corpi rigidi* costituito da n_c corpi, mutuamente vincolati, di norma (ma non necessariamente) vincolato al suolo (Fig. 17). Sia m la molteplicità globale dei vincoli, interni ed esterni. Si considerino poi dei cedimenti vincolari, che vengono applicati a partire da una data configurazione di riferimento. Ha interesse

chiedersi: può il sistema trovare altre configurazioni infinitamente vicine a quelle di riferimento, in modo tale da soddisfare tutte le condizioni geometriche di vincolo, sia esterne (dovute ai dispositivi meccanici) che interne (dovute alla rigidità del corpo)? Se queste configurazioni esistono quante e quali sono? Sotto quali condizioni la configurazione compatibile è unica? Per rispondere a queste domande si formula il seguente *problema cinematico* (o di congruenza): *assegnati i cedimenti vincolari, determinare, se esistono, le configurazioni compatibili del sistema.*

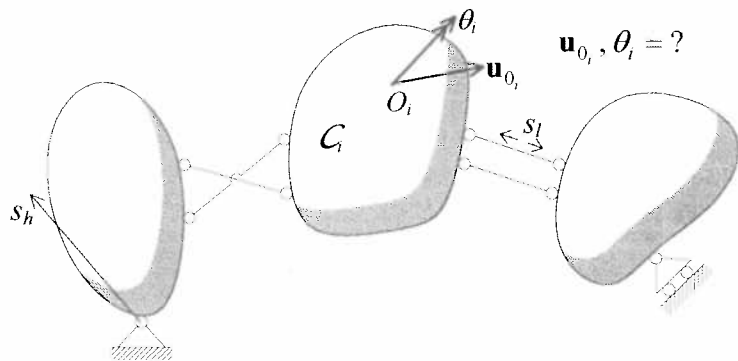


Fig. 17 Il problema cinematico per un sistema di corpi rigidi

Il problema è governato dalle equazioni (37) e (38) che costituiscono un sistema lineare di equazioni algebriche di m equazioni, una per ciascun vincolo semplice, in $n=6n_c$ (nello spazio) o $n=3n_c$ (nel piano) spostamenti generalizzati incogniti. Dati gli m cedimenti vincolari (che, come caso particolare possono essere identicamente nulli) tutte le n -ple u_i che soddisfano le (37) e (38) individuano una configurazione compatibile (o congruente) del sistema.

Le equazioni (37) e (38) possono porsi nella forma matriciale

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (38)$$

dove \mathbf{A} è la *matrice di congruenza* del sistema, di dimensioni $m \times n$, \mathbf{u} è il *vettore degli spostamenti generalizzati* incogniti, di dimensioni $n \times 1$, e \mathbf{s} è il *vettore dei cedimenti vincolari* noti, di dimensioni $m \times 1$. Se il problema (39) ammette soluzione, calcolati i parametri u_i , dalla *FGSR* scritta per ciascun corpo si determinano i campi di spostamento u, v, w e quindi la posizione variata di ciascun punto.

Le condizioni sotto cui il problema cinematico (39) ammette soluzione sono fornite dal *teorema di Rouché-Capelli*, che si richiama qui di seguito.

3.2 Il teorema di Rouché-Capelli

Dato un sistema di equazioni lineari $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, è noto dall'Algebra (Teorema di Rouché-Capelli) che l'esistenza di una o più soluzioni dipende dai tre interi:

m = numero di equazioni

n = numero di incognite

p = rango della matrice \mathbf{A}

Le diverse possibilità sono riassunte nel quadro:

$$p = m, \quad \begin{cases} m = n & : \text{una soluzione (sistemi determinati)} \\ n > m & : \infty^{n-m} \text{ soluzioni (sistemi indeterminati)} \end{cases}$$

$p < m$: nessuna soluzione (sistemi sovradeterminati), a meno che

$$\text{rango}[\mathbf{A}] = \text{rango}[\mathbf{A} | \mathbf{b}]$$

I sistemi con $p=m$ sono detti *compatibili*, ed ammettono sempre soluzioni qualunque sia il termine noto; i sistemi con $p < m$ sono *non compatibili* e generalmente non ammettono soluzione, fatta eccezione per particolari termini noti.

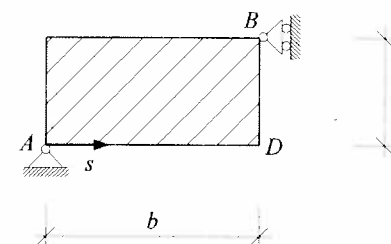
- **Osservazione 15.** Il teorema può anche essere formulato in modo alternativo, particolarmente significativo nel problema in questione ed in altri che verranno affrontati nel testo: *CNES perché il sistema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammetta soluzione è che il termine noto sia ortogonale ad ogni soluzione del problema omogeneo trasposto* (si vedano anche le Appendici A.3 e A.4).

In simboli, perché il sistema ammetta soluzione, deve essere:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{y} | \mathbf{A}^T \mathbf{y} = 0$$

In questa forma il teorema fornisce le *condizioni di compatibilità* (o di solvibilità) del problema ma, se queste sono soddisfatte, non dà il numero delle soluzioni.

Esercizio 9: Risolvere il problema cinematico rappresentato in figura e tracciare i diagrammi del campo dello spostamento.



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido piano; la generica configurazione variata è quindi descritta da tre spostamenti generalizzati, due componenti di traslazione u_0 e v_0 di un punto O arbitrariamente scelto, ed una rotazione θ intorno ad O (Fig. a).

Nel riferimento Oxy gli spostamenti del generico punto $P(x,y)$ si esprimono attraverso la *FGSR* (12):

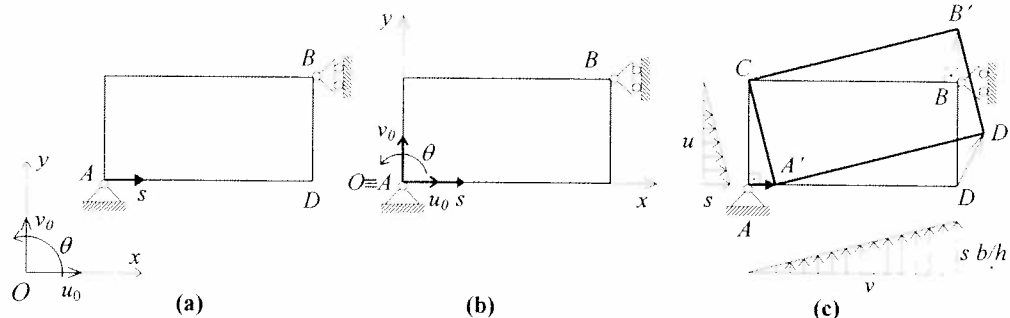
$$\begin{aligned} u &= u_0 - \theta y \\ v &= v_0 + \theta x \end{aligned} \quad (a)$$

Le condizioni di vincolo si scrivono (passo I, Osservazione 12):

$$u_A = s, \quad v_A = 0, \quad u_B = 0 \quad (b)$$

che, utilizzando la *FGSR*, diventano (passo II, Osservazione 12):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_A \\ 0 & 1 & x_A \\ 1 & 0 & -y_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$



Le equazioni (c) sono della forma (39) e rappresentano le equazioni di congruenza per il sistema allo studio. Si noti che una scelta opportuna del polo O può semplificare la soluzione del problema. Scegliendo infatti $O \equiv A$ (Fig. b) le equazioni (c) si riscrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{d})$$

dove naturalmente i parametri u_i hanno un diverso significato da quelli dell'equazione precedente. Risolvendo le (d) si ottiene:

$$u_0 = s, \quad v_0 = 0, \quad \theta = s/h \quad (e)$$

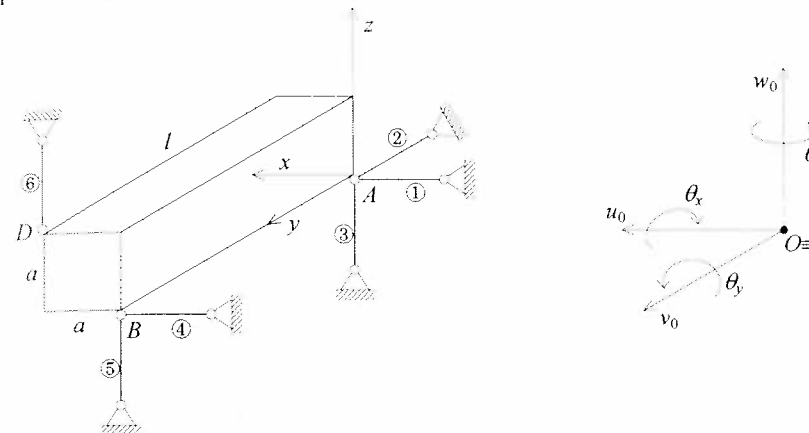
Noti gli spostamenti generalizzati la *FGSR* (a) fornisce:

$$u = s(1 - \frac{y}{h}), \quad v = s \frac{x}{h} \quad (f)$$

Il centro di rotazione C ha dunque coordinate $x_C = 0, y_C = h$.

I campi di spostamento sono diagrammati in Fig. (c) dove è anche indicata la configurazione variata del corpo. Nel problema in esame si è dunque determinata una ed una sola soluzione. Ciò è conseguenza del fatto che la matrice di congruenza \mathbf{A} ha dimensioni 3×3 e rango 3 ($m=n=p$).

Esercizio 10: Scrivere la matrice di congruenza del sistema in figura e discutere la soluzione del problema cinematico.



La configurazione variata è individuata da sei variabili di configurazione. Assumendo $O \equiv A$ la $FGSR(8)$ si scrive:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \theta_z y + \theta_y z \\ v &= v_0 + \theta_z x - \theta_x z \\ w &= w_0 - \theta_x x + \theta_y y \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Le condizioni di vincolo relative alle sei bielle sono (passo I):

$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad w_A = 0, \quad u_B = 0, \quad w_B = 0, \quad w_D = 0 \quad (\text{b})$$

che, espresse in termini di variabili di configurazione, diventano (passo II):

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & -l \\ . & . & 1 & l & . & . \\ . & . & 1 & l & -a & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

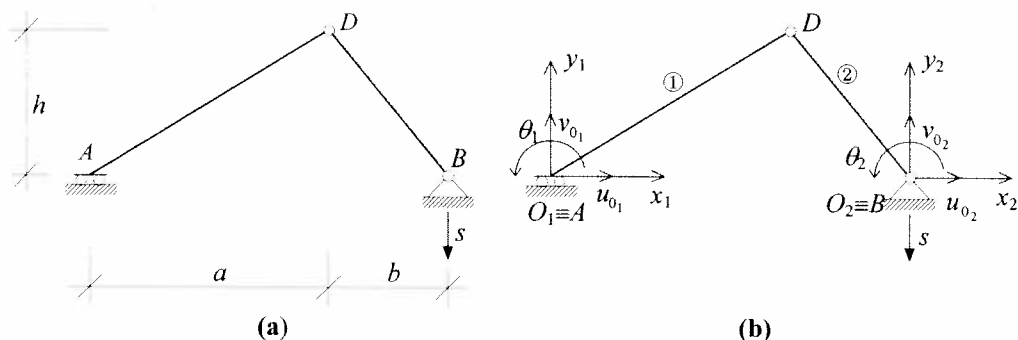
dove gli elementi della matrice non mostrati sono zero. La matrice 6×6 dell'equazione (c) è la matrice **A** di congruenza richiesta. Si può facilmente verificare che $\det \mathbf{A} \neq 0$, per cui la matrice ha rango $p=6$. Assegnati quindi dei cedimenti vincolari il problema cinematico ammette sempre una sola soluzione.

Esercizio 11: Risolvere il problema cinematico in Fig. (a).

Il sistema è costituito da due corpi rigidi piani, $C_1 \equiv AD$, $C_2 \equiv BD$, ha quindi $2 \times 3 = 6$ g.d.l.. Conviene scegliere i poli O_1 ed O_2 coincidenti rispettivamente con A e B (Fig. b). La *FGSR* (Eq.12), scritta per i due corpi, è:

$$\begin{cases} u_1 = u_{0_1} - \theta_1 y_1 \\ v_1 = u_{0_2} + \theta_1 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = u_{0_2} - \theta_2 y_2 \\ v_2 = v_{0_2} + \theta_2 x_2 \end{cases} \quad (\text{a})$$

dove x_1, y_1 sono le coordinate del punto $P_1 \in C_1$ nel riferimento $O_1x_1y_1$ ed x_2, y_2 sono le coordinate del punto $P_2 \in C_2$ nel riferimento $O_2x_2y_2$.



Le condizioni di vincolo sono sei, due in A (glifo esterno), due in B (cerniera esterna) e due in D (cerniera interna) e si scrivono:

$$v_A = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad u_B = 0, \quad v_B = -s, \quad u_{D_2} - u_{D_1} = 0, \quad v_{D_2} - v_{D_1} = 0 \quad (b)$$

Dalle (a), tenuto conto che $D_1 \equiv (a, h)$ e $D_2 \equiv (-b, h)$ si ha:

$$\begin{aligned} u_{D_1} &= u_{01} - \theta_1 h, & u_{D_2} &= u_{02} - \theta_2 h \\ v_{D_1} &= v_{01} + \theta_1 a, & v_{D_2} &= v_{02} - \theta_2 b \end{aligned} \quad (c)$$

Le condizioni di vincolo si scrivono allora:

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & h & 1 & \cdot & -h \\ \cdot & -1 & -a & \cdot & 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ \theta_1 \\ u_{02} \\ v_{02} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Si noti che le condizioni di vincolo esterno coinvolgono gli spostamenti generalizzati di un solo corpo, mentre quello di vincolo interno coinvolgono i parametri di entrambi i corpi.

Il sistema di equazioni 6×6 ammette l'unica soluzione:

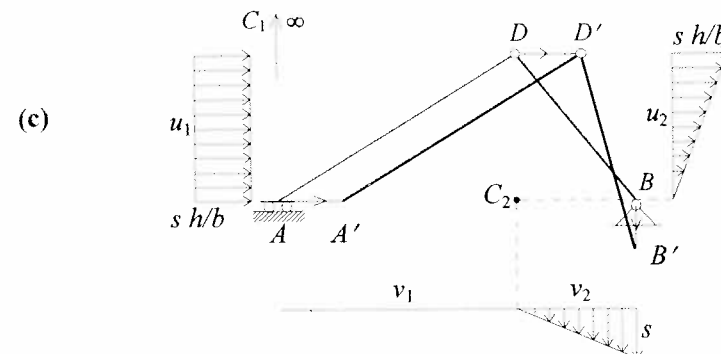
$$\mathbf{u} = \left\{ \frac{h}{b} s, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -s, \quad -\frac{s}{b} \right\}^T \quad (e)$$

Sostituendo nelle (a) si ottiene:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{h}{b} s \\ v_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \frac{s}{b} y_2 \\ v_2 = -s \left(1 + \frac{x_2}{b} \right) \end{cases} \quad (f)$$

Applicando le (15) si vede che il centro di rotazione C_1 del corpo C_1 ha coordinate $x_{C_1} = 0/0$

ed $y_{C_1} = \infty$; è perciò punto d'infinito della retta verticale (x_{C_1} è indeterminata). Il centro C_2 del corpo C_2 è invece un punto al finito, di coordinate $x_{C_2} = -b$, $y_{C_2} = 0$. La posizione dei centri di rotazione, i diagrammi degli spostamenti e la configurazione variata del sistema sono indicati in Fig. (c).



- **Osservazione 16.** La scelta $O_1 \equiv A$, $O_2 \equiv B$ effettuata nell'Esercizio 11 appare la più opportuna, in quanto semplifica la scrittura della matrice di congruenza. Se invece si segue il criterio illustrato nell'Osservazione 11, cioè si adotta un unico polo $O_1 \equiv O_2 \equiv O$ ed un unico riferimento Oxy , si ha il vantaggio di operare con un unico sistema di coordinate, ma in generale la matrice contiene meno zeri. Questo secondo approccio può invece essere utile se si automatizza il procedimento attraverso un programma di calcolo.

3.3 Classificazione cinematica

In base alle caratteristiche della matrice \mathbf{A} (interi m, n, p) ed al teorema di Rouché-Capelli è possibile procedere ad una *classificazione dei Sistemi di Corpi Rigidi (SCR)*. Si distinguono quattro casi fondamentali, discussi nel seguito.

- a) $m=n=p$: *sistema cinematicamente determinato*, o *isocinematico*. La matrice \mathbf{A} è quadrata ed ha rango massimo, poiché $\det \mathbf{A} \neq 0$. Il problema cinematico (39) ammette una ed una sola soluzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \quad (39)$$

qualunque sia il vettore dei cedimenti vincolari \mathbf{s} . In particolare, a cedimenti vincolari nulli, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$, corrisponde la soluzione banale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

In questa classe ricadono i SCR in cui il numero dei vincoli semplici m è uguale al numero degli spostamenti generalizzati, $n=6n_c$ (nello spazio) o $n=3n_c$ (nel piano). Quale ulteriore condizione, i vincoli devono essere "ben disposti", nel senso che ciascuno di essi deve essere rappresentato da una equazione che sia *linearmente indipendente* dalle altre $m-1$ equazioni. Detto in altri termini, perché un vincolo sia "ben disposto" deve effettivamente sottrarre al sistema un *g.d.l.*, e non piuttosto ripetere delle condizioni già espresse da altri vincoli.

Un sistema cinematicamente determinato non può assumere configurazioni diverse

da quella di riferimento se non intervengono cedimenti vincolari. Qualunque essi siano, il sistema trova sempre una nuova configurazione cinematicamente ammissibile.

I sistemi studiati nei tre esercizi precedenti (9÷11) sono cinematicamente determinati.

b) $p=m<n$: sistema cinematicamente indeterminato, o ipercinematico, o labile.

La matrice \mathbf{A} è rettangolare "bassa", con un numero di colonne maggiore del numero delle righe, per cui il sistema (39) è indeterminato. Il problema cinematico ammette dunque ∞^{n-m} soluzioni. Infatti, effettuata la partizione (si veda anche l'Appendice A1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{s}\} \quad \det \mathbf{A}_1 \neq 0 \quad (40)$$

la soluzione può scriversi nella forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U} \mathbf{q} \quad (41)$$

dove:

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (42)$$

e in cui le $l:=n-m$ variabili $\mathbf{q}:=\mathbf{u}_2$ sono arbitrarie; l è detto *grado di indeterminazione*, o di *labilità* del sistema. Il vettore \mathbf{q} , di dimensioni $l \times 1$, è il *vettore dei parametri liberi di spostamento*, o *lagrangiani*; la matrice \mathbf{U} , di dimensioni $n \times l$, è la *matrice dei modi cinematici*, o semplicemente *matrice modale*.

Si noti che la soluzione (42) è somma di due termini: il primo, \mathbf{u}_s , è una *soluzione particolare del problema non omogeneo* ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) ed è relativa ad un sistema principale isocinematico, di matrice \mathbf{A}_1 invertibile; il secondo $\mathbf{u}_q := \mathbf{U} \mathbf{q}$, è la *soluzione generale del problema omogeneo* ($\mathbf{s} = \mathbf{0}$), espressa come combinazione lineare a coefficienti \mathbf{q} incogniti di l soluzioni particolari linearmente indipendenti, costituite dalle colonne di \mathbf{U} . Queste descrivono i *modi cinematici* del sistema labile, cioè particolari autosoluzioni del problema cinematico omogeneo. Un sistema labile di grado l possiede l modi cinematici; questi però non sono univocamente determinati, perché ogni loro combinazione lineare, essendo ancora soluzione del problema omogeneo, è un modo cinematico.

In questa classe ricadono i *SCR* in cui il numero dei vincoli è troppo piccolo, insufficiente ad eliminare tutti i *g.d.l.* del sistema, che quindi si comporta come un meccanismo. Anche in assenza di cedimenti vincolari il sistema può assumere configurazioni diverse da quella di riferimento (descritte dai modi), e per questo motivo è detto labile. Un esempio di sistema labile è trattato nell'Esercizio 12 che segue.

c) $p=n<m$: sistema cinematicamente impossibile, o ipocinematico.

La matrice \mathbf{A} è rettangolare "alta", con numero di righe maggiore del numero di

colonne, per cui il sistema (39) è sovradeterminato. Il problema cinematico, in generale, non ammette soluzione. Se infatti si partiziona il sistema (39) si ha (si veda anche l'Appendice A2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{Bmatrix} \quad \det \mathbf{A}_1 \neq 0 \quad (43)$$

per cui, anche se si risolvono le prime n equazioni, $\mathbf{u} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{s}_1$, le restanti $r:=m-n$ non sono soddisfatte, essendo in generale $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2$; r è detto *grado di sovra-determinazione* del sistema.

Fa eccezione naturalmente il caso in cui i cedimenti vincolari sono scelti "ad hoc", in modo tale da soddisfare la parte bassa del sistema di equazioni. (Si può anche dire che il sistema ammette soluzione solo se i termini noti sono tra loro combinazioni lineari nello stesso modo in cui lo sono le righe della matrice \mathbf{A}). Questa circostanza si verifica quando:

$$\mathbf{Q} \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (44)$$

con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (45)$$

La (45) esprime la condizione di solvibilità che deve essere soddisfatta dai cedimenti vincolari affinché il problema cinematico, sebbene impossibile, ammetta egualmente soluzione. Essa è detta *condizione di compatibilità* (o di *solvibilità*) del problema cinematico, o ancora *condizione esplicita di congruenza*. La matrice \mathbf{Q} , di dimensioni $r \times m$, è la *matrice di compatibilità cinematica*. Se la (45) è soddisfatta, le ultime r equazioni possono essere scartate (in quanto ripetizione delle prime n) ed il sistema può essere risolto in corrispondenza delle prime. Il termine noto nullo ($\mathbf{s} = \mathbf{0}$) rientra nel caso particolare, e ad esso è associata la soluzione banale $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ricadono in questa classe i *SCR* in cui il numero dei vincoli è troppo grande, rispetto ai *g.d.l.* da sopprimere. Se non intervengono cedimenti vincolari, l'unica configurazione compatibile è quella di riferimento $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, come nel caso di sistemi cinematicamente determinati. Se invece è $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, in generale, a causa dell'eccessivo numero dei vincoli, il sistema non può trovare altre configurazioni che rispettino le condizioni geometriche assegnate dai cedimenti vincolari e dalla rigidità interna: il problema cinematico è pertanto impossibile. Si vedrà nel seguito del testo che, rimuovendo l'ipotesi di rigidità di parte dei dispositivi meccanici, e trattandoli come elasticamente deformabili, sarà possibile determinare una soluzione unica. Un esempio di sistema cinematicamente impossibile è illustrato più avanti nell'Esercizio 13.

d) $p=m=n$: sistema cinematicamente degenere.

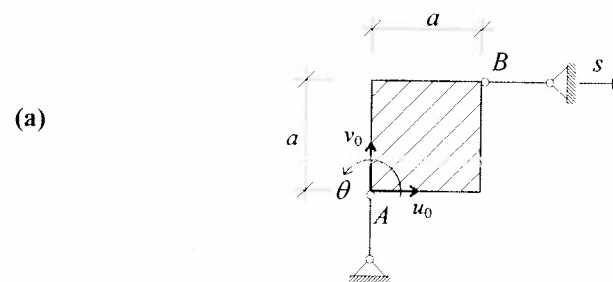
E' il caso di matrici \mathbf{A} quadrate, con $\det \mathbf{A} = 0$. Poiché il sistema è di forma non normale ($p < m$) in generale il problema cinematico non ammette soluzione. Se, come caso particolare, l'ammette perché $\text{rango}[\mathbf{A} | \mathbf{s}] = \text{rango}[\mathbf{A}]$, le soluzioni sono ∞^{n-p} , in quanto $p < n$.

Il sistema degenere è quindi essenzialmente cinematicamente impossibile; nei casi eccezionali si comporta però come un sistema cinematicamente indeterminato. Se i cedimenti vincolari sono nulli ($s=0$) le soluzioni sono comunque infinite, per cui il sistema è un meccanismo.

Sono cinematicamente degeneri quei SCR in cui i vincoli, pure in numero pari ai g.d.l. dei corpi, sono "mal disposti", nel senso che alcuni impongono condizioni cinematiche già espresse da altri vincoli, per cui di fatto non sottraggono g.d.l. al sistema. Quale ulteriore effetto si oppongono a cedimenti vincolari non nulli. Un esempio sarà illustrato nell'Esercizio 14.

Oltre ai quattro casi trattati si possono considerare altri due casi di sistemi degeneri: $p < m < n$ e $p < n < m$. Le conclusioni a cui si perviene sono simili a quelle del caso d) e sono lasciate per esercizio al lettore.

Esercizio 12: Si studi il sistema cinematicamente indeterminato rappresentato in figura.



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido vincolato da due bielle. Il numero dei g.d.l. è $n=3$, la molteplicità globale dei vincoli è $m=2$. La matrice \mathbf{A} ha dimensioni 2×3 ed il sistema è quindi labile, con grado di labilità $l=n-m=1$. Si scelgono gli spostamenti generalizzati come in figura, assunto $O \equiv A$. Le due condizioni di vincolo sono:

$$v_A = 0, \quad u_B = s \quad (a)$$

che, espresse in termini di spostamenti generalizzati, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \end{Bmatrix} \quad (b)$$

Il sistema (b) può essere riscritto nella forma (41) portando a secondo membro una colonna e facendo in modo che la sottomatrice quadrata \mathbf{A}_1 che resta a primo membro sia non singolare. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} 0 \\ a \end{Bmatrix} \quad (c)$$

dove si è posto $q = \theta$, parametro arbitrario.

Risolvendo si ha:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

La soluzione (d) è della forma (42). Il primo termine, proporzionale a s , rappresenta una soluzione particolare (in quanto legata ad una particolare scelta di \mathbf{A}_1) del problema non omogeneo; il secondo, proporzionale al parametro q , rappresenta la soluzione generale del problema omogeneo; il vettore colonna moltiplicato per q è la matrice modale,

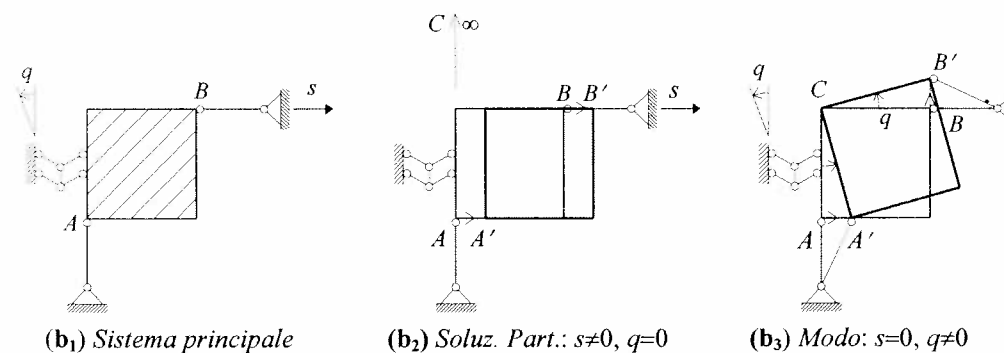
$$\mathbf{U} = [a \quad 0 \quad 1]^T \quad (e)$$

che qui è costituita da un unico modo.

Il procedimento può essere interpretato in modo strettamente meccanico. Si pensi di introdurre il vincolo ausiliario che assegna la rotazione $q = \theta$ (Fig. b₁) e che rende il sistema isocinematico. Questo si definisce *sistema principale cinematicamente determinato*. Il problema cinematico ad esso relativo si scrive:

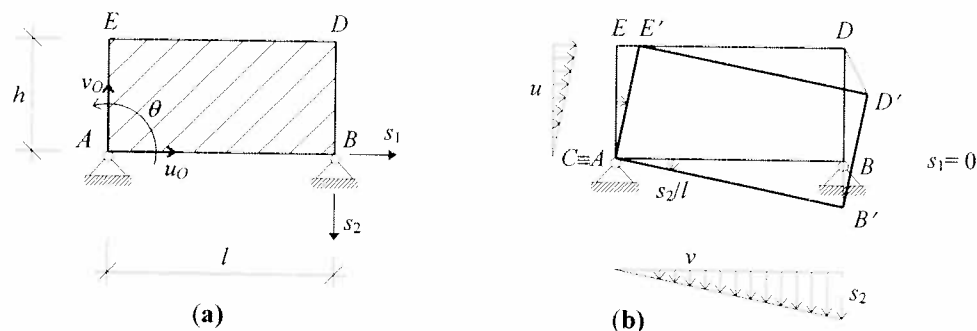
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \\ q \end{Bmatrix} \quad (f)$$

avendo aggiunto un'ulteriore equazione alle (b). Risolvendo l'ultima equazione e sostituendo nelle precedenti, le equazioni (f) si riscrivono nella forma (c).



La scelta dunque di un minore non nullo di \mathbf{A} equivale alla scelta di un sistema principale isocinematico; la soluzione particolare è quella che si ottiene assegnando il cedimento vincolare dato al sistema principale; la soluzione generale del problema omogeneo è quella che si ottiene assegnando un cedimento di ampiezza arbitraria al vincolo ausiliario. Le soluzioni sono illustrate nelle Fig. (b₂) e (b₃). Questa interpretazione può essere estesa in modo ovvio a sistemi con grado di labilità maggiore di 1.

Esercizio 13: Si studi il sistema cinematicamente impossibile rappresentato in Fig. (a). Si ottenga poi la matrice di compatibilità cinematica.



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido vincolato da cerniere. Il numero dei g.d.l. è $n=3$, la molteplicità globale dei vincoli è $m=2 \times 2=4$. La matrice A ha dimensioni 4×3 ed il sistema è quindi cinematicamente impossibile di grado $r=m-n=1$. Si scelgono gli spostamenti generalizzati come in figura, avendo assunto $O \equiv A$.

Le quattro condizioni di vincolo sono:

$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad u_B = s_1, \quad v_B = -s_2 \quad (a)$$

che, espresse in funzione degli spostamenti generalizzati, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_1 \\ -s_2 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

Il problema è manifestamente impossibile in quanto la prima e la terza equazione hanno lo stesso primo membro e diversi i termini noti. Se però è $s_1 = 0$, una delle due equazioni si può scartare ed il sistema può essere risolto utilizzando le altre tre equazioni, la cui matrice dei coefficienti è non singolare. Così operando si ottiene:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad \theta = -s_2/l \quad (c)$$

Il campo degli spostamenti associati è diagrammato in Fig. (b).

Si osservi che se $s_1 = 0$, la matrice A e la matrice orlata che si ottiene aggiungendo ad A la colonna dei termini noti, hanno lo stesso rango $p=3$; quindi come risulta dal teorema di Rouché-Capelli, il problema ammette soluzione. Se $s_1 \neq 0$, il problema non ammette soluzione. Ciò può essere facilmente giustificato, in quanto, per la condizione di inestensibilità del segmento AB (Osservazione 3), se $u_B = s_1$ anche u_A deve essere uguale a s_1 , ma ciò è impossibile per la presenza del vincolo in A che impone uno spostamento nullo.

Per ottenere l'equazione esplicita di compatibilità (45) si considerano cedimenti generici s_{A_x} , s_{A_y} , s_{B_x} , s_{B_y} dei quattro vincoli. Risolvendo la prima, la seconda e la quarta delle relazioni di vincolo e sostituendo nella terza si ottiene:

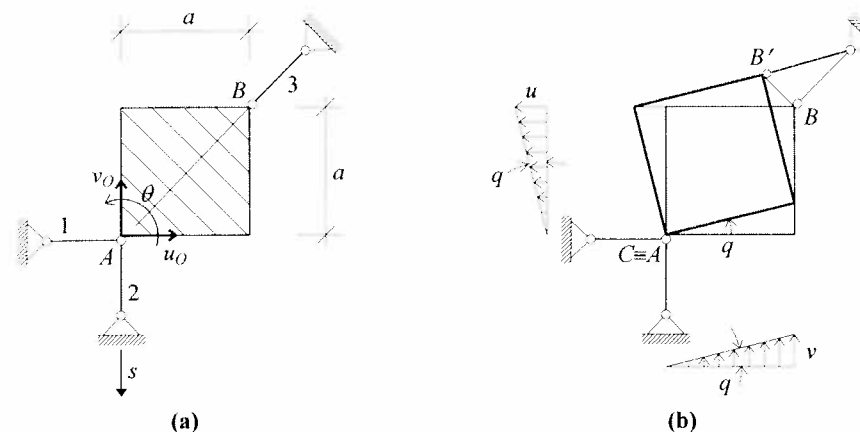
$$s_{B_x} - s_{A_x} = 0 \quad (d)$$

che costituisce l'equazione cercata; la matrice di compatibilità cinematica è dunque:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (e)$$

La condizione di solvibilità è facilmente interpretabile: il sistema ammette soluzione qualunque siano gli spostamenti verticali assegnati ad A e B , in quanto non producono allungamento del segmento AB ; se sono invece assegnati degli spostamenti orizzontali, questi devono essere tra loro uguali.

Esercizio 14: Si studi il sistema cinematicamente degenere rappresentato in Fig. (a).



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido vincolato con tre bielle. Il numero dei g.d.l. è $n=3$, la molteplicità globale dei vincoli è $m=3$. La matrice A ha quindi dimensioni 3×3 . Scelti gli spostamenti generalizzati come in figura, le tre condizioni di vincolo

$$u_A = 0, \quad v_A = -s, \quad (u_B + v_B) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (a)$$

si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

Il determinante della matrice di congruenza è nullo, mentre il minore principale 2×2 indicato nella (b) è diverso da zero, per cui il rango è $p=2$. Il sistema è di forma non normale ed in generale non ammette soluzione. Peraltro, poiché il rango della matrice orlata è $p=3$, non si verificano le condizioni di esistenza della soluzione, ed il problema cinematico è impossibile.

La ragione di ciò risiede nella errata disposizione dei vincoli (tre bielle convergenti in A). Infatti ogni biella assegna ad A una componente di spostamento secondo la retta di appartenenza; poiché due bielle definiscono univocamente lo spostamento di A (si veda in proposito l'Esercizio 7) la terza condizione, a meno di casi particolari, non può essere soddisfatta. Nell'esempio, le bielle 1 e 3 assegnano ad A uno spostamento nullo, mentre la biella 2 assegna una componente diversa da zero.

Nel caso omogeneo $s = 0$ ricorrono le condizioni del teorema di Rouché-Capelli per le quali il problema ammette soluzione. Risolvendo le (b) si ottengono ∞^1 soluzioni $u_0=0, v_0=0, \theta=q$ (con q arbitrario); il corpo perciò può ruotare intorno ad A di una quantità arbitraria (si veda la Fig. b). Ciò è conseguenza del fatto che, poiché un vincolo ripete le condizioni degli altri due, non sottrae al corpo alcun $g.d.l.$, per cui il sistema si comporta come labile.

3.4 Classificazione diretta

Spesso è possibile, sulla base di considerazioni qualitative, procedere ad una classificazione del sistema ancora prima di scrivere la matrice di congruenza. Il semplice computo dei vincoli e dei $g.d.l.$ permette di riconoscere immediatamente se il sistema è cinematicamente impossibile o indeterminato, mentre più difficile è riconoscere un sistema cinematicamente determinato da uno degenere. Le considerazioni che seguono servono allo scopo.

In Fig. 18a sono raffigurati tre sistemi cinematicamente determinati, in Fig. 18b le corrispondenti versioni degeneri.

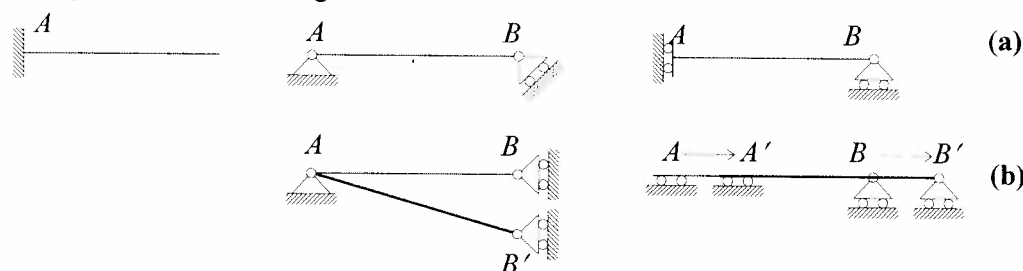


Fig. 18 Sistemi costituiti da un solo corpo: (a) cinematicamente determinati; (b) degeneri.

Il primo (*mensola*) è isocinematico in quanto l'incastro sottrae al corpo i tre $g.d.l.$. Il secondo (*trave appoggiata*) è ancora isocinematico in quanto la cerniera vincola il corpo a ruotare intorno ad A ma lo spostamento di B compatibile con la rotazione (ortogonale al segmento AB) non è consentito dal carrello, a differenza della versione degenere. In quest'ultimo caso i vincoli equivalgono a tre bielle convergenti in A , come già esaminato nell'Esercizio 14. Nel terzo sistema il glifo lascia al corpo la sola traslazione verticale, che però non è consentita dal carrello; nel caso degenere la traslazione (in questo caso orizzontale) permessa dal glifo è invece consentita dal carrello.

La Fig. 19 riporta diversi sistemi costituiti da due corpi vincolati con cerniere o glifi. Ricordando che il glifo equivale ad una cerniera all'infinito, i sistemi rappresentano diverse versioni dell'*arco a tre cerniere*. La condizione perché un arco a tre cerniere sia isocinematico è che le tre cerniere siano non allineate. Riguardando infatti uno dei due corpi come una biella si ricade nel caso di un corpo vincolato con una cerniera ed una biella. Nella versione degenere del primo sistema le tre cerniere sono allineate sulla retta orizzontale ABD , del secondo sulla retta verticale per D , del terzo sulla retta AB . In figura sono anche indicate le configurazioni variate. Si noti che con tre glifi non può realizzarsi un sistema isocinematico in quanto le tre cerniere sono sempre allineate sulla retta impropria del piano cui il sistema appartiene.

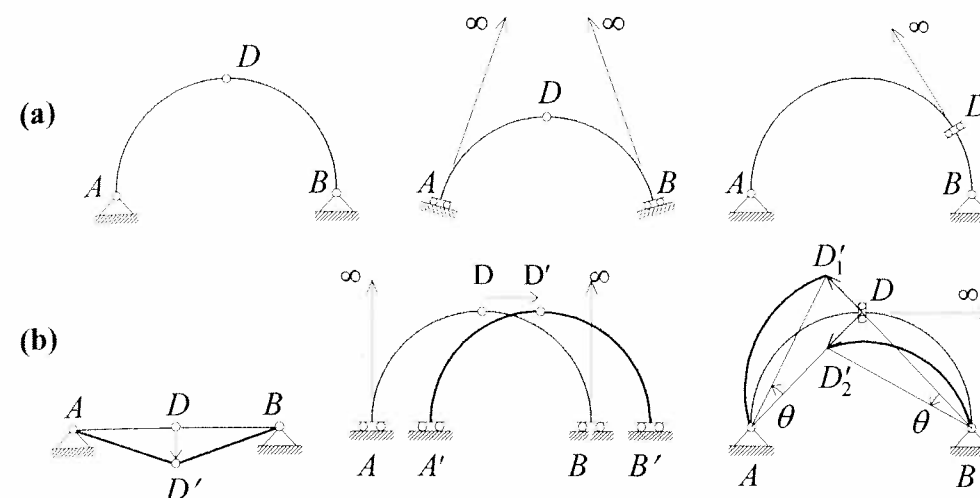


Fig. 19 Archi a tre cerniere: (a) isocinematici; (b) degeneri.

Passando a considerare sistemi con tre corpi, l'*anello a tre cerniere* indicato in Fig. 20 è un sistema cinematicamente determinato per vincoli interni se le tre cerniere (al finito o all'infinito) sono non allineate. Riguardando infatti uno dei tre corpi come il suolo, studiando cioè lo spostamento relativo degli altri due corpi rispetto al terzo, il sistema si riduce ad un arco a tre cerniere, già studiato. Al sistema restano comunque tre $g.d.l.$, corrispondenti a due traslazioni e una rotazione d'insieme; perché dunque sia reso cinematicamente determinato deve essere vincolato al suolo (quindi con vincoli esterni) con tre vincoli linearmente indipendenti.

In molti casi queste poche cognizioni relative a sistemi semplici (trave appoggiata, mensola, arco a tre cerniere, anello a tre cerniere) sono sufficienti a classificare un sistema più complesso. Ciò risulta possibile quando si riconosca nel sistema complesso una successione di più sistemi semplici isocinematici, disposti in serie o in serie/parallelo, come illustrato in Fig. 21.

Il sistema in Fig. 21a è costituito da due archi a tre cerniere in serie, l'arco ADB , vincolato al suolo, e l'arco EGF vincolato al precedente. Il sistema in Fig. 21b è costituito da una prima sottostruttura isocinematica $ABDEF$, a sua volta composta da una trave appoggiata AB e da un arco a tre cerniere DFE (ovvero da un anello a tre cerniere appoggiato al suolo), e da una seconda sottostruttura isocinematica (mensola HI) in parallelo alla prima; le due sottostrutture sono collegate dalla trave appoggiata GH .

Le matrici A di congruenza dei due sistemi in Fig. 21 hanno la forma illustrata in Fig. 22, dove si sono genericamente indicati i soli termini non nulli (ad esempio: il vincolo in E del primo sistema, poiché collega i corpi 1 e 3, comporta una relazione di vincolo in cui appaiono gli spostamenti generalizzati di questi soli due corpi). Si vede che le equazioni del primo sistema possono essere risolte in "cascata", risolvendo prima quelle relative all'arco ADB (struttura "trascinante") e poi quelle relative all'arco EGF (struttura "trascinata"), in cui gli spostamenti generalizzati dei corpi 1 e 2 sono ormai noti. Si noti che procedendo in questo modo è necessario invertire le

sottomatrici 6×6 A_{11} e A_{22} , che infatti sono non singolari, in quanto relative ad archi a tre cerniere non degeneri. Questo spiega perché il sistema è isocinematico.

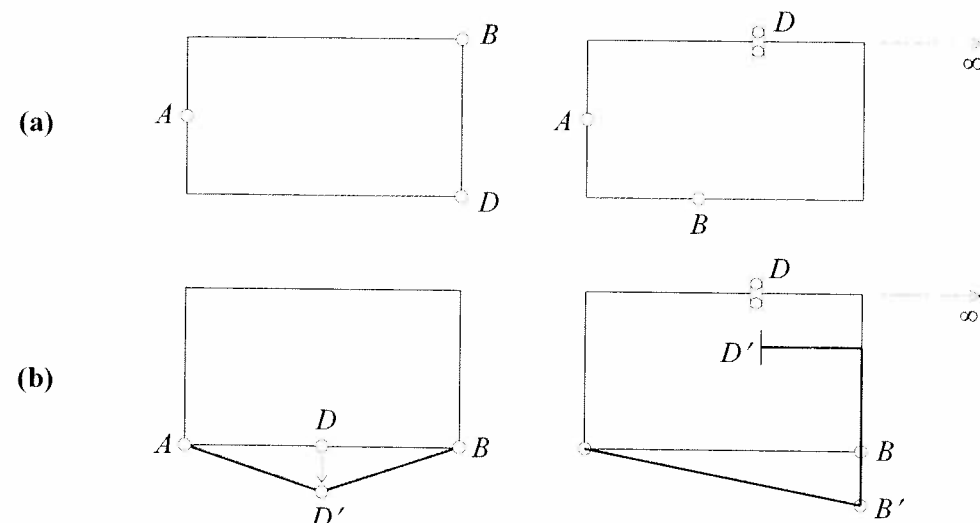


Fig. 20 Anelli a tre cerniere: (a) isocinematici per vincoli interni; (b) degeneri

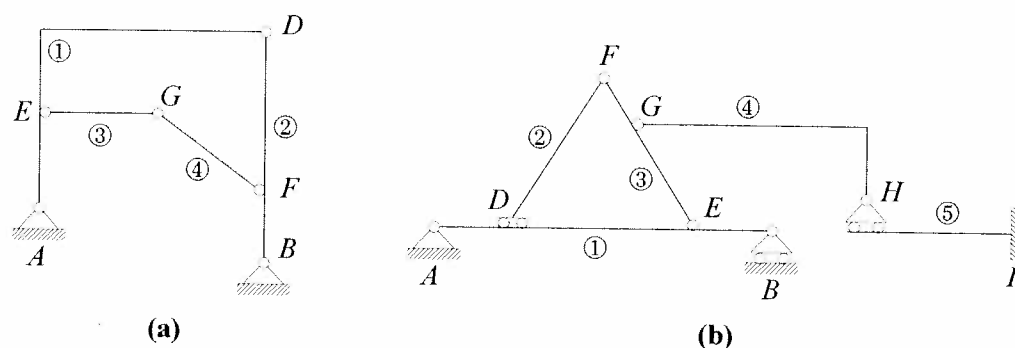


Fig. 21 Sistemi isocinematici: (a) in serie; (b) in serie/parallelo

	①	②	③	④	
A	×				A_{11}
B		×			
D	×	×			
E	×		×		
F		×		×	A_{21}
G			×	×	
					A_{22}

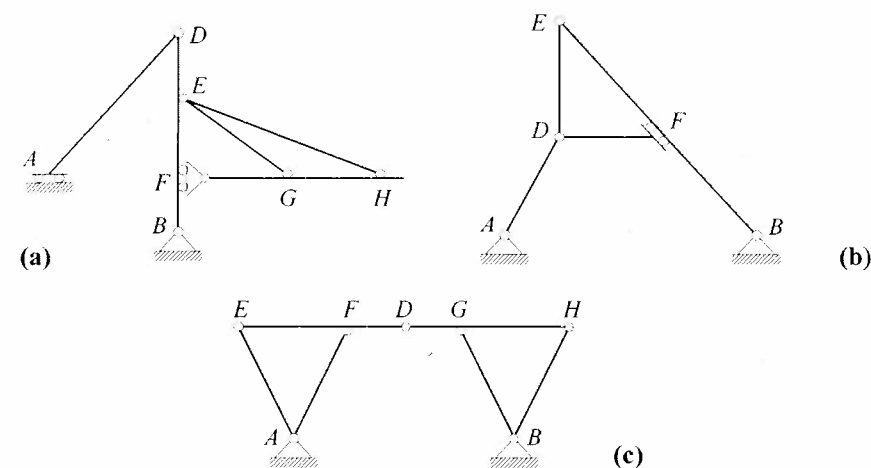
	①	②	③	④	⑤	
A	×					A_{11}
B	×					
D	×	×				
E	×		×			
F		×	×			A_{21}
G			×	×		
H				×	×	A_{22}
I					×	
						A_{23}

Fig. 22 Matrici A dei due sistemi in Fig. 21

Si passi ad esaminare il secondo sistema. La sottomatrice A_{11} , relativa alla sottostruttura $ABDEF$ ha la stessa forma di quella prima esaminata, ed è quindi invertibile; così pure la matrice A_{33} che è relativa ad una mensola. Questi due sistemi (in parallelo) possono essere risolti indipendentemente. Noti in particolare gli spostamenti generalizzati dei corpi 3 e 5 si possono risolvere le equazioni dei vincoli G ed H , invertendo la matrice non singolare A_{22} , relativa ad una trave appoggiata. Ciò spiega perché il sistema è isocinematico.

Si noti che riconoscere, se esiste, un ordine gerarchico nelle sottostrutture componenti è utile sia perché permette di classificare il sistema sia perché suggerisce una strategia operativa che agevola la soluzione: dapprima si risolve la struttura trascinante e poi quella trascinata.

Esercizio 15: Sulla base di considerazioni qualitative classificare i sistemi in figura. Determinare poi la molteplicità globale dei vincoli.



Il sistema (a) può considerarsi costituito da un arco a tre cerniere ADB e, in serie, un anello a tre cerniere EGH appoggiato in E ed F all'arco. È perciò isocinematico. Si noti che i vincoli semplici presenti sono: due in A , D , B , G ed H , uno in F e quattro in E , cioè complessivamente quindici, per un sistema costituito da cinque corpi. Dei quattro vincoli in E due sono interni all'anello a tre cerniere e due realizzano la cerniera tra le due sottostrutture.

Nel sistema (b) si riconosce innanzitutto un anello a tre cerniere $DEFB$ non degenero (le tre cerniere sono non allineate). Riguardando l'asta AD come una biella (invece che un corpo), l'anello risulta appoggiato al suolo, e quindi il sistema è isocinematico. Alternativamente, l'anello può essere riguardato come un singolo corpo rigido (si veda poi l'Osservazione 17); lo schema è quindi quello di un arco a tre cerniere (cerniere A , D , B). I vincoli sono due in A , B , E , F e quattro in D ; complessivamente dodici per un sistema di quattro corpi. Per il vincolo in D valgono le stesse considerazioni fatte per il vincolo in E del sistema (a).

Nel sistema (c) si riconoscono due anelli a tre cerniere, AEF e BGH ; considerandoli come due corpi lo schema è quello di arco a tre cerniere ADB . Il sistema è perciò isocinematico. I vincoli sono due in E , F , D , G , H , e quattro in A e B , quindi complessivamente diciotto per un sistema di sei corpi. I quattro vincoli in A e B possono considerarsi due interni all'anello e due esterni, che collegano l'anello al suolo.

- **Osservazione 17.** L'Esercizio 15 ha suggerito l'opportunità di considerare alcune sottostrutture come un unico corpo rigido. Infatti, se queste sottostrutture non sono affette da cedimenti vincolari interni, lo spostamento relativo tra due punti qualsiasi ad essi appartenenti è nullo per ogni campo di spostamenti cinematicamente ammissibile. Le sottostrutture si comportano quindi come corpi rigidi. Questa osservazione in qualche circostanza è di grande utilità, in quanto permette di ridurre considerevolmente il numero dei g.d.l. del problema.

3.5 Vincoli multipli

L'esercizio precedente ha messo in evidenza l'esistenza di alcuni vincoli che collegano tra loro più di due corpi o che sono contemporaneamente interni ed esterni. È pertanto opportuno analizzare maggiormente in dettaglio il problema.

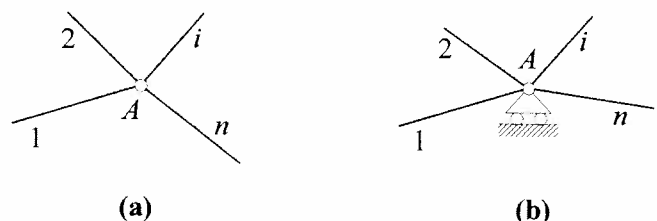


Fig. 23 Vincoli multipli; n corpi collegati da: (a) una cerniera; (b) da una cerniera e un carrello

Si considerino dapprima n corpi rigidi tra loro collegati in un punto A da una cerniera (Fig. 23a). Il vincolo interno, in assenza di cedimenti vincolari, impone che i punti A_1, A_2, \dots, A_n , rispettivamente appartenenti ai corpi 1, 2, ..., n , abbiano spostamenti relativi nulli, ovvero abbiano lo stesso spostamento assoluto. Deve cioè essere:

$$\mathbf{u}_{A_1} = \mathbf{u}_{A_2} = \dots = \mathbf{u}_{A_i} = \dots = \mathbf{u}_{A_n} \quad (47)$$

Le (47) costituiscono un sistema di $n-1$ relazioni vettoriali linearmente indipendenti. Una possibile scrittura, tra le altre, è:

$$\mathbf{u}_{A_1} = \mathbf{u}_{A_j} \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (48)$$

che in forma scalare si scrivono:

$$\begin{aligned} u_{A_1} &= u_{A_j} \\ v_{A_1} &= v_{A_j} \end{aligned} \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (49)$$

La molteplicità globale del vincolo di Fig. 23a è quindi $m=2(n-1)$. Le (49) esprimono il vincolo come un sistema di $n-1$ cerniere che collegano il corpo 1 ai rimanenti $n-1$ corpi.

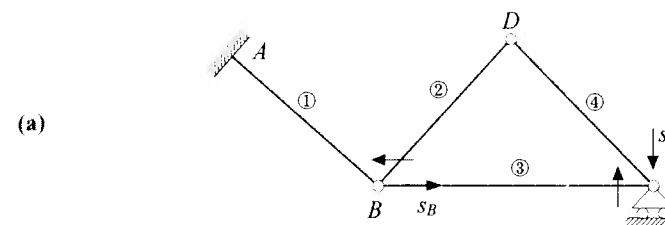
Aggiungendo al vincolo precedente un carrello che vincola il punto A al suolo si ottiene il sistema di Fig. 23b. Il vincolo ha perciò molteplicità $m=2(n-1)+1=2n-1$ ed è contemporaneamente vincolo interno (di molteplicità $2(n-1)$) ed esterno, di molteplicità 1. Alle (49) va quindi aggiunta un'ulteriore condizione, che impone l'annullamen-

to di una qualunque delle componenti v_{A_j} , ad esempio:

$$v_{A_1} = 0 \quad (50)$$

Si noti che, in entrambi i casi esaminati, la scrittura delle condizioni di vincolo non è univoca.

Esercizio 16: Scrivere le condizioni di vincolo relative al sistema in figura in assenza di cedimenti vincolari ($s_B = s_E = 0$).



Le condizioni relative ai vincoli in A e D non offrono alcuna difficoltà:

$$\begin{aligned} u_A &= v_A = 0, & \theta_1 &= 0 \\ u_{D_2} - u_{D_4} &= 0, & v_{D_2} - v_{D_4} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Nella cerniera B convergono tre aste. La molteplicità del vincolo è quindi $2(3-1)=4$. Possibili relazioni di vincolo sono:

$$u_{B_1} - u_{B_2} = 0, \quad v_{B_1} - v_{B_2} = 0, \quad u_{B_1} - u_{B_3} = 0, \quad v_{B_1} - v_{B_3} = 0 \quad (b)$$

oppure:

$$u_{B_2} - u_{B_3} = 0, \quad v_{B_2} - v_{B_3} = 0, \quad u_{B_1} - u_{B_3} = 0, \quad v_{B_1} - v_{B_3} = 0 \quad (c)$$

Le relazioni (b) e (c) corrispondono a due diversi dispositivi di vincolo, rappresentati rispettivamente in Fig. (b) e Fig. (c), tra loro equivalenti. In essi i punti B_j sono considerati infinitamente vicini.

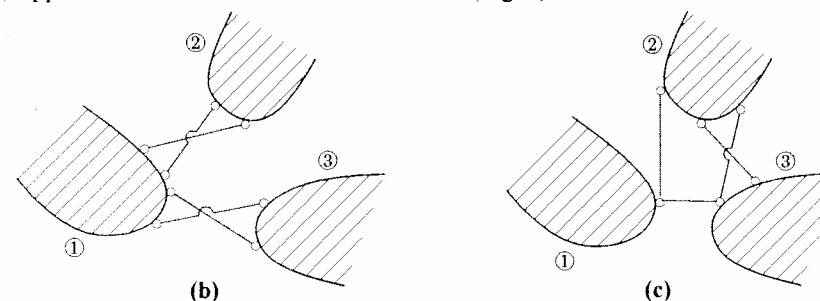
Il vincolo nel punto E ha molteplicità $m=3$. Possibili condizioni di vincolo sono:

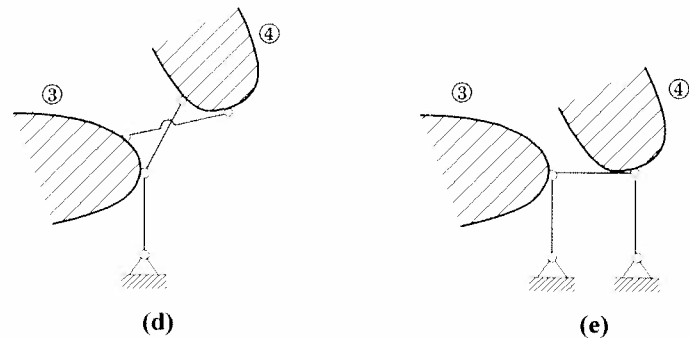
$$u_{E_3} - u_{E_4} = 0, \quad v_{E_3} - v_{E_4} = 0, \quad v_{E_3} = 0 \quad (d)$$

oppure

$$u_{E_3} - u_{E_4} = 0, \quad v_{E_3} = 0, \quad v_{E_4} = 0 \quad (e)$$

Gli associati dispositivi di vincolo sono rappresentati nelle Fig. (d) ed (e). Si noti che il vincolo può essere equivalentemente espresso come combinazione di due vincoli interni ed uno esterno (Fig. d) oppure di un vincolo interno e due esterni (Fig. e).





- **Osservazione 18.** La scrittura delle condizioni di vincolo multiplo è, entro certi limiti, arbitraria. Tuttavia, in presenza di cedimenti vincolari la scelta è guidata dai cedimenti assegnati. L'esempio che segue serve a chiarire il concetto.

Esercizio 17: Con riferimento alla struttura dell'Esercizio 16, scrivere le condizioni di vincolo in B e in E quando i cedimenti vincolari s_B e s_E sono diversi da zero.

Il cedimento in B impone uno spostamento relativo secondo l'orizzontale ai punti B_2 e B_3 . La schematizzazione di Fig. (b), in cui i punti B_2 e B_3 non sono direttamente collegati (ma lo sono solo attraverso il punto B_1), non è idonea a rappresentare questo cedimento. Utilizzando quindi quella di Fig. (c), in cui il vincolo che è sede del cedimento è direttamente considerato, si ha:

$$u_{B_2} - u_{B_3} = -s_B, \quad v_{B_2} - v_{B_3} = 0, \quad u_{B_1} - u_{B_3} = 0, \quad v_{B_1} - v_{B_2} = 0 \quad (a)$$

Il segno negativo nella prima relazione è dovuto al fatto che, come indicato in Fig. (a), lo spostamento relativo assegnato è di allontanamento, mentre $u_{B_2} - u_{B_3} > 0$ indica avvicinamento. Analogamente, il cedimento in E , impone uno spostamento relativo (di avvicinamento) secondo la verticale tra i punti E_3 ed E_4 . La disposizione dei vincoli di Fig. (e) non è idonea a rappresentarlo, mentre quella di Fig. (d) conduce alle seguenti relazioni:

$$u_{E_3} - u_{E_4} = 0, \quad v_{E_3} - v_{E_4} = s_E, \quad v_{E_3} = 0 \quad (b)$$

3.6 Distorsioni

Un particolare tipo di cedimento è rappresentato dallo spostamento relativo tra due parti di un corpo sezionate da un piano π (Fig. 24a). Il cedimento è detto *distorsione*. La distorsione simula la rottura di un corpo rigido secondo un assegnato piano, con conseguente spostamento relativo (supposto noto) tra le parti del corpo. Poiché la distorsione viola il vincolo interno di rigidità è necessario modellare il corpo come costituito da *due corpi rigidi*, mutuamente incastrati sul piano π (Fig. 24b). Questa operazione viene anche detta di *esplicitazione del vincolo di continuità*. Si può perciò anche dire che *le distorsioni sono i cedimenti dei vincoli* (interni) di continuità.

Nello spazio si hanno sei possibili distorsioni per ciascun piano π , tre traslazioni e tre rotazioni relative; nel piano si hanno tre possibili distorsioni, due traslazioni ed una rotazione. D'altra parte il vincolo di continuità (cioè l'incastro interno) ha molteplicità sei nello spazio e tre nel piano, cosicché si ha una distorsione per ciascun vincolo semplice di continuità.

Spesso il corpo rigido è costituito da una trave (ha cioè una dimensione prevalente

sulle altre). In tal caso hanno interesse quei problemi in cui il piano π su cui avviene la distorsione coincide con una sezione trasversale S della trave. Con riferimento ad una trave piana rettilinea (Fig. 25) le distorsioni vengono dette (a) estensionale, (b) tagliante e (c) flessionale.

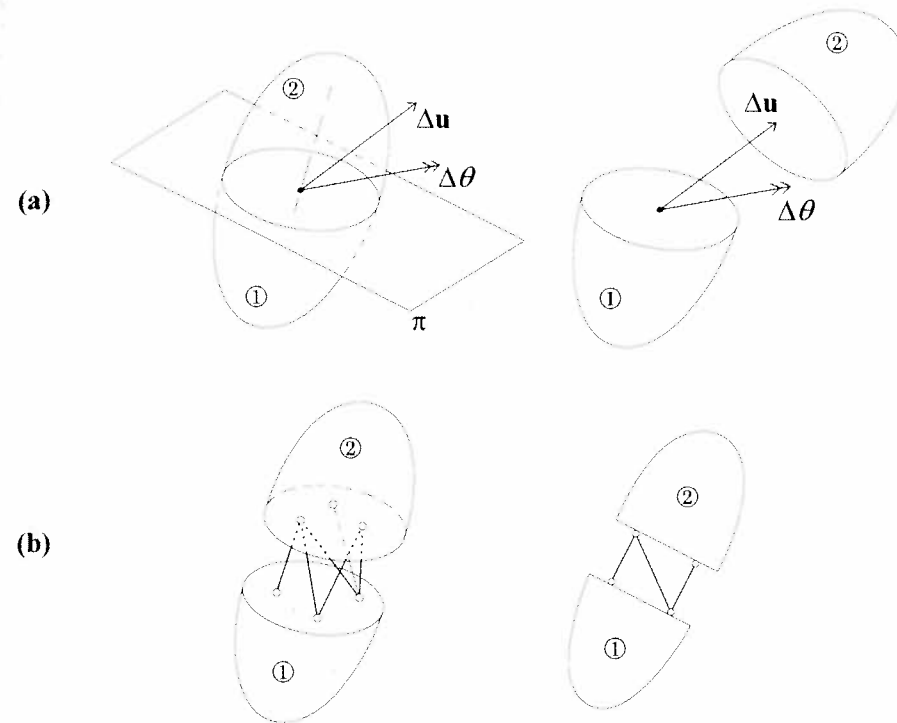


Fig. 24 (a) Distorsione, (b) vincolo di continuità, nello spazio e nel piano

Il problema cinematico in presenza di distorsioni non comporta particolari difficoltà, poiché può ricondursi a quello degli usuali cedimenti vincolari interni, come l'esercizio che segue chiarirà.

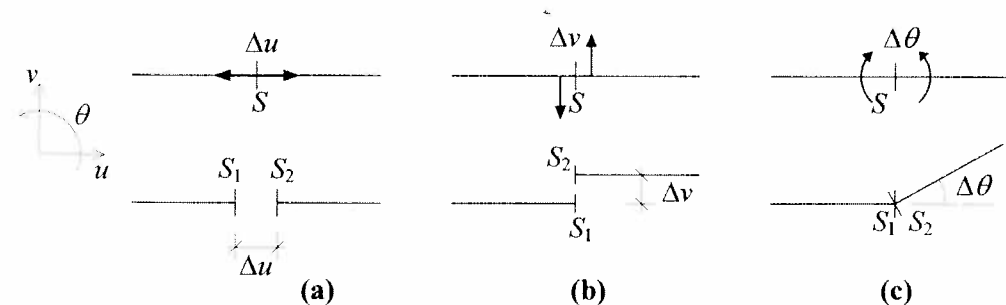
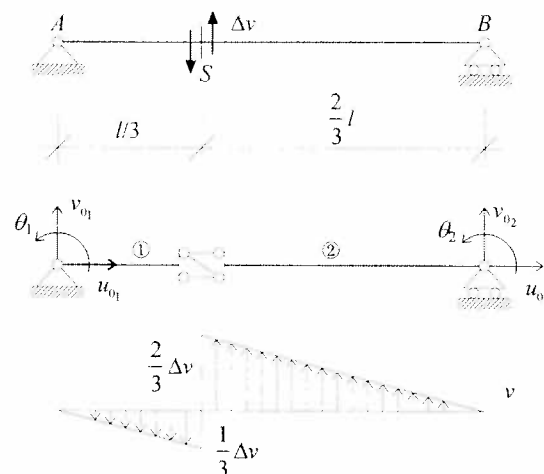


Fig. 25 Distorsioni di una trave piana rettilinea

Esercizio 18: Si diagrammi il campo degli spostamenti di una trave appoggiata soggetta ad una distorsione tagliante nella sezione S .



Si considera il sistema come costituito da due corpi, il corpo AS (corpo 1) ed il corpo SB (corpo 2), incastrati in S . Il sistema ha $n=2 \times 3=6$ g.d.l.. Sono presenti due vincoli semplici in A ed uno in B (vincoli esterni) più tre vincoli in S (vincoli interni), per cui la molteplicità globale dei vincoli è $m=6$. Le relazioni di vincolo esterno si scrivono:

$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad v_B = 0 \quad (a)$$

quelle di vincolo interno:

$$u_{S_2} - u_{S_1} = 0, \quad v_{S_2} - v_{S_1} = \Delta v, \quad \theta_2 - \theta_1 = 0 \quad (b)$$

Riducendo gli spostamenti dei due corpi rispettivamente ai poli A e B si ottengono le seguenti equazioni di congruenza:

$$u_{01} = 0, \quad v_{01} = 0, \quad v_{02} = 0 \quad (c)$$

$$u_{02} - u_{01} = 0, \quad (v_{02} - 2\theta_2 l/3) - (v_{01} + \theta_1 l/3) = \Delta v, \quad \theta_2 - \theta_1 = 0$$

che, risolte, forniscono

$$\theta_1 = \theta_2 = -\frac{\Delta v}{l} \quad (d)$$

mentre gli altri spostamenti generalizzati si annullano. I punti A e B sono quindi centri di rotazione dei due corpi. Il campo degli spostamenti verticali è indicato in figura; gli spostamenti orizzontali sono nulli.

- Osservazione 19.** Il problema cinematico relativo ad una trave soggetta a distorsioni ammette soluzione solo se la trave è monoconnessa (oltre che ovviamente vincolata in modo determinato), come è ad esempio nell'Esercizio 18. In questo caso, infatti, la sezione S divide la trave in due corpi rigidi, cosicché all'incremento del numero globale dei vincoli (tre nel piano, sei nello spazio), conseguente all'esplicitazione del vincolo di continuità, corrisponde lo stesso incremento del numero globale di g.d.l. del sistema. Se la trave è pluriconnessa, invece, (come negli esempi di Fig. 26) una sezione S non divide il corpo in due parti,

e quindi non fa aumentare il numero dei g.d.l.. Una trave pluriconnessa è quindi cinematicamente impossibile per vincoli interni; esistono quindi dei vincoli sovrabbondanti che rendono impossibile l'applicazione di distorsioni arbitrarie (nel senso che sono incompatibili con il modello di corpo rigido). Con riferimento alla Fig. 26, i vincoli sovrabbondanti sono evidenziati in corrispondenza delle sezioni S_1 ed S_2 . Se i vincoli vengono rimossi, le travi diventano monoconnesse, e quindi cinematicamente determinate per vincoli interni. Perciò una trave biconnessa ha nel piano tre vincoli sovrabbondanti (sei nello spazio), una trave tri-connessa sei vincoli sovrabbondanti (dodici nello spazio) e così via.

Vale la pena sottolineare che il problema della pluriconnessione si pone solo nel caso di distorsioni, e non in quello dei cedimenti vincolari propriamente detti; questi infatti interessano la trave come un unico corpo rigido.

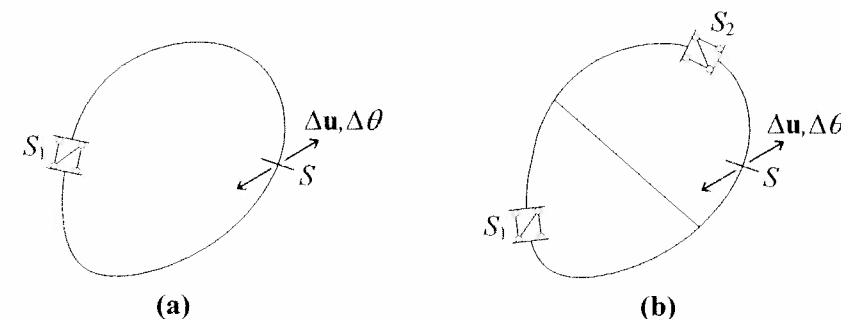


Fig. 26 Travi pluriconnesse: (a) biconnessa; (b) tri-connessa

4. Cinematica grafica

4.1 Centri di rotazione relativa e loro proprietà

Del problema cinematico è possibile dare, in alternativa alla formulazione analitica e limitatamente ai problemi piani, una formulazione grafica, che in qualche caso risulta più agevole e sintetica.

Poiché ogni spostamento rigido piano è una rotazione intorno ad un punto opportuno (il centro di rotazione), la generica configurazione di un sistema di corpi rigidi è nota non appena si conoscono le posizioni dei centri e le ampiezze degli angoli di rotazione di ogni corpo.

Circa la determinazione dei centri è di grande utilità la nozione di *centro di rotazione relativa* tra due corpi. Dati i corpi C_i e C_j , e detti C_i e C_j i rispettivi centri di rotazione (assoluta), si dice centro di rotazione relativa C_{ij} il punto intorno a cui C_i è visto ruotare da un osservatore solidale a C_j . Trattandosi di uno spostamento relativo, esso è determinato dalla differenza tra lo spostamento assoluto di C_i e lo spostamento di trascinamento, che coincide con lo spostamento assoluto di C_j . Valgono le seguenti due proprietà fondamentali:

- Il centro relativo ed i due centri assoluti di rotazione di due corpi rigidi sono allineati (Fig. 27a).
- I tre centri relativi di rotazione di tre corpi rigidi sono allineati (Fig. 27b).

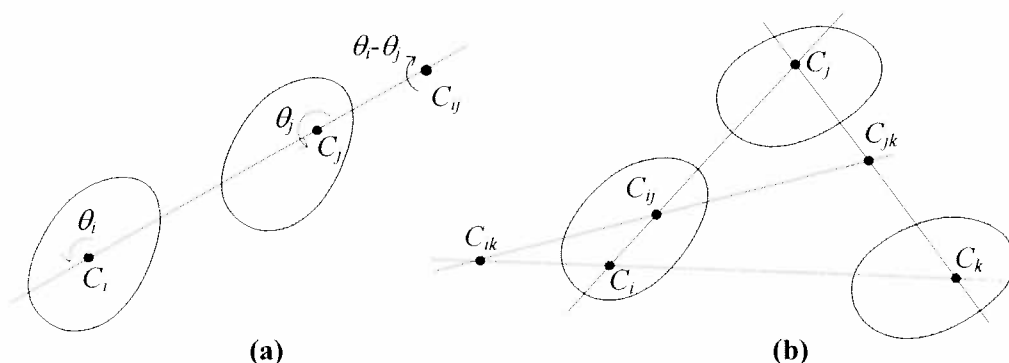


Fig. 27 Allineamento dei centri di rotazione

Le proprietà si dimostrano come segue.

A) Lo spostamento relativo tra due corpi rigidi C_i, C_j non è modificato se si applica ad entrambi i corpi la rotazione $-\theta_j$ con centro C_j . Così, mentre il corpo C_j torna nella posizione iniziale, la posizione relativa di C_i rispetto a C_j è definita dalla somma della rotazione θ_i intorno a C_i , e della rotazione $-\theta_j$ intorno a C_j . Ricordando l'Osservazione 10, il centro di rotazione relativa C_{ij} , "baricentro" delle rotazioni $\theta_i, -\theta_j$ risulta allineato con C_i e C_j .

B) Lo spostamento relativo dei tre corpi C_i, C_j, C_k non è modificato se si applica a tutti i corpi la rotazione $-\theta_j$ con centro C_j . In questo modo il corpo C_i torna nella posizione iniziale e può essere considerato fisso. Il punto C_{ij} diventa quindi il centro di rotazione assoluto per il corpo C_j , C_{ik} diventa il centro di rotazione assoluto per C_k e questi due centri assoluti, per la proprietà **A**), sono allineati con il centro relativo C_{jk} .

Le due proprietà sono di effettiva utilità quando si conosce la posizione dei centri relativi e si vogliono ricavare ulteriori informazioni sulla posizione dei centri assoluti rispetto a quelle fornite dai vincoli esterni. Il centro relativo è determinato unicamente dai vincoli che collegano i due corpi in esame e non da quelli che collegano i due corpi ad altri corpi o al suolo. Così il centro relativo è univocamente determinato se i due corpi sono collegati da una cerniera o da un glifo (Fig. 28a, b), deve appartenere ad una retta se i due corpi sono collegati da una biella (Fig. 28c), deve appartenere alla retta impropria del piano se i due corpi sono collegati da un bipendolo (Fig. 28d), mentre è arbitrario se i due corpi non sono collegati.

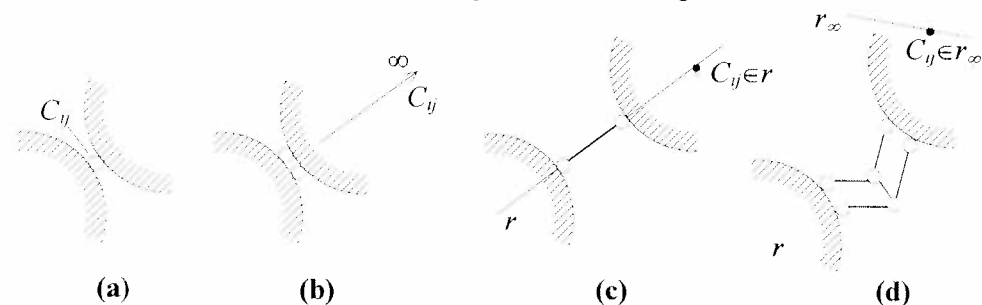


Fig. 28 Centro relativo: (a), (b) determinato; (c), (d) appartenente ad una retta

Riguardo le informazioni che i vincoli esterni danno sul centro di rotazione assoluto del corpo (o dei corpi) cui sono applicati vale quanto osservato in precedenza per i vincoli interni ove uno dei due corpi venga riguardato come il suolo. Così il centro assoluto è determinato se il corpo è collegato al suolo da una cerniera o da un glifo (Fig. 29a, b), mentre deve appartenere ad una retta se è collegato al suolo da un carrello (o biella) o da un bipendolo (Fig. 29c, d); in quest'ultimo caso la retta è quella impropria del piano cui il corpo appartiene.

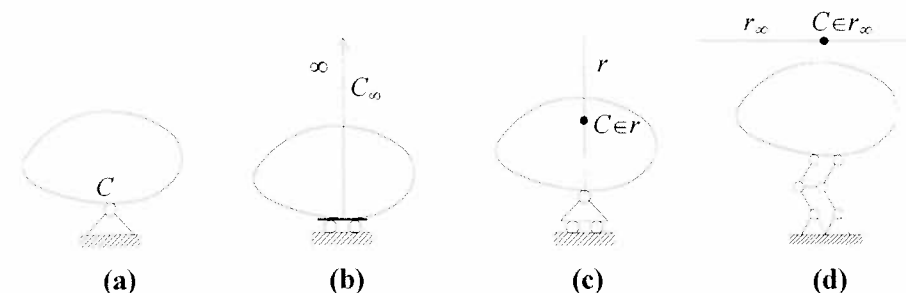


Fig. 29 Centro assoluto: (a), (b) determinato; (c), (d) appartenente ad una retta

4.2 Esempi di applicazione del metodo grafico

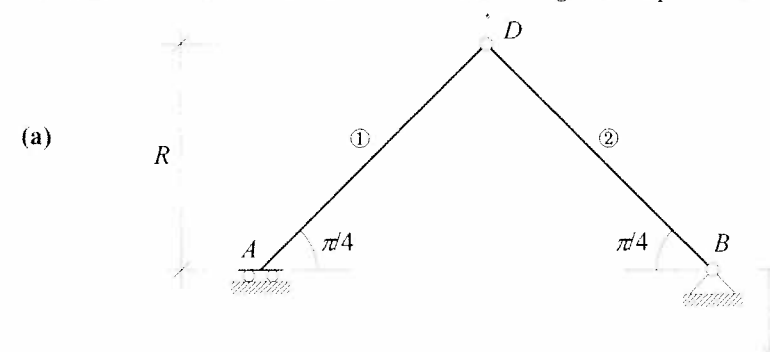
Nella risoluzione grafica di problemi di cinematica dei corpi rigidi si distinguono due fasi successive:

- I. determinazione della posizione dei centri di rotazione assoluta di tutti i corpi;
- II. calcolo dell'ampiezza della rotazione di tutti i corpi.

Successivamente si tracciano i diagrammi delle componenti di spostamento.

La fase I del procedimento è la più complessa. Per eseguirla sono di grande utilità le proprietà di allineamento dei centri. Gli esempi che seguono chiariranno le modalità di applicazione del metodo.

Esercizio 19: Risolvere con i metodi della cinematica grafica il problema di Fig. (a).



Trattasi dell'arco a tre cerniere non degenero dell'Esercizio 11 ove si ponga $a=b=h=R$. Si riconoscono immediatamente due centri (Fig. b): il centro assoluto del corpo 1, che coincide con il punto improprio della verticale per A, e il centro relativo tra i due corpi, C_{12} , che coincide con

la cerniera in D . Inoltre, poiché B , si sposta per ipotesi sulla verticale, il centro di rotazione del corpo 2 deve trovarsi sull'orizzontale per B . Poiché i tre centri C_1 , C_2 e C_{12} devono essere allineati, C_2 è il punto di intersezione della verticale per D con l'orizzontale per A , quindi C_2 coincide con il punto medio del segmento AB . Si esaurisce così la fase I del procedimento. Passando alla fase II, poiché s è dato, è immediato calcolare la rotazione θ_2 (in modulo):

$$\theta_2 = \frac{s}{R}$$

Essendo $\theta_1=0$ e dovendo risultare $u_{D_1} = u_{D_2}$, si ha che il corpo 1 trasla in direzione orizzontale di un valore pari a $\theta_2 R = s$. Individuati (C_1, θ_1) e (C_2, θ_2) è conveniente diagrammare i campi di spostamento per ciascun corpo nella forma (18):

$$u_i = -\theta_i y_i^*; \quad v_i = \theta_i x_i^* \quad (i=1,2)$$

dove x_i^* e y_i^* sono le distanze del generico punto $P_i \in C_i$ dal centro di rotazione C_i . Il campo degli spostamenti è diagrammato in Fig. (b) insieme alla configurazione variata della struttura. Si ritrovano i risultati dell'Esercizio 11.

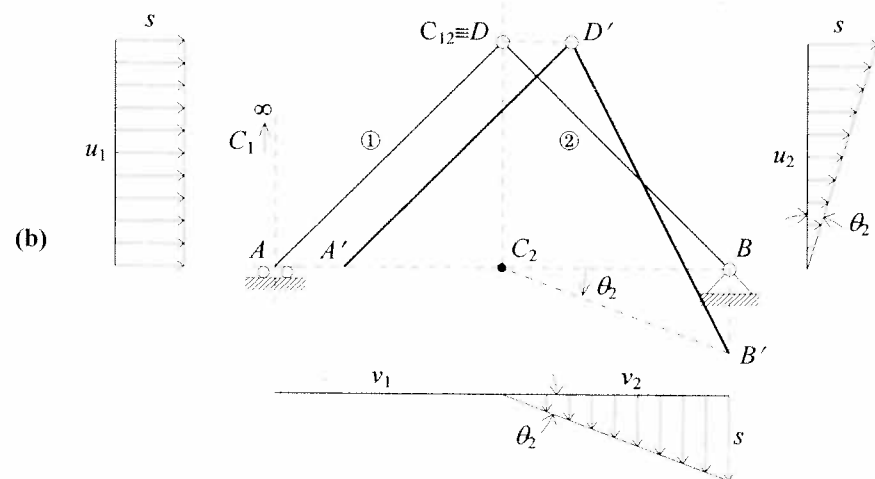
Una volta nota la soluzione grafica di un problema cinematico è facile controllare i risultati che si ottengono per via analitica. Gli spostamenti generalizzati dell'Esercizio 11, dai diagrammi di u_1 e v_1 , valgono:

$$u_{01} = u_A = s, \quad v_{01} = v_A = 0$$

$$u_{02} = u_B = 0, \quad v_{02} = v_B = -s$$

Le rotazioni θ_1 e θ_2 , positive antiorarie, sono:

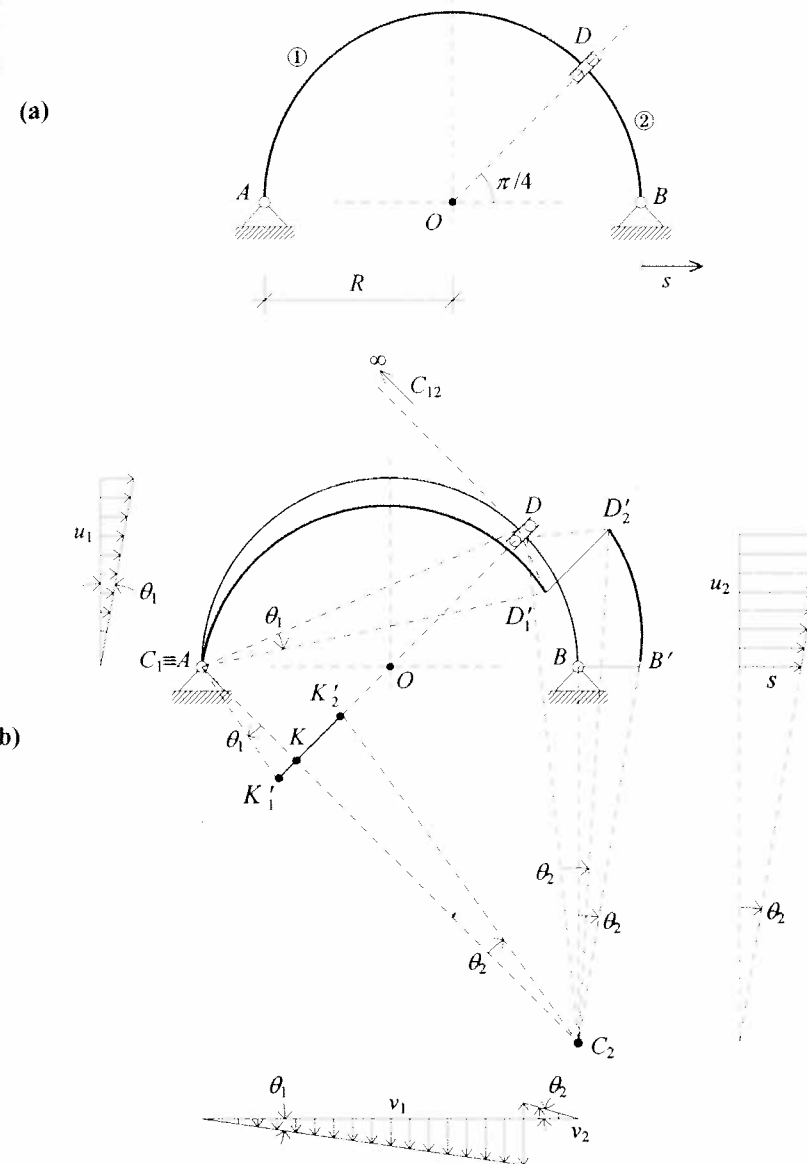
$$\theta_1=0 \quad \theta_2=-s/R.$$



Esercizio 20: La cerniera B del sistema in Fig. (a) subisce un cedimento orizzontale assegnato s . Individuare con i metodi della cinematica grafica la configurazione variata della struttura. Descrivere inoltre il campo di spostamenti per i singoli corpi.

Si tratta di un arco a tre cerniere non degenero. Si riconoscono immediatamente due centri: il centro assoluto del corpo 1, $C_1 \equiv A$, e il centro relativo tra i due corpi, C_{12} , che coincide con il punto improprio della retta tangente in D all'arco ABD . Poiché per ipotesi B si sposta

sull'orizzontale, il centro di rotazione del corpo 2 deve trovarsi sulla verticale per B (Fig. b). Poiché, inoltre, i tre centri C_1 , C_2 e C_{12} devono essere allineati, C_2 è il punto di intersezione della verticale per B e della retta per A passante per il punto improprio C_{12} . Con semplici considerazioni geometriche è facile individuare le coordinate di C_2 : dato che il triangolo rettangolo ABC_2 è isoscele, C_2 dista da B di $2R$.



Noto C_2 è facile calcolare la rotazione θ_2 ; essendo infatti assegnata la componente orizzontale di B , $u_B = s$, si ha:

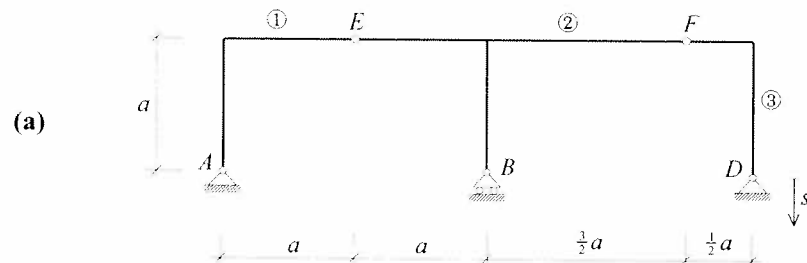
$$\theta_2 = \frac{s}{2R}$$

di verso orario. Dovendo inoltre essere $\theta_1 = \theta_2$, segue, per il campo di spostamenti u_i, v_i ($i=1,2$) e

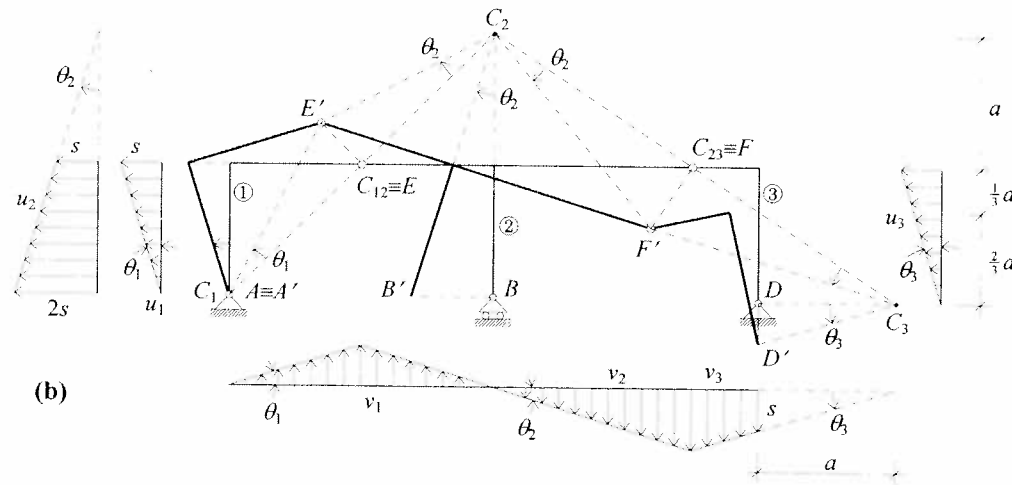
per la configurazione variata della struttura, quanto riportato in Fig. (b). È interessante a questo punto valutare lo spostamento relativo η_D tra i due piatti del glifo D nella direzione iniziale dei piatti medesimi (retta OD di Fig. a). Questo può essere facilmente calcolato applicando l'Osservazione 8. Considerato η_D positivo se di allontanamento, ed essendo $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, si ha:

$$\eta_D = \overline{KK'_1} + \overline{KK'_2} = \theta(\overline{C_1K} + \overline{C_2K}) = \theta \overline{C_1C_2} = \sqrt{2}s$$

Esercizio 21: La cerniera D del sistema in Fig. (a) subisce un cedimento verticale assegnato s . Risolvere il problema cinematico con approccio grafico.



Si tratta di un sistema di tre corpi isocinematico. Infatti il numero di g.d.l. ($n=3 \times 3=9$) eguaglia il numero di vincoli semplici, due in A , due in E , uno in B , due in F e due in D , e non si rilevano disposizioni di vincolo degeneri. I centri di rotazione risultano (Fig. b): $C_1 \equiv A$, $C_{12} \equiv E$, $C_{23} \equiv F$; inoltre, dovendo C_2 appartenere contemporaneamente alla retta verticale per B e alla congiungente AE , è determinato dall'intersezione delle due rette. Infine, poiché il punto D si sposta per ipotesi sulla verticale, il centro di rotazione C_3 , risulta dall'intersezione dell'orizzontale per D con la congiungente C_2C_{23} . Con semplici considerazioni geometriche è facile individuare le coordinate di C_2 e C_3 . Essi distano rispettivamente $2a$ da B e a da D .

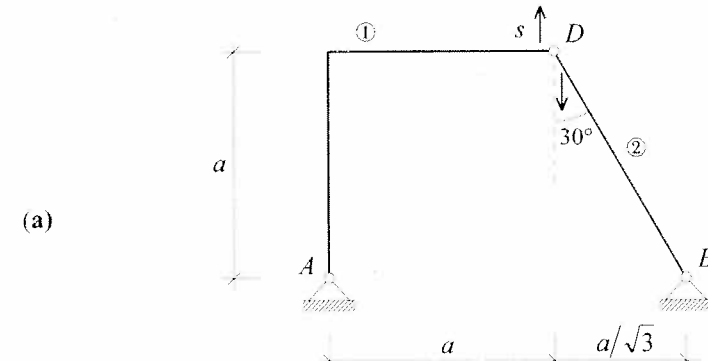


Individuati i centri di rotazione per i tre corpi (fase I) e noto s è immediato il calcolo delle singole rotazioni θ_i ($i=1,2,3$) (fase II). Con riferimento alla Fig. (b), risulta:

$$\theta_3 = \frac{s}{a}, \quad \theta_2 = -\theta_3, \quad \theta_1 = -\theta_2 = \theta_3$$

a cui corrispondono i campi di spostamento indicati in figura.

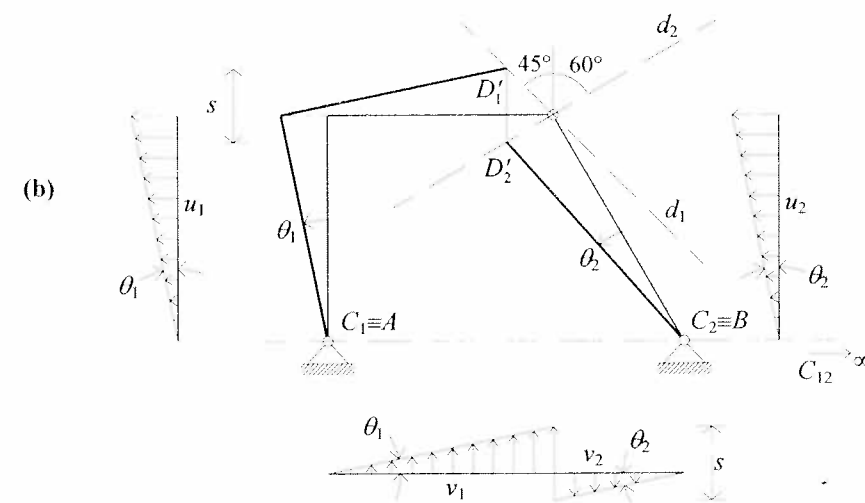
Esercizio 22: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si determinino i campi di spostamento conseguenti ad un cedimento vincolare interno s in corrispondenza della cerniera D .



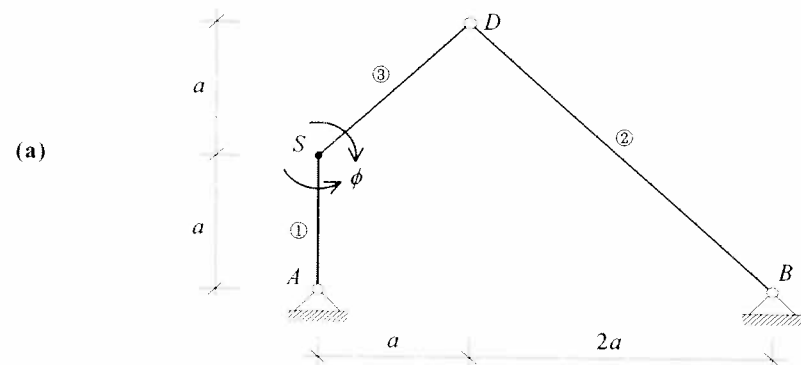
Si tratta di un arco a tre cerniere non degeneri. Poiché A e B hanno spostamento nullo risulta $C_1 \equiv A$ e $C_2 \equiv B$ (Fig. b). In assenza della cerniera D i punti D_1 e D_2 potrebbero assumere qualunque posizione rispettivamente sulle rette d_1 (ortogonale ad AD) e d_2 (ortogonale a BD). Il vincolo invece impone spostamento relativo nullo in direzione orizzontale (e quindi i punti D'_1 e D'_2 allineati sulla verticale) e spostamento relativo s secondo la verticale, tale che D_1 si alzi rispetto a D_2 . Queste condizioni individuano D'_1 e D'_2 in modo univoco sulle rette d_1 e d_2 . (Si noti che, invertendo il segno di s , D'_1 e D'_2 si collocano sulle semirette uscenti da D opposte a quelle in figura). Ora, la condizione di vincolo in D impone che C_{12} appartenga alla retta orizzontale per D : dovendo C_{12} essere allineato con C_1 e C_2 , esso coincide con il punto improprio di questa retta (Fig. b): lo spostamento relativo è dunque una traslazione. Dovendosi annullare la rotazione relativa, è $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Allo stesso risultato si perviene più semplicemente imponendo che $u_{D_2} - u_{D_1} = 0$. Richiedendo infine che $v_{D_1} - v_{D_2} = s$ si ottiene:

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \frac{s}{a}$$

Determinate le ampiezze delle rotazioni θ_1 e θ_2 segue immediatamente il campo di spostamenti in Fig. (b).



Esercizio 23: Si determinino i campi di spostamento dell'arco a tre cerniere di Fig. (a), assegnata in S una distorsione flessionale ϕ .



Esplicitando il vincolo di continuità in S il sistema è costituito da tre corpi, $C_1 \equiv AS$, $C_2 \equiv BD$, $C_3 \equiv SD$. Risulta: $C_1 \equiv A$, $C_2 \equiv B$, $C_{13} \equiv S$, $C_{23} \equiv D$. Poiché C_3 , per la proprietà di allineamento dei centri, deve appartenere alle rette AS e DB esso è individuato dalla loro intersezione (Fig. b). Il punto S si sposta dunque sull'orizzontale e, nella configurazione variata, occupa un punto S' tale che $\theta_1 - \theta_3 = \phi$ (cioè tale che, un osservatore solidale a C_1 veda C_3 ruotare in verso orario). Per individuare S' è conveniente scrivere le due seguenti relazioni (di vincolo)

$$\begin{cases} \theta_1 - \theta_3 = \phi \\ \theta_1 a = -\theta_3 2a \end{cases}$$

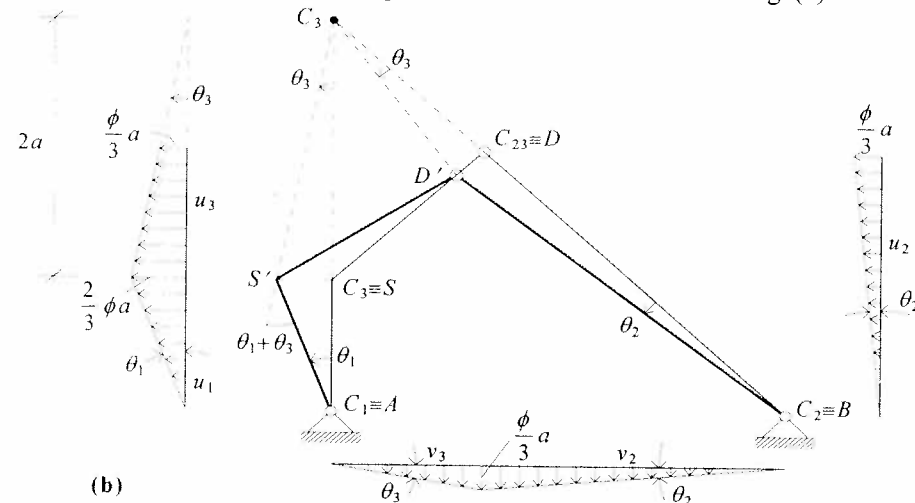
che esprimono la condizione detta più il fatto che lo spostamento relativo in S è nullo. Risolvendo si trova:

$$\theta_1 = \frac{2}{3}\phi, \quad \theta_3 = -\frac{1}{3}\phi$$

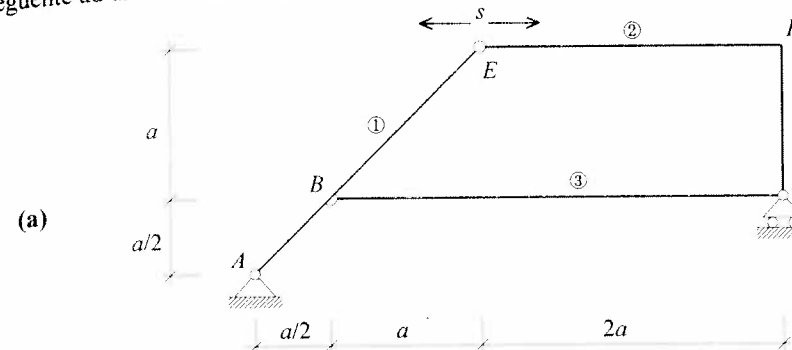
Imponendo poi che anche in D si abbia spostamento relativo nullo si ha $\theta_2 = -(1/2)\theta_1$, da cui:

$$\theta_2 = \frac{1}{6} \phi$$

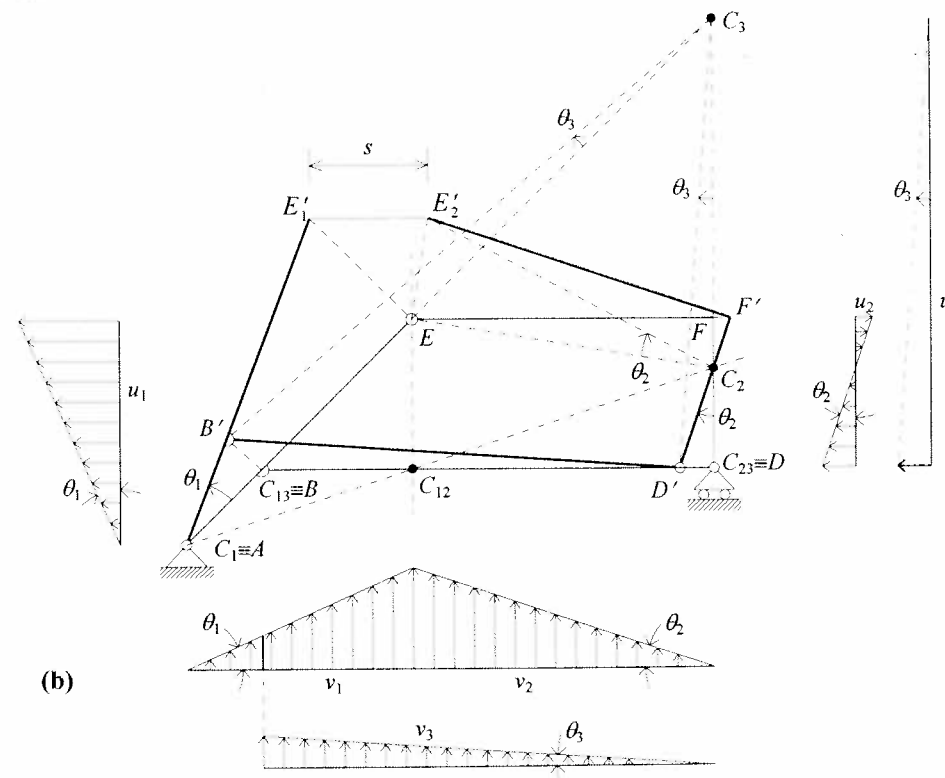
I diagrammi di spostamento e la configurazione variata sono indicati in Fig. (b).



Esercizio 24: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si determini la configurazione variata conseguente ad un cedimento vincolare interno s in corrispondenza della cerniera E .



Si tratta di un sistema di tre corpi non degeneri in quanto costituenti un anello a tre cerniere $BDFE$ vincolato al suolo da una cerniera in A ed un carrello in D . Con riferimento alle notazioni di Fig. (b) si riconoscono immediatamente quattro centri: il centro di rotazione assoluto del corpo 1 $C_1 \equiv A$, i centri di rotazione relativa $C_{13} \equiv B$ e $C_{23} \equiv D$ e il centro di rotazione assoluto C_3 , intersezione della verticale per D con la retta individuata dalla congiungente AB . Poiché i tre centri C_{12} , C_{13} e C_{23} devono essere allineati (proprietà B), C_{12} è il punto di intersezione della verticale per E con la congiungente BD . La condizione di allineamento di C_2 con C_1 e C_{12} colloca C_2 nel punto di intersezione della verticale per D con la congiungente $C_1 C_{12}$. Esaurita così la fase I, si passa al calcolo delle ampiezze di rotazione (fase II). Nel fare ciò si inizia dai corpi 1 e 2 in quanto direttamente interessati al cedimento s .



Assunto per il corpo 2 una rotazione positiva oraria, le condizioni espresse dal vincolo in E assumono la forma:

$$\begin{cases} \theta_1 \frac{3}{2} a = \theta_2 2a \\ \theta_1 \frac{3}{2} a + \theta_2 \frac{1}{3} a = s \end{cases}$$

dove la prima assicura l'eguaglianza delle componenti v_{E_1} e v_{E_2} mentre la seconda assicura che l'allontanamento in orizzontale tra E'_1 ed E'_2 è pari al valore s assegnato. Risolvendo si trova:

$$\theta_2 = \frac{3}{7} \frac{s}{a}, \quad \theta_1 = \frac{4}{7} \frac{s}{a}$$

Imponendo infine che lo spostamento orizzontale relativo in D tra i corpi 2 e 3 sia nullo si ottiene:

$$\theta_3 = \frac{2}{21} \frac{s}{a}$$

I campi di spostamento sono diagrammati in Fig. (b).

- **Osservazione 20.** Gli esercizi precedenti si sono potuti risolvere solo in quanto le strutture sono soggette ad *un unico cedimento vincolare*. Infatti, con riferimento all'Esercizio 19, se viene assegnato un secondo cedimento, ad esempio rotazionale al glifo A , viene meno l'informazione che C_1 coincide con il punto improprio della direzione verticale, e quindi l'intero procedimento. Problemi di questo tipo, comunque, stante la linearità, possono essere risolti per sovrapposizione degli effetti, considerando agente un cedimento alla volta e poi sommando i rispettivi campi di spostamento.
- **Osservazione 21.** Le ragioni dell'inconveniente evidenziato dalla precedente osservazione sono espone nel seguito. Le proprietà di allineamento dei centri di rotazione, insieme alle informazioni che i vincoli presenti in un sistema danno sulla collocazione degli stessi, consentono di risolvere senza particolari difficoltà la prima fase del procedimento grafico, solo se il sistema in questione è labile con grado di labilità pari ad uno (sistemi siffatti si dicono costituire una *catena cinematica*). Con riferimento ai sistemi esemplificati negli esercizi precedenti, tutte le soluzioni grafiche ottenute possono pensarsi ricavate dall'applicazione dei seguenti passi logici: a) nel sistema isocinematico di origine si ipotizza di sopprimere momentaneamente il vincolo elementare cui il cedimento è imposto; b) così operando si individua una catena cinematica caratterizzata dall'allineamento dei centri di rotazione individuati sfruttando le informazioni che i vincoli restanti offrono in merito; c) individuati i centri di rotazione assoluti e relativi dei singoli corpi costituenti il sistema, si passa alla determinazione delle ampiezze di rotazione sfruttando il valore del cedimento assegnato al vincolo che idealmente si pensa di sopprimere. Se il cedimento è assegnato ad un vincolo esterno (ovvero interno) le ampiezze di rotazione incognite vanno calcolate considerando dapprima il corpo

cui il vincolo è applicato e poi continuando con i corpi via via tra loro connessi (ovvero coinvolgendo in due equazioni le ampiezze di rotazione dei corpi collegati dal vincolo che cede e poi proseguendo con gli altri). Così operando, la determinazione delle ampiezze di rotazione si presenta completamente disaccoppiata nel primo caso, accoppiata nel secondo, relativamente alla determinazione delle rotazioni dei due corpi collegati dal vincolo cedevole, e poi di nuovo completamente disaccoppiata.

- **Osservazione 22.** Se il sistema di origine è labile, e dunque tale da ammettere un'autosoluzione del corrispondente problema cinematico, il procedimento da seguire rimane identico a quello precedentemente esposto, ove al sistema di origine se ne sostituisca uno cinematicamente determinato ottenuto aggiungendo opportuni vincoli (si ricordi l'interpretazione meccanica data nell'Esercizio 12). Individuato quest'ultimo, la configurazione finale della struttura viene ottenuta dalla sovrapposizione degli spostamenti associati ai singoli cedimenti imposti ai vincoli, cui si aggiungono quelli corrispondenti ai cedimenti dei vincoli fittizi introdotti nel sistema per renderlo isocinematico. L'insieme di queste ultime soluzioni costituisce l'autosoluzione del problema cinematico relativo al sistema di origine.

Statica dei sistemi di corpi rigidi

1. Sistemi di forze

1.1 Equazioni cardinali della statica

È noto dalla Meccanica Razionale che un corpo rigido soggetto a forze esterne $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathcal{P}, \mathbf{V})$ dipendenti dalla posizione \mathcal{P} e dal campo di velocità \mathbf{V} , ma non dal tempo t , permane in quiete in una posizione \mathcal{P}_E se e solo se: a) \mathcal{P}_E è una posizione di equilibrio e, b) il corpo occupa \mathcal{P}_E con *atto di moto nullo* $\mathbf{V}=\mathbf{0}$ all'istante $t=0$. Una posizione \mathcal{P}_E è detta di equilibrio se in essa sono soddisfatte le *equazioni cardinali della statica*:

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{F}_k(\mathcal{P}_E, \mathbf{0}) &= \mathbf{0} \\ \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k(\mathcal{P}_E, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1}$$

dove P_k sono i punti di applicazione delle forze e O è un punto arbitrario. L'equazione (1₁) è detta di equilibrio alla traslazione, l'equazione (1₂) di equilibrio alla rotazione; si allude così alle corrispondenti equazioni cardinali della dinamica.

Se il sistema è costituito da più corpi rigidi le equazioni cardinali della statica devono essere soddisfatte per ciascun corpo, considerando le *forze esterne a ciascuno di essi*. Queste sono costituite dalle forze esterne al sistema applicate al corpo in questione e dalle forze che lo stesso corpo scambia con gli altri corpi.

Nella Scienza delle Costruzioni si introducono alcune ipotesi che semplificano il problema:

(a) *Le forze sono assunte indipendenti dalla posizione e dalla velocità*, cosicché le equazioni cardinali della statica si scrivono:

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{F}_k &= \mathbf{0} \\ \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2}$$

(b) Si ammette che l'atto di moto iniziale sia nullo, rinunciando così ad analizzare gli aspetti dinamici del problema. Conseguentemente, se il corpo occupa una posizione di equilibrio, permane in quiete in quella posizione. Il concetto di equilibrio e di quiete vengono perciò identificati.

(c) Dato un sistema di forze non si è interessati a determinare tutte o alcune delle possibili posizioni di equilibrio del corpo, ma piuttosto si è interessati a determinare se una data posizione P_0 , assunta come posizione di riferimento, è oppure no di equilibrio. Così, ad esempio, si dice che il pendolo in Fig. 1, soggetto al peso proprio mg e alla forza orizzontale F (indipendente dalla posizione) non è in equilibrio nella posizione verticale P_0 , rinunciando a determinare la posizione P_E in cui le due forze e la tensione T del filo si fanno equilibrio.

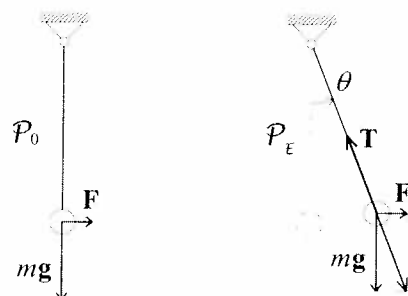


Fig. 1 Posizione di equilibrio P_E diversa da quella di riferimento P_0

Esistono tuttavia particolari problemi in cui queste ipotesi vengono rimosse. Ad esempio l'ipotesi (a) è rimossa in problemi di interazione fluido-struttura, l'ipotesi (b) in problemi di Dinamica delle Strutture, l'ipotesi (c) in problemi di Stabilità dell'Equilibrio. Degli ultimi due problemi verranno dati elementi in questo testo.

È importante osservare che, ai fini dell'equilibrio, non ha interesse la distribuzione effettiva delle forze, quanto piuttosto le loro caratteristiche globali, il vettore risultante e il momento risultante, definiti come i primi membri delle (2). È dunque lecito effettuare talune operazioni, generalmente finalizzate a semplificare il sistema di forze, purché non vengano alterate le caratteristiche globali. Queste operazioni, dette di equivalenza statica, sono di grande utilità nelle applicazioni; nel seguito si richiamano dalla Meccanica Razionale alcuni importanti concetti ad esse connessi.

1.2 Forza e momento di una forza

Si consideri una forza F applicata ad un punto P di un corpo rigido C , agente secondo una retta r (Fig. 2). Scelto un punto O , si definisce momento della forza F rispetto al punto O il vettore

$$M(O) = OP \times F \quad (3)$$

rappresentato in Fig. 2 con una doppia freccia.

Data una retta a passante per O si dice *momento assiale della forza F* lo scalare

$$M_a = M(O) \cdot e_a = OP \times F \cdot e_a \quad (4)$$

avendo indicato con e_a il versore della retta a . Assegnata a , il momento assiale non dipende dal polo $O \in a$ rispetto a cui si calcola il momento. Infatti, scelto un altro polo $O' \in a$ (Fig. 2) risulta $O'P \times F \cdot e_a = (O'O + OP) \times F \cdot e_a = M_a$ essendo $O'O \parallel e_a$.

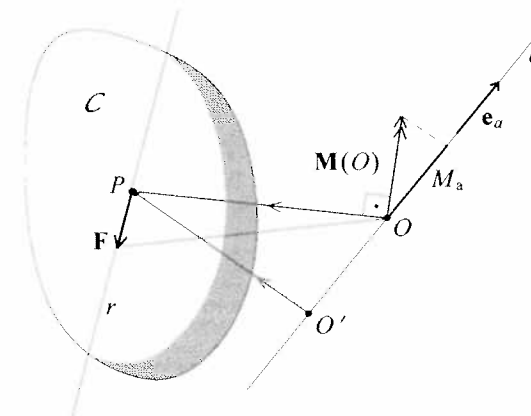


Fig. 2 Forza e momento rispetto ad un punto o ad un asse

- **Osservazione 1.** La forza F è un vettore applicato, mentre il momento $M(O)$ è un vettore libero.
- **Osservazione 2.** Il momento $M(O)$ non ha un significato fisico diretto, ma è solo il risultato di una operazione vettoriale eseguita sulla grandezza fisica F .
- **Osservazione 3.** Per calcolare il momento assiale di una forza F rispetto ad una retta a può essere conveniente scomporre F nella somma di una forza F_\perp contenuta in un piano $\pi \perp a$ e di una forza F_\parallel parallela all'asse a (Fig. 3a). Poiché il momento di F_\parallel rispetto a qualunque punto $O \in a$ è ortogonale ad a , il momento assiale di F_\parallel è nullo. Quindi il momento assiale di F è uguale al momento assiale di F_\perp . Questo si calcola facilmente come $\pm |F_\perp| b$, dove b è la distanza della retta di azione di F dall'asse a , con segno positivo o negativo a seconda che il verso di rotazione indotto da F_\perp rispetto al punto O sia concorde ovvero discorde con il verso di rotazione definito dal versore e_a (Fig. 3b); b è anche detto *braccio della forza* rispetto all'asse.

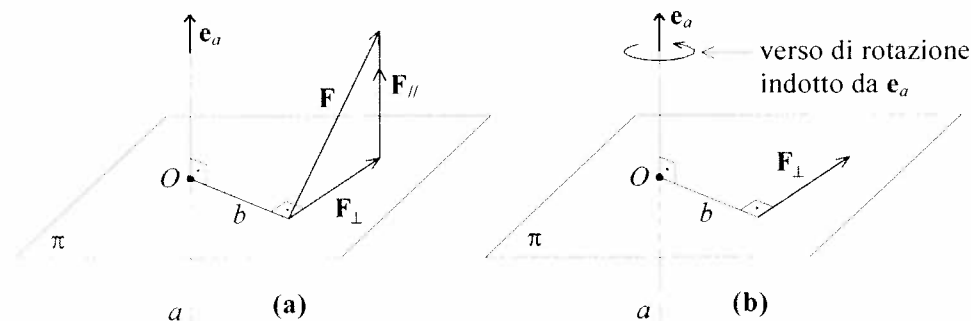


Fig. 3 (a) Momento assiale di una forza; (b) verso di rotazione indotto da e_a

1.3 Sistemi equivalenti di forze

Sia dato un sistema di forze $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots\}$ applicate ad un corpo rigido C rispettivamente nei punti P_1, P_2, \dots . Si definiscono caratteristiche globali del sistema di forze i vettori liberi

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_k \mathbf{F}_k \\ \mathbf{M}(O) &= \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k\end{aligned}\quad (5)$$

detti rispettivamente *vettore risultante* e *momento risultante* rispetto ad O del sistema di forze \mathbf{F} . Due sistemi di forze \mathbf{F}' ed \mathbf{F}'' applicati al medesimo corpo rigido si dicono *staticamente equivalenti* se hanno lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O arbitrariamente scelto, se cioè:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'', \quad \mathbf{M}'(O) = \mathbf{M}''(O) \quad (6)$$

Si dimostra facilmente che, se le (6) sono verificate per un particolare punto O , i due sistemi di forze hanno lo stesso momento risultante rispetto a qualunque altro punto O' .

- **Osservazione 4.** La definizione di equivalenza permette di suddividere gli infiniti sistemi di forze in classi di equivalenza. In ciascuna classe di equivalenza i sistemi sono tra loro diversi (per numero di forze, punti di applicazione, direzione e intensità) ma hanno le stesse caratteristiche globali. Poiché le componenti di \mathbf{F} ed $\mathbf{M}(O)$ sono sei, i sistemi staticamente equivalenti sono ∞^6 .

- **Osservazione 5.** Con le definizioni (5) le equazioni cardinali della statica (2) per il singolo corpo rigido C si scrivono

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}(O) = \mathbf{0} \quad (7)$$

Si dice anche che, affinché un corpo sia in equilibrio, il sistema delle forze esterne deve essere *equivalente a zero*.

- **Osservazione 6.** Dato un sistema di forze agenti su un corpo rigido, ai fini dell'equilibrio è lecito sostituire ad esso un sistema equivalente, in quanto nelle equazioni cardinali della statica compaiono solo le caratteristiche globali \mathbf{F} ed $\mathbf{M}(O)$ che, per definizione, non sono alterate dalle operazioni di equivalenza. Il sistema equivalente non è "uguale" a quello originario, ma solo equivalente nel senso precisato.

1.4 Coppia

È di interesse analizzare un particolare sistema costituito da due sole forze, uguali ed opposte \mathbf{F}_1 ed $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, applicate ad un corpo C secondo rette parallele r_1 ed r_2 , detto *coppia* (Fig. 4). Le caratteristiche globali della coppia sono:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(O) &= \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{F}_2 = (-\mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \times \mathbf{F}_2\end{aligned}\quad (8)$$

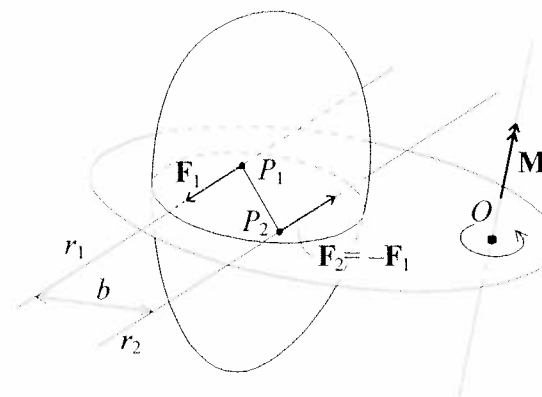


Fig. 4 Coppia e momento della coppia

Si noti che il *momento della coppia* è indipendente dal punto O rispetto al quale è calcolato; viene perciò semplicemente indicato con \mathbf{M} . Il vettore \mathbf{M} è ortogonale al piano della coppia e ha intensità

$$M = |\mathbf{F}_1|b \quad (9)$$

dove b è la distanza tra r_1 ed r_2 , detta *braccio della coppia*. La coppia è spesso rappresentata con una freccia semicircolare orientata secondo il verso di rotazione indotto dalla coppia e contenuta nel piano della coppia stessa.

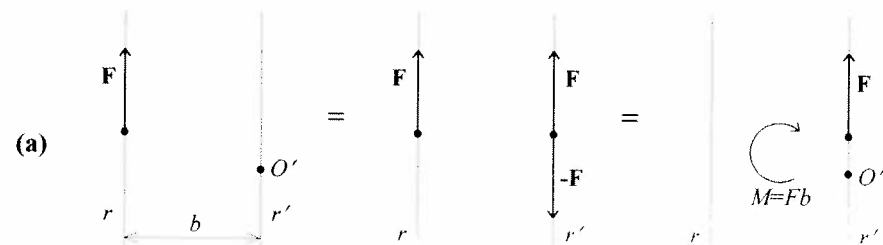
- **Osservazione 7.** Si suole dire che una coppia equivale ad un momento confondendo così, in modo improprio, la grandezza fisica (il sistema di due forze) con il suo momento che, come si è detto, è solo il risultato di un'operazione vettoriale. In questo testo si userà preferibilmente la locuzione "coppia \mathbf{M} ", quale abbreviazione di "coppia di momento \mathbf{M} ".

1.5 Operazioni elementari di equivalenza

Una forza \mathbf{F} può essere traslata lungo la sua retta d'azione senza che vengano modificate le sue caratteristiche globali. Perciò si parla spesso (anche se impropriamente) di forza applicata ad una retta. Analogamente, due forze incidenti possono essere traslate nel loro punto di intersezione e ivi sommate vettorialmente. Le due operazioni, dette di *trasporto lungo la retta d'azione* e *somma vettoriale* sono note come operazioni elementari di equivalenza. Una terza operazione elementare, detta *trasporto su una retta parallela* è illustrata dall'esercizio che segue.

Esercizio 1: Data una forza \mathbf{F} applicata ad una retta r traslarla sulla retta r'/r distante b da r , senza alterare l'equivalenza.

Con riferimento alla Fig. (a), sommando ad \mathbf{F} una coppia di braccio nullo applicata ad r' non si altera l'equivalenza. Poiché la forza \mathbf{F} applicata ad r e la forza $-\mathbf{F}$ applicata ad r' costituiscono una coppia di momento $M = |\mathbf{F}|b$ vale la seguente regola: il trasporto di una forza su una retta parallela genera un momento, detto appunto di trasporto, pari al prodotto della forza per la distanza tra le rette.



Allo stesso risultato si giunge attraverso un altro ragionamento. Scelto un punto O' su r' il momento della forza originaria \mathbf{F} rispetto ad O' è $M = |\mathbf{F}|b$, orario. Trasportando \mathbf{F} su r' , questa ha momento nullo rispetto ad O' ; per soddisfare l'equivalenza è perciò necessario sommare una coppia oraria di momento M .

- **Osservazione 8.** Le operazioni illustrate nella Fig. (a) dell'Esercizio 1 sono ovviamente reversibili. Quindi data una forza \mathbf{F} ed una coppia di modulo M , tutte contenute nel medesimo piano, il sistema equivale alla stessa forza \mathbf{F} traslata di $b = M/|\mathbf{F}|$. L'operazione è detta di *composizione di una forza e di una coppia*.

1.6 Riduzione ad un polo di un sistema di forze

Dato un sistema di forze $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots\}$ applicato ad un corpo C , di caratteristiche globali \mathbf{F} ed $\mathbf{M}(O)$, per quanto detto nell'Osservazione 6, ha interesse determinare un sistema più semplice ad esso equivalente. Vale la seguente proprietà: *un sistema di forze equivale ad un'unica forza $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}$ applicata in un punto O solidale al corpo, e ad un'unica coppia $\mathbf{M} = \mathbf{M}(O)$* . Infatti i due sistemi hanno lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante rispetto al punto O , in quanto il momento di \mathbf{F}_0 rispetto ad O è nullo. Si dice anche che *il sistema di forze è stato ridotto al polo O* .

- **Osservazione 9.** Mentre \mathbf{F} è un vettore libero (che non ha significato fisico), \mathbf{F}_0 è un vettore applicato che rappresenta una forza agente in un determinato punto O .

Della forza \mathbf{F}_0 e della coppia \mathbf{M} può darsi una rappresentazione scalare nel riferimento ortogonale $Oxyz$. Posto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= X_k \mathbf{i} + Y_k \mathbf{j} + Z_k \mathbf{k} \\ \mathbf{F}_0 &= X_0 \mathbf{i} + Y_0 \mathbf{j} + Z_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}\end{aligned}\quad (10)$$

con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ versori della base, tenendo conto delle (5) e che

$$\mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix} \quad (11)$$

si ha:

$$X_0 = \sum_k X_k, \quad Y_0 = \sum_k Y_k, \quad Z_0 = \sum_k Z_k \quad (12)$$

$$M_x = \sum_k (Z_k y_k - Y_k z_k), \quad M_y = \sum_k (X_k z_k - Z_k x_k), \quad M_z = \sum_k (Y_k x_k - X_k y_k)$$

dove x_k, y_k, z_k sono le coordinate di P_k (Fig. 5). Le sei grandezze

$$\mathbf{f} = \{X_0 \quad Y_0 \quad Z_0 \quad M_x \quad M_y \quad M_z\}^T \quad (13)$$

costituiscono le *forze generalizzate* equivalenti al sistema \mathbf{F} .

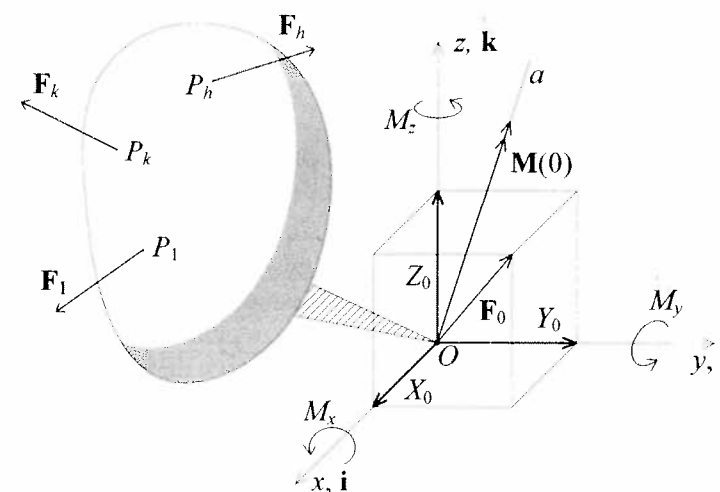


Fig. 5 Riduzione ad un polo di un sistema di forze; forze generalizzate

- **Osservazione 10.** Se l'origine Ω del sistema di assi coordinati x, y, z non coincide con il polo O di riduzione delle forze, la (11) si scrive

$$\mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_k - x_0 & y_k - y_0 & z_k - z_0 \\ X_k & Y_k & Z_k \end{vmatrix}$$

essendo $O \equiv (x_0, y_0, z_0)$. Mentre le (12₁) rimangono invariate, le (12₂) diventano:

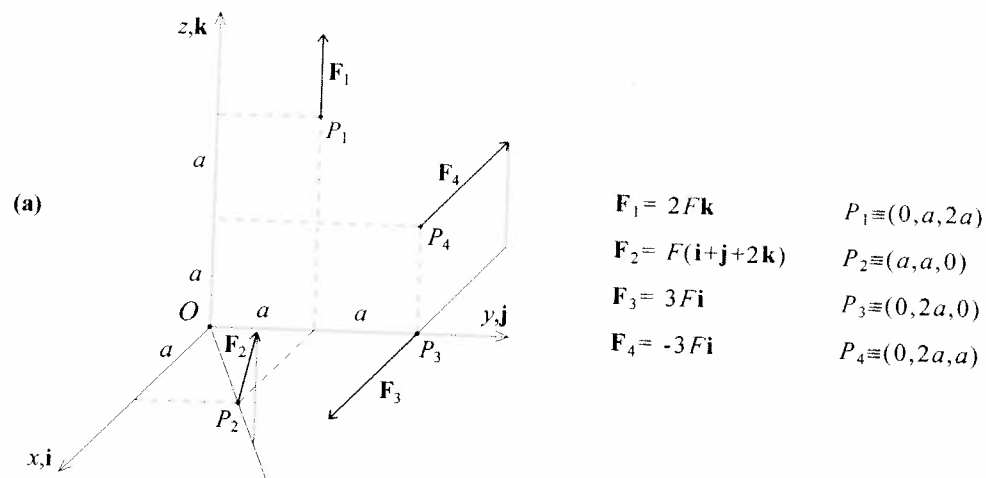
$$M_x = \sum_k (Z_k (y_k - y_0) - Y_k (z_k - z_0))$$

$$M_y = \sum_k (X_k (z_k - z_0) - Z_k (x_k - x_0))$$

$$M_z = \sum_k (Y_k (x_k - x_0) - X_k (y_k - y_0))$$

Le uniche forze generalizzate che si modificano sono pertanto i momenti assiali M_x , M_y ed M_z .

Esercizio 2: Dato il sistema di forze in Fig. (a) ridurlo al polo O . Determinare quindi le forze generalizzate.



Dapprima si osserva che \mathbf{F}_3 ed $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_3$ costituiscono una coppia $\mathbf{M} = -3aF\mathbf{j}$. Il vettore risultante del sistema di forze si ottiene sommando le altre due forze:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = F(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

Si calcola il momento risultante rispetto ad O sommando i diversi contributi. Il momento di \mathbf{F}_1 è:

$$\Delta_1 \mathbf{M}(O) = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & a & 2a \\ 0 & 0 & 2F \end{vmatrix} = 2Fa\mathbf{i}$$

Allo stesso risultato si perviene più facilmente applicando l'Osservazione 3. Il momento di \mathbf{F}_2 è:

$$\Delta_2 \mathbf{M}(O) = \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & a & 0 \\ F & F & 2F \end{vmatrix} = 2Fa(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

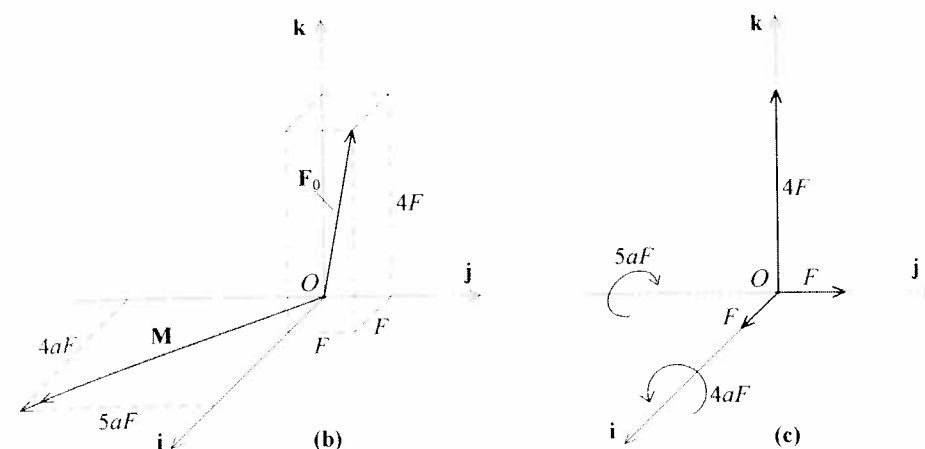
Si noti che il momento ha componente nulla secondo \mathbf{k} ; cioè il momento assiale rispetto a z è nullo. Infatti, applicando ancora l'Osservazione 3, si vede che la componente di \mathbf{F}_2 nel piano xy ha braccio nullo rispetto a z .

Sommando i momenti delle due forze al momento della coppia si ottiene il momento risultante:

$$\mathbf{M}(O) = Fa(4\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$$

Il sistema dato equivale quindi ad una forza $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}$ applicata in O e ad una coppia $\mathbf{M} = \mathbf{M}(O)$, illustrate in Fig. (b). Proiettando i vettori sugli assi si ottengono le forze generalizzate rappresentate in Fig. (c):

$$\mathbf{f} = \{F \quad F \quad 4F \quad 4aF \quad -5aF \quad 0\}^T$$



1.7 Sistemi piani di forze

Se un sistema di forze è costituito da forze \mathbf{F}_k le cui rette di azione giacciono nel medesimo piano π , il sistema è detto piano (Fig. 6a). Applicando le (5) si vede che il vettore risultante \mathbf{F} è parallelo al piano π , mentre, scelto $O \in \pi$, $\mathbf{M}(O)$ è ortogonale al piano. Per definire le caratteristiche globali sono perciò necessari tre parametri: i sistemi piani di forze staticamente equivalenti sono ∞^3 .

Riducendo il sistema al polo O si ha una forza \mathbf{F}_0 applicata in O ed una coppia $\mathbf{M} = \mathbf{M}(O)$, entrambe contenute nel piano π (Fig. 6a). Le forze generalizzate (13) si riducono a tre:

$$\mathbf{f} = \{X_0 \quad Y_0 \quad M\}^T \quad (14)$$

in cui si è posto $M = M_z$, e dove

$$X_0 = \sum_k X_k, \quad Y_0 = \sum_k Y_k, \quad M = \sum_k (Y_k x_k - X_k y_k) \quad (15)$$

Componendo \mathbf{M} ed \mathbf{F}_0 (si veda Osservazione 8) si ottiene un'unica forza \mathbf{F}_R , uguale in modulo ad \mathbf{F}_0 , ma applicata ad una retta $r' // r$ distante $b = |\mathbf{M}|/|\mathbf{F}_0|$ da r (Fig. 6b). La forza \mathbf{F}_R applicata ad r' costituisce la *forza risultante* del sistema piano di forze. Può concludersi che *ogni sistema piano di forze equivale ad una forza*.

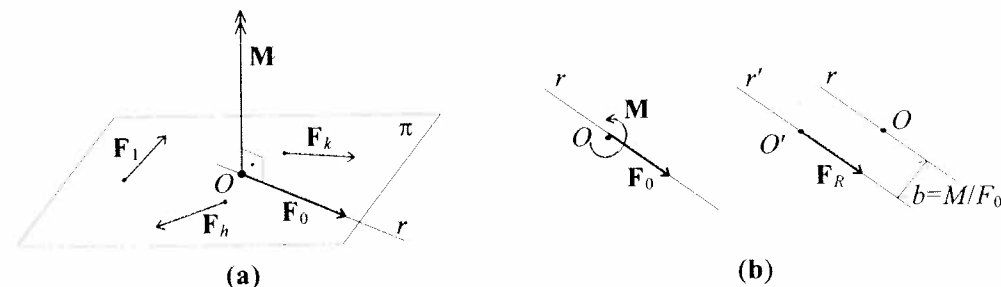
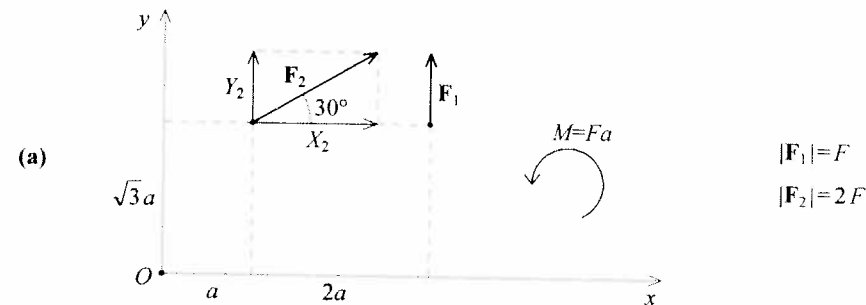


Fig. 6 Sistemi piani di forze: (a) riduzione al polo O ; (b) risultante

- **Osservazione 11.** Se il sistema piano di forze equivale ad una coppia, questa può riguardarsi come equivalente ad una forza infinitesima applicata alla retta impropria del piano.

Esercizio 3: Dato il sistema piano di forze in Fig. (a) determinarne la risultante.



Si riduce dapprima il sistema di forze al polo O . Si può procedere come nell'Esercizio 2, oppure, più convenientemente, calcolando direttamente le forze generalizzate (15). Proiettando la forza F_2 sugli assi si hanno due componenti di modulo

$$X_2 = 2F \cos 30^\circ = \sqrt{3}F, \quad Y_2 = 2F \sin 30^\circ = F.$$

F_1 ha invece componenti $X_1 = 0$ ed $Y_1 = F$. Sommando le componenti omologhe si ha:

$$X_0 = X_1 + X_2 = \sqrt{3}F, \quad Y_0 = Y_1 + Y_2 = 2F$$

Il momento rispetto ad O di F_2 si ottiene dalla (15₃), ovvero come somma dei momenti delle due componenti; il suo modulo è

$$\Delta_2 M(O) = -X_2 \sqrt{3}a + Y_2 a = -2aF$$

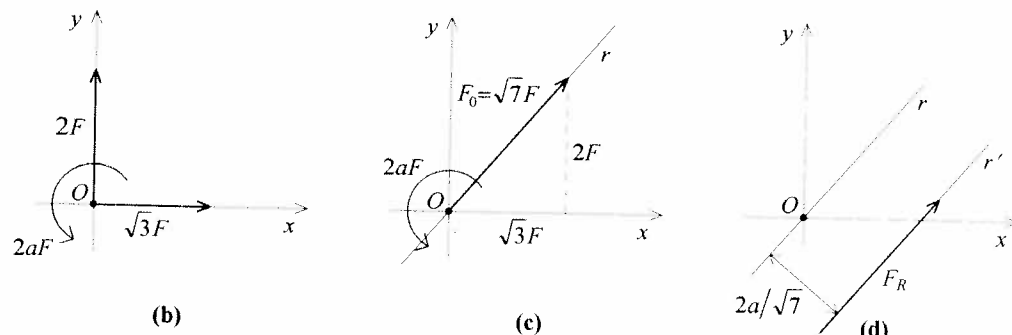
Si noti la differenza di segno dei due contributi: il momento di una forza è *positivo se antiorario*, concordemente con la scelta degli assi (terna levogira, asse z verso l'alto).

Il momento di F_1 rispetto ad O è

$$\Delta_1 M(O) = 3aF$$

Sommando i momenti delle due forze a quello della coppia si ha:

$$M = -2aF + 3aF + aF = 2aF$$



Le forze X_0 ed Y_0 e la coppia M costituiscono le tre forze generalizzate del sistema dato. Il sistema equivale quindi a quello in Fig. (b). Sommando vettorialmente le forze si ottiene il siste-

ma in Fig. (c); componendo la forza e la coppia si ottiene la forza risultante in Fig. (d), applicata alla retta r' . La distanza tra le due rette r ed r' si determina come

$$M/F_0 = (2aF)/(\sqrt{7}F) = 2a/\sqrt{7}$$

1.8 Sistemi di corpi rigidi

Si consideri ora un sistema costituito da n_c corpi rigidi C_i ($i=1,2,\dots,n_c$) in una data configurazione di riferimento, ciascuno sottoposto ad un sistema di forze F_i ($i=1,2,\dots,n_c$). Attraverso operazioni di equivalenza statica è possibile ridurre il sistema F_i al polo O_i arbitrariamente scelto, considerato solidale a C_i (Fig. 7).

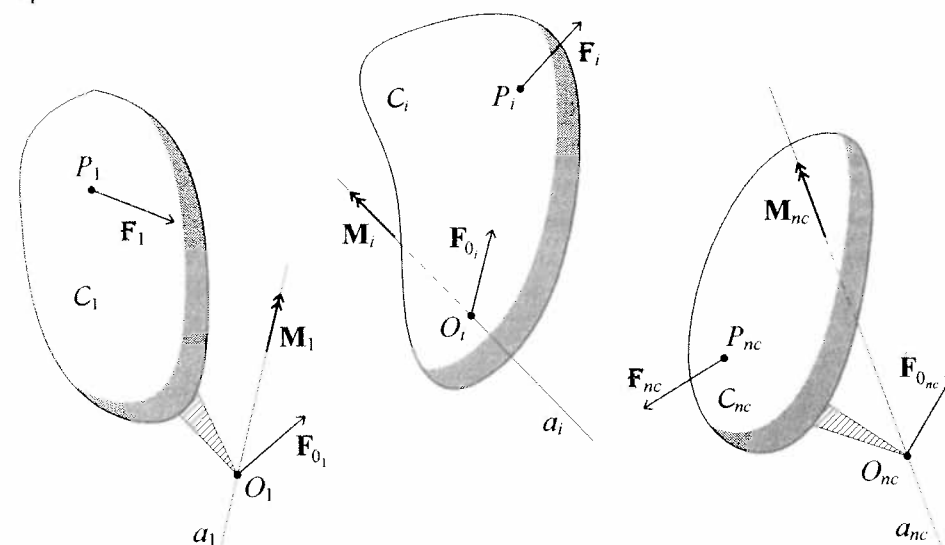


Fig. 7 Sistema di n_c corpi; forze ridotte agli n_c poli O_i

Sia F_{0i} la forza applicata in O_i , ed M_i la coppia di asse a_i applicata a C_i . Gli n_c sistemi di forze equivalgono perciò ad n_c forze ed n_c coppie e possono quindi essere descritti dagli $n=6n_c$ parametri scalari

$$\mathbf{f} = \{f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n_c}\}^T \quad (16)$$

dove il vettore

$$\mathbf{f}_i = \{X_{0i} \quad Y_{0i} \quad Z_{0i} \quad M_{x_i} \quad M_{y_i} \quad M_{z_i}\}^T \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (17)$$

elenca le componenti di F_{0i} ed M_i nel riferimento $O_i x_i y_i z_i$ solidale a C_i (Fig. 8). Agli n_c sistemi di forze F_i sono quindi associate $n=6n_c$ forze generalizzate.

Nel caso piano il vettore delle forze generalizzate (16) ha dimensioni $3n_c \times 1$ essendo

$$\mathbf{f}_i = \{X_{0i} \quad Y_{0i} \quad M_i\}^T \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (18)$$

le forze generalizzate (15) del corpo C_i .

- **Osservazione 12.** Va rimarcato il fatto che le operazioni di equivalenza statica

devono essere eseguite tra forze applicate al medesimo corpo, e non tra forze applicate a corpi diversi. Infatti, le equazioni cardinali della statica richiedono che si annullino separatamente le caratteristiche globali di ciascun sistema di forze \mathbf{F}_i .

- **Osservazione 13.** Circa la scelta dei poli O_i valgono considerazioni analoghe a quelle fatte in cinematica nell'Osservazione 1.11.

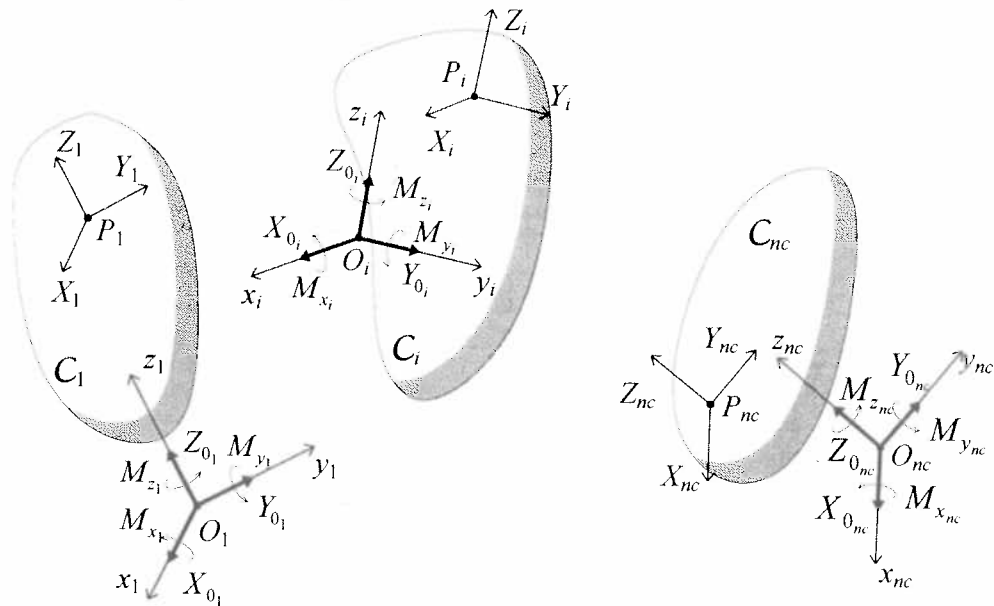


Fig. 8 Forze generalizzate e componenti di forza

1.9 Forze ripartite

Nelle applicazioni ha interesse considerare forze (dette anche carichi) ripartite su volumi, superfici o linee. Ad esempio la forza peso di un corpo è una forza ripartita sul volume del corpo; così una forza di contatto (ad esempio una spinta idrostatica) è una forza ripartita su una superficie. Se la superficie ha una dimensione trascurabile rispetto all'altra la forza può assumersi ripartita su una linea (si pensi ad esempio all'azione esercitata da un coltello sulla superficie di un corpo).

Con riferimento a quest'ultima, sia $\mathbf{p}(s)$ una forza per unità di lunghezza (avente cioè dimensioni fisiche $[FL^{-1}]$), ripartita su un arco di curva AB su cui sia stata introdotta un'ascissa curvilinea s (Fig. 9). Sull'elemento di linea di lunghezza ds , nell'intorno del punto P all'ascissa s , insiste una forza elementare $d\mathbf{F} = \mathbf{p}ds$, il cui momento rispetto ad un polo O è $d\mathbf{M}(O) = \mathbf{OP} \times \mathbf{p}ds$. Sommando i contributi relativi a tutti gli elementi di linea si ottengono il vettore risultante e il momento risultante:

$$\mathbf{F} = \int_A^B \mathbf{p}(s)ds, \quad \mathbf{M}(O) = \int_A^B \mathbf{OP} \times \mathbf{p}(s)ds \quad (19)$$

Un caso particolare notevole è rappresentato da forze $\mathbf{p}(s)$ tra loro parallele, ripartite su un arco di curva piana (Fig. 10); in tal caso il sistema di forze è piano. Posto

$\mathbf{p}(s) = p(s)\mathbf{e}$, con \mathbf{e} il versore individuante la direzione positiva secondo cui agiscono le forze $\mathbf{p}(s)$, le (19) si scrivono:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e} \int_A^B p(s)ds, \quad \mathbf{M}(O) = \int_A^B \mathbf{OP} \times \mathbf{e} p(s)ds \quad (20)$$

i cui moduli sono

$$F = \int_A^B p(s)ds, \quad M(O) = \int_A^B p(s) r(s)ds \quad (21)$$

essendo $r(s) = |\mathbf{OP} \times \mathbf{e}|$ la distanza da O della retta per P di versore \mathbf{e} . Il sistema equivale quindi ad un'unica forza $\mathbf{F}_R = F\mathbf{e}$ applicata alla retta r che dista $b = M(O)/F$ da O (Fig. 10).

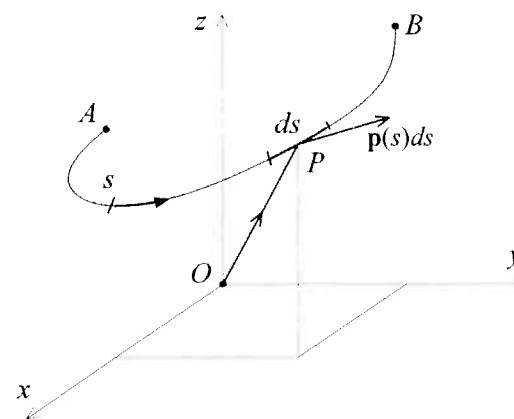


Fig. 9 Forze ripartite su una curva

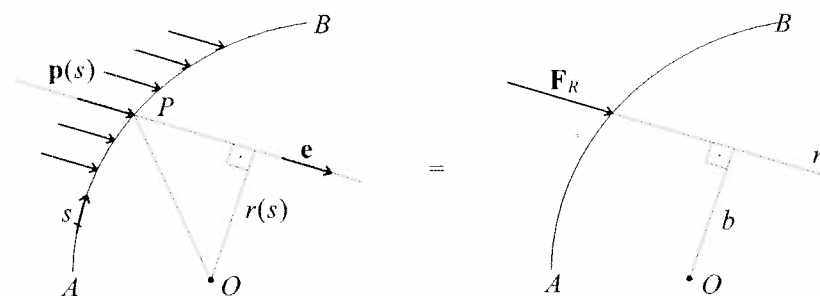


Fig. 10 Forze parallele ripartite su una curva piana

Se, come ulteriore caso particolare, le forze $\mathbf{p}(s) = p(s)\mathbf{e}$ sono ripartite su un segmento AB ortogonale ad \mathbf{e} (Fig. 11a) le (20) e (21) sono suscettibili della seguente, notevole, interpretazione geometrica: la risultante F_R è uguale all'area sottesa dal grafico della funzione $p(s)$ ed è applicata alla retta che passa per il baricentro G della figura.

Così, se il carico è uniformemente ripartito su un tratto di lunghezza l ed ha intensità p (Fig. 11b) la risultante vale $F_R = pl$ ed è applicata alla retta che dista $l/2$ dagli estremi.

Se il carico è ripartito con legge lineare da 0 a p sulla stessa lunghezza l (Fig. 11c), la risultante vale $F_R = pl/2$ ed è applicata a distanza $l/3$ dall'estremo in cui l'ordinata del carico è massima. In gergo tecnico, il grafico della funzione $p(s)$ viene sovente denominato *diagramma di carico* mentre la risultante F_R suole chiamarsi *risultante del diagramma di carico*.

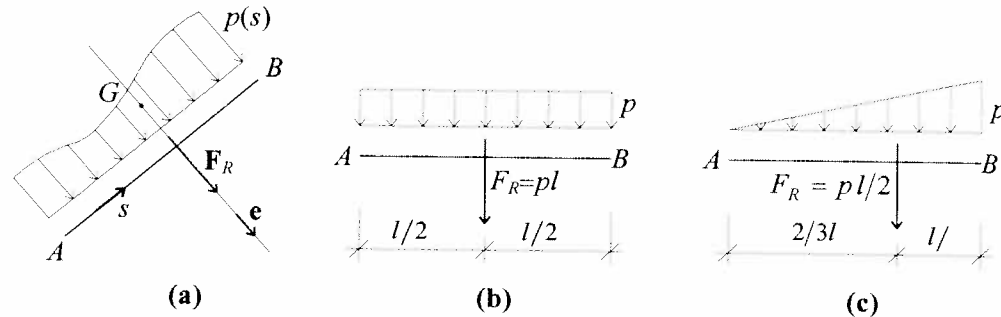


Fig. 11 Forze parallele ripartite su un segmento ad asse ortogonale

- **Osservazione 14.** Dato un sistema di forze parallele $\mathbf{p}(s) = p(s)\mathbf{e}$ ripartite su una generica curva piana, è sempre possibile trasformarlo in un sistema equivalente di forze parallele $\mathbf{q}(r) = q(r)\mathbf{e}$ ripartite su un segmento ad asse ortogonale (Fig. 12). Infatti, per l'equivalenza deve essere $p(s)ds = q(r)dr$, dove dr è la proiezione ortogonale di ds sulla retta ortogonale ad \mathbf{e} . Esprimendo dr in funzione dell'angolo $\alpha(s)$ formato dai due segmenti, si ha $dr = ds \cos \alpha(s)$, da cui

$$q(r) = p(s)/\cos \alpha(s) \quad (22)$$

Nella (22) l'ascissa s va poi espressa in funzione di r , cioè $s = s(r)$. A titolo di esempio i carichi verticali uniformemente ripartiti illustrati in Fig. 12b sono equivalenti.

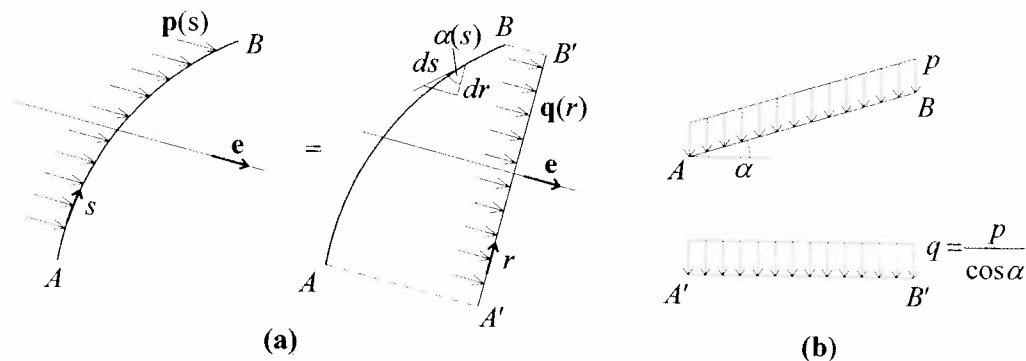
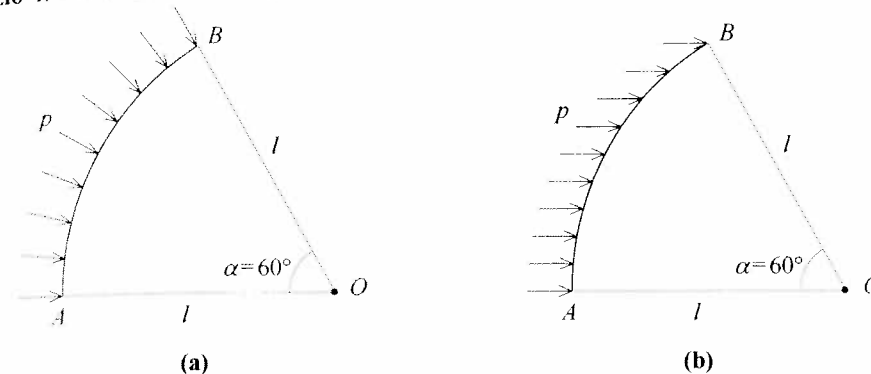


Fig. 12 Equivalenza tra forze parallele, ripartite sulla curva AB e sulla sua proiezione ortogonale A'B'; (a) caso generico; (b) esempio

Esercizio 4: Determinare la risultante dei sistemi di forze ripartite illustrati nelle Fig. (a) e (b).



Il sistema in Fig. (a) è costituito da un carico radiale, in quanto tutte le forze hanno retta d'azione passante per O; anche la risultante deve quindi passare per O. Con riferimento alla Fig. (c), la forza elementare che insiste su un arco $ds = l d\varphi$ ha componenti $dX = pl \cos \varphi d\varphi$ e $dY = pl \sin \varphi d\varphi$. Integrando si ha:

$$X = pl \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = pl \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} pl$$

$$Y = pl \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = pl (1 - \cos \alpha) = \frac{pl}{2}$$

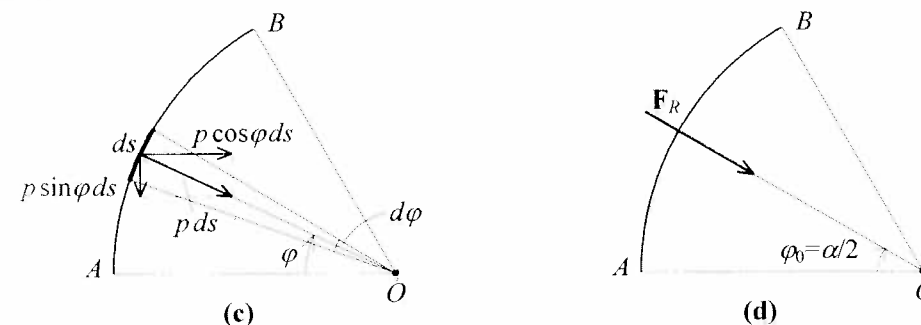
Il modulo della risultante è:

$$F_R = \sqrt{X^2 + Y^2} = pl$$

e l'angolo che forma con l'orizzontale è (Fig. d):

$$\varphi_0 = \arctg \frac{Y}{X} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

La risultante è quindi applicata alla bisettrice dell'arco, come poteva dedursi a priori, stante la simmetria.



Il sistema di Fig. (b) ha risultante

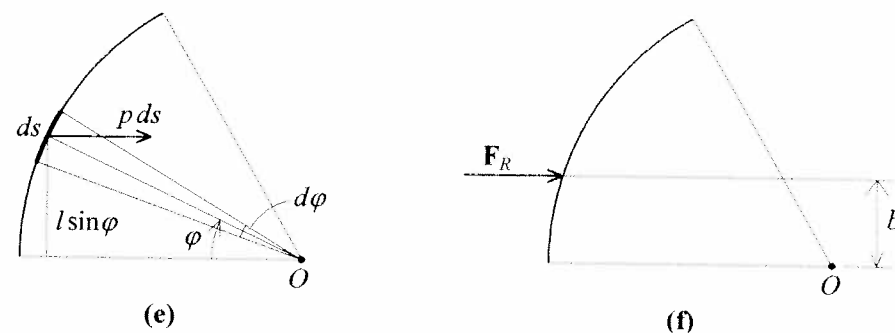
$$F = pl\alpha = \frac{\pi}{3} pl$$

diretta orizzontalmente. Per determinare la retta di applicazione si calcola il momento rispetto ad O (o a qualunque altro punto della retta AO). Con riferimento alla Fig. (e) si ha

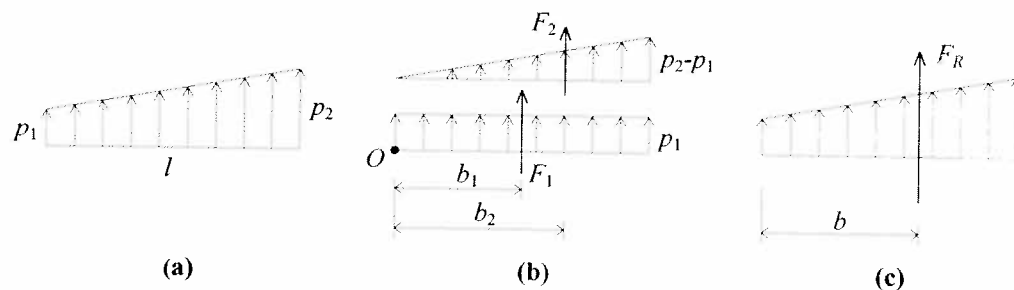
$dM(O) = pl^2 \sin \varphi d\varphi$. Integrando

$$M(O) = pl^2 \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi = pl^2 (1 - \cos \alpha) = \frac{pl^2}{2}$$

La risultante è applicata ad una distanza $b = M(O)/F = 3l/2\pi$ dal punto O (Fig. f).



Esercizio 5: Determinare la risultante del carico lineare rappresentato in Fig. (a).



La risultante è uguale all'area del trapezio:

$$F_R = \frac{p_1 + p_2}{2} l$$

Per determinare la retta di applicazione di F_R è conveniente decomporre il carico come in Fig. (b). Si ha immediatamente:

$$F_1 = p_1 l, \quad F_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)l, \quad b_1 = \frac{1}{2}l, \quad b_2 = \frac{2}{3}l$$

Il momento delle forze rispetto ad O è

$$M(O) = F_1 b_1 + F_2 b_2 = \frac{1}{6} p_1 l^2 + \frac{1}{3} p_2 l^2$$

da cui (Fig. c)

$$b = \frac{M(O)}{F} = \frac{p_1 + 2p_2}{p_1 + p_2} \frac{l}{3}$$

2. Reazioni vincolari

2.1 Caratterizzazione statica dei vincoli

Si consideri un sistema di corpi rigidi vincolati sottoposto all'azione di forze. È utile suddividere queste in *forze attive* e *forze* (o reazioni) *vincolari*. Le forze attive rappresentano l'azione che l'ambiente esercita sul sistema, quali ad esempio la forza peso, le forze apparenti in un riferimento non inerziale, le forze di contatto, etc.. Queste forze sono generalmente *assunte note*; si trascurano cioè, fatta eccezione per particolari problemi, gli effetti di interazione ambiente-sistema da cui le forze in realtà dipendono. Le reazioni vincolari rappresentano invece l'azione che, attraverso i dispositivi di vincolo, il suolo esercita sul sistema (reazioni vincolari esterne) ovvero che i corpi si scambiano a due a due (reazioni vincolari interne). Le forze vincolari non sono note; esse *rappresentano le incognite* del problema statico, come verrà chiarito più avanti. Prima però di porsi il problema della loro determinazione occorre procedere a caratterizzare staticamente i vincoli. È intuitivo che il "tipo" di reazione vincolare dipende dal tipo di vincolo. Ad esempio un incastro fornisce prestazioni statiche *qualitativamente diverse* da una cerniera. Occorre quindi associare a ciascun vincolo un particolare comportamento statico. Si noti che, procedendo in questo modo, si subordina il comportamento statico a quello cinematico, facendo discendere le proprietà statiche del vincolo dalle caratteristiche cinematiche dello stesso. L'obiettivo può essere raggiunto solo ricorrendo ad un postulato, noto dalla Meccanica Razionale. Esso stabilisce che, *se il vincolo è indipendente dal tempo, bilaterale e liscio* (cioè privo di attrito), *le reazioni esplicate sono di intensità qualsiasi e dirette secondo le componenti di spostamento impedito*. In altre parole si ammette che il vincolo non eserciti reazioni secondo le componenti di spostamento libere.

• **Osservazione 15.** La caratterizzazione statica del vincolo può anche essere enunciata come segue. *Le reazioni vincolari compiono lavoro nullo nei corrispondenti spostamenti consentiti dai vincoli* (in assenza di cedimenti vincolari). Infatti, a ciascuna grandezza statica non nulla corrisponde una grandezza cinematica nulla e viceversa.

2.2 Classificazione dei vincoli piani

Le reazioni dei vincoli piani esterni sono illustrate in Fig. 13. Così il carrello applica al punto A del corpo una forza di intensità arbitraria Y_A ortogonale alla retta di scorrimento del carrello (secondo cui lo spostamento è impedito) ma non applica forze dirette secondo la stessa retta, né applica coppie (in quanto non limita lo spostamento secondo la retta né limita la rotazione del corpo). Con ragionamenti analoghi si vede che la cerniera esplica due componenti arbitrarie di forza, X_A e Y_A ; il glifo applica una forza Y_A ortogonale alla retta di scorrimento, più una coppia M_A ; l'incastro due componenti di forza X_A e Y_A più una coppia M_A ; il bipendolo solo una coppia M_A . Può dirsi in generale che *un vincolo di molteplicità m applica m reazioni vincolari indipendenti*, una per ciascun vincolo semplice costituente il vincolo. Dal confronto della

Fig. 13 con la Fig. 1.13 si evince il legame tra le caratteristiche statiche e cinematiche dei vincoli.

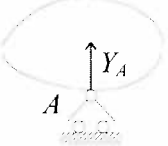
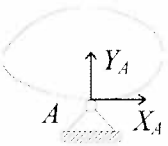
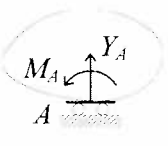
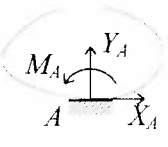

Denominazione	Simbolo e componente di reazione non nulla	Molteplicità	Prestazione statica
a) carrello		$m=1$	$Y_A \neq 0$
b) cerniera		$m=2$	$X_A \neq 0, Y_A \neq 0$
c) glifo		$m=2$	$Y_A \neq 0, M_A \neq 0$
d) incastro		$m=3$	$X_A \neq 0, Y_A \neq 0, M_A \neq 0$
e) bipendolo		$m=1$	$M_A \neq 0$

Fig. 13 Reazioni dei vincoli piani esterni

- **Osservazione 16.** Le reazioni indicate in Fig. 13 rappresentano l'azione esercitata dal suolo sul corpo attraverso il vincolo. Per il principio di azione e reazione, il corpo applica al suolo forze uguali e contrarie, non illustrate in figura.

Le reazioni dei vincoli piani interni sono illustrate in Fig. 14. Poiché i vincoli limitano gli spostamenti relativi tra i punti A_i e A_j dei due corpi collegati, le reazioni vincolari sono dirette secondo gli spostamenti relativi impediti e sono uguali e di segno opposto sui due corpi. Così il carrello interno applica una componente X_A al corpo C_i ed una componente $-X_A$ al corpo C_j ; la cerniera, due componenti X_A e Y_A al corpo C_i e $-X_A$ e $-Y_A$ al corpo C_j , e così via. Assunto un verso positivo per le reazioni esercitate su C_j ,

le reazioni agenti su C_i sono indicate in figura con verso opposto ed uguale intensità. Si confronti ancora la Fig. 14 con la Fig. 1.14, relativa alle proprietà cinematiche dei vincoli interni.

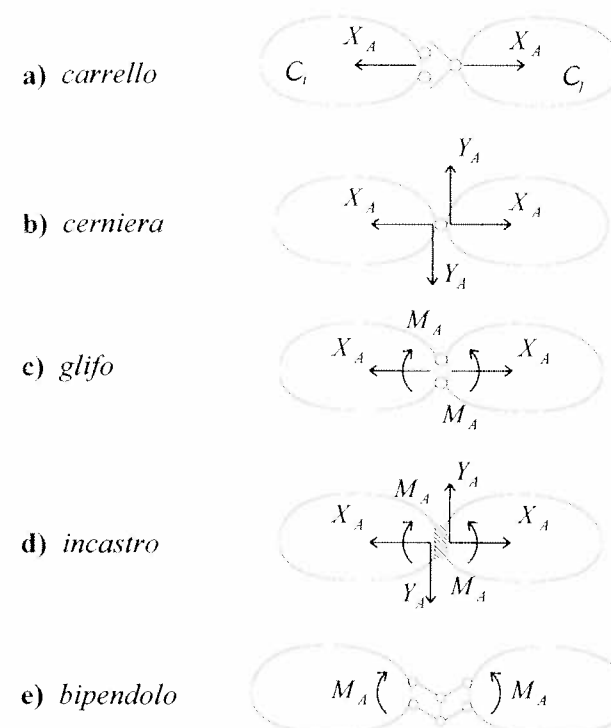


Fig. 14 Reazioni dei vincoli piani interni

- **Osservazione 17.** Considerando il suolo come un corpo appartenente al sistema, i vincoli esterni diventano vincoli interni al sistema. Le reazioni vincolari sono quindi quelle di Fig. 14, in cui le forze agenti sul suolo sono le reazioni di cui si è detto nell'Osservazione 16.

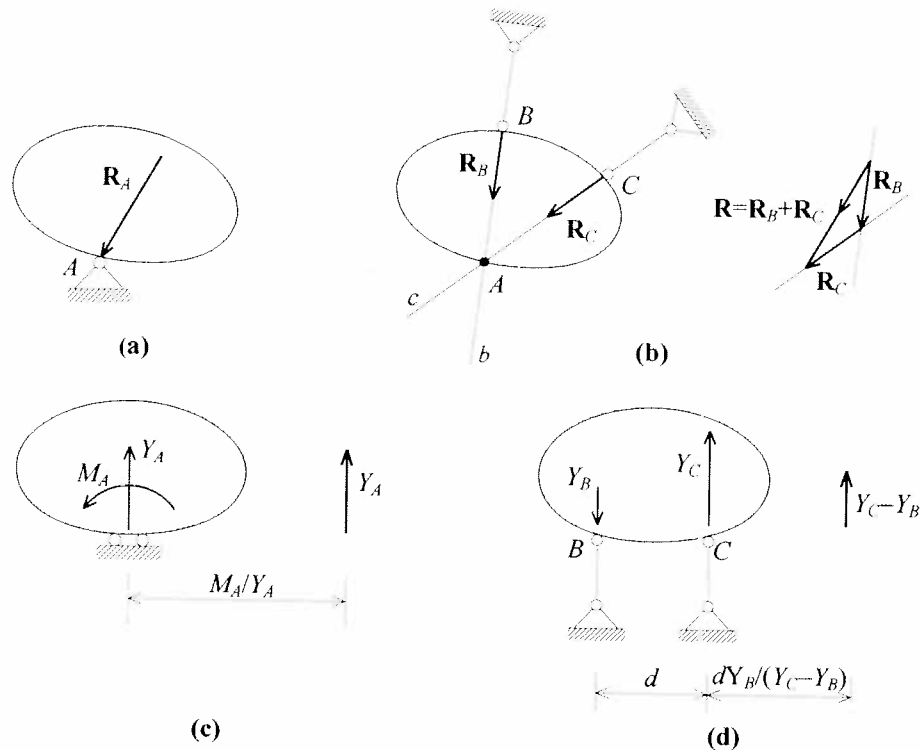
2.3 Equivalenza dei vincoli piani

Si è già visto in cinematica (punto 1.2.5) che un vincolo molteplice equivale a più vincoli semplici. L'equivalenza illustrata dalla Fig. 1.15, vale anche in statica, come è facile dimostrare effettuando operazioni di equivalenza statica. Infatti la reazione esercitata da una biella è identica a quella di un carrello, le reazioni di due bielle applicate nello stesso punto equivalgono alle reazioni di una cerniera applicata in quel punto, e così via. Alcune equivalenze sono illustrate dall'esercizio che segue.

Esercizio 6: Dimostrare l'equivalenza statica dei vincoli dell'Esercizio 1.7. Esaminare poi il caso in cui le bielle sono parallele.

La cerniera esplica la reazione \mathbf{R}_A di intensità arbitraria applicata ad una qualunque retta uscente da A (Fig. a). Le bielle applicano reazioni \mathbf{R}_B ed \mathbf{R}_C di intensità arbitrarie aventi rette d'azione b e c (Fig. b).

Trasportando \mathbf{R}_B ed \mathbf{R}_C lungo la retta d'azione e sommandole vettorialmente in A , punto di intersezione di b e c , si ottiene un'unica forza $\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_C$ applicata in A . Poiché \mathbf{R}_B ed \mathbf{R}_C sono arbitrarie, la direzione e l'intensità di \mathbf{R} sono pure arbitrarie: i due vincoli sono perciò equivalenti. Se, come caso particolare, le bielle sono parallele, componendo le due reazioni si ottiene un'unica forza applicata ad una retta ad essa parallela (Fig. d). Il vincolo equivale quindi ad un glifo, che infatti esercita una forza ed una coppia che, composte, equivalgono ancora ad una forza traslata su una retta parallela (Fig. c).



2.4 Alcuni vincoli spaziali

Si considerano a titolo di esempio le reazioni vincolari di alcuni vincoli spaziali:

- la *cerniera sferica*, di molteplicità $m=3$, applica al corpo tre componenti di forza, in quanto impedisce le tre traslazioni;
- la *cerniera cilindrica*, di molteplicità $m=5$, applica tre componenti di forza e due coppie, di assi ortogonali all'asse della cerniera, in quanto lascia libera la sola rotazione intorno all'asse;
- il *glifo*, di molteplicità $m=5$, applica tre coppie e due forze ortogonali alla direzione di scorrimento, in quanto lascia libera una sola traslazione;
- l'*incastro*, di molteplicità $m=6$, applica tre coppie e tre forze, in quanto impedisce tutti gli spostamenti.

I vincoli sono staticamente equivalenti a quelli realizzati con m pendoli, come può ad esempio verificarsi applicando ai sistemi in Fig. 1.16 considerazioni analoghe a quelle dell'Esercizio 6.

3. Il problema statico

3.1 Le equazioni cardinali della statica

Si consideri un sistema costituito da n_c corpi rigidi, mutuamente vincolati, generalmente, ma non necessariamente, vincolato al suolo (Fig. 15). Il sistema occupi la configurazione di riferimento con atto di moto nullo e sia sollecitato da un sistema di forze attive note, indipendenti dal tempo. Ha interesse chiedersi: il sistema permane in quiete in quella configurazione? Se sì, quanti e quali sono gli stati reattivi (cioè il complesso delle reazioni vincolari) equilibrati con le forze attive note? Sotto quali condizioni lo stato reattivo equilibrato è unico? Per rispondere a queste domande si formula il seguente *problema statico* (o problema dell'equilibrio): *assegnate le forze attive, determinare, se esistono, gli stati reattivi equilibrati*.

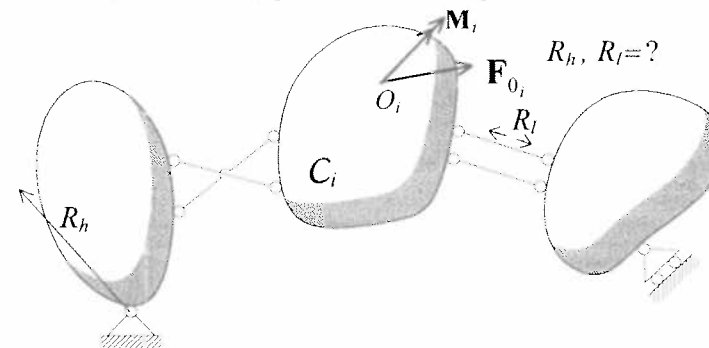


Fig. 15 Il problema statico per un sistema di corpi rigidi

Il problema è governato dalle equazioni cardinali della statica (2) che, come si è detto, devono essere soddisfatte per ciascun corpo del sistema. Per il generico corpo C_i si ha:

$$\begin{cases} \sum_h \mathbf{R}_h + \sum_k \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \\ \sum_h \mathbf{O}_i \mathbf{P}_h \times \mathbf{R}_h + \sum_k \mathbf{O}_i \mathbf{P}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n_c) \quad (23)$$

dove \mathbf{F}_k sono le forze esterne attive direttamente applicate a C_i ed \mathbf{R}_h sono le reazioni che C_i scambia con il suolo (reazioni vincolari esterne) e con i corpi a cui è collegato (reazioni vincolari interne). I termini noti nelle (23) rappresentano le forze attive ridotte al polo O_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{0_i} &= \sum_k \mathbf{F}_k \\ \mathbf{M}_i &= \sum_k \mathbf{O}_i \mathbf{P}_k \times \mathbf{F}_k \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n_c) \quad (24)$$

per cui le equazioni cardinali possono anche scriversi:

$$\begin{cases} \sum_h \mathbf{R}_h + \mathbf{F}_{0_i} = \mathbf{0} \\ \sum_h \mathbf{O}_i \mathbf{P}_h \times \mathbf{R}_h + \mathbf{M}_i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n_c) \quad (25)$$

Proiettando le (25) nel riferimento $O_i x_i y_i z_i$ e tenendo conto che le equazioni sono lineari nelle incognite \mathbf{R}_h si ottiene:

$$\mathbf{B} \mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (26)$$

Nella (26) \mathbf{B} è la *matrice di equilibrio* del sistema, di dimensioni $n \times m$, dove m è la molteplicità globale dei vincoli ed $n = 6n_c$, oppure $n = 3n_c$;

$$\mathbf{r} = \{R_1 \ R_2 \ \dots \ R_m\}^T \quad (27)$$

è un vettore colonna di lunghezza m , che elenca le reazioni vincolari incognite; \mathbf{f} è un vettore di lunghezza n che elenca le forze attive generalizzate (Eq. 13, 12, oppure 14, 15). La condizione sotto cui il problema statico (26) ammette soluzione sono fornite dal teorema di Rouché-Capelli, già ricordato nel paragrafo 1.3.2.

- **Osservazione 18.** In analogia alle (24) possono definirsi delle *forze vincolari generalizzate*, riducendo le forze reattive ai poli O_i :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{0_i}^v = \sum_h \mathbf{R}_h \\ \mathbf{M}_i^v = \sum_h \mathbf{O}_i \mathbf{P}_h \times \mathbf{R}_h \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n_c)$$

Elencando le componenti scalari in un vettore \mathbf{f}_v le equazioni cardinali della statica (26) si scrivono

$$\mathbf{f}_v + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

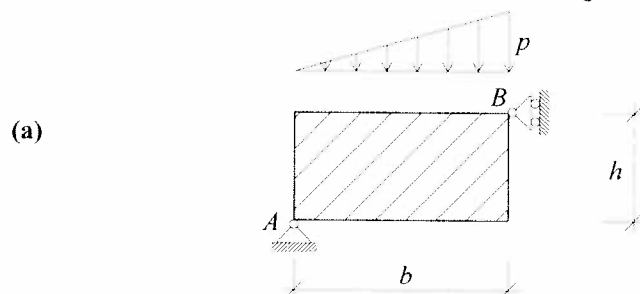
Dal confronto con la (26) segue che

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{B} \mathbf{r}$$

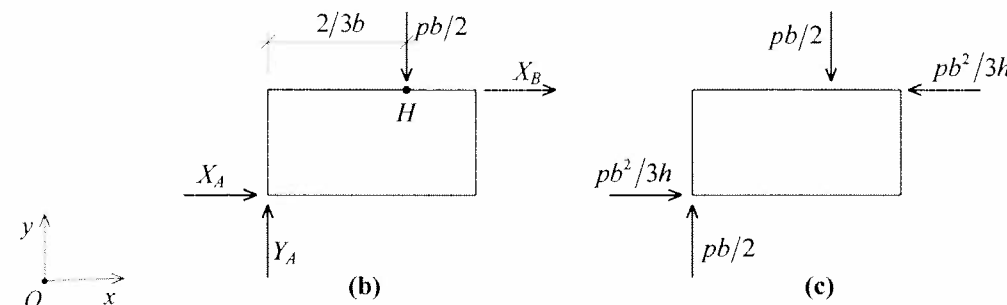
- **Osservazione 19.** Le dimensioni della matrice di equilibrio \mathbf{B} (n righe ed m colonne) sono scambiate rispetto a quelle della matrice di compatibilità \mathbf{A} (m righe ed n colonne). Ciò è conseguenza del fatto che il numero delle reazioni vincolari m eguaglia il numero dei vincoli semplici, e il numero delle forze generalizzate n eguaglia il numero dei g.d.l..

Nel seguito si risolvono, a titolo di esempio, tre problemi di statica relativi ad altrettanti sistemi già studiati in cinematica (Esercizi 1.9, 1.10 e 1.11). Gli esempi metteranno in rilievo alcune proprietà di simmetria.

Esercizio 7: Determinare le reazioni vincolari del sistema in figura.



Il sistema è costituito da un corpo rigido vincolato con tre vincoli semplici, sollecitato nel piano. Le forze attive sono costituite da una risultante $F_R = pb/2$ applicata all'asse verticale distante $2b/3$ da A (Fig. b); le reazioni vincolari sono tre: le componenti X_A e Y_A della reazione della cerniera e la reazione X_B del carrello, assunte positive come in Fig. (b).



Imponendo che si annulli la somma delle componenti delle forze secondo i due assi e la somma dei momenti rispetto ad un polo O arbitrariamente scelto si ha, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_A & x_A & -y_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -pb/2 \\ -pbx_H/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le equazioni sono del tipo (26); in particolare, la matrice dei coefficienti è la matrice \mathbf{B} di equilibrio del sistema. Una scelta opportuna del polo O semplifica la soluzione del problema. Scegliendo infatti $O \equiv A$ i bracci delle reazioni X_A ed Y_A si annullano e le equazioni si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -pb/2 \\ -pb^2/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

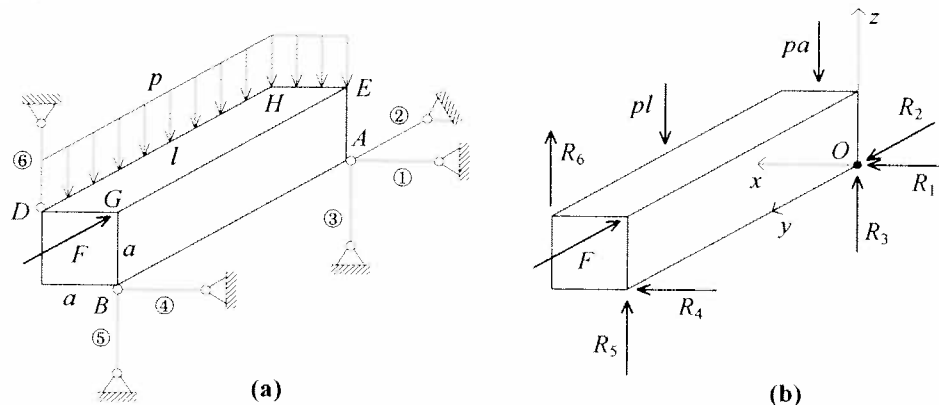
Risolvendo si ottiene:

$$X_A = pb^2/(3h), \quad Y_A = pb/2, \quad X_B = -pb^2/(3h)$$

Le reazioni vincolari sono indicate in Fig. (c) con il loro verso. La soluzione equilibrata può così interpretarsi: la reazione Y_A equilibra la risultante delle forze attive; poiché le due forze costituiscono una coppia oraria, le due forze orizzontali X_A e X_B devono costituire una coppia antioraria antagonista.

Si osservi che si è determinato un solo stato reattivo equilibrato, ciò è conseguenza del fatto che \mathbf{B} è quadrata e non singolare.

Esercizio 8: Scrivere le equazioni di equilibrio in figura e discutere la soluzione del problema statico.



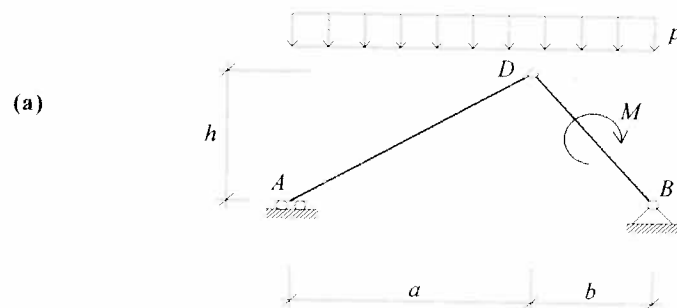
Il sistema è costituito da un unico corpo rigido vincolato nello spazio con sei vincoli semplici. Il carico ripartito è distribuito sui due segmenti DH ed HE ; sostituendo a ciascun segmento di carico la sua risultante e assunto un verso positivo arbitrario per le reazioni R_j ($j=1, 2, \dots, 6$) si hanno le forze di Fig. (b).

Scelto il riferimento in Fig. (b), con $O \equiv A$, ed imponendo che si annulli la somma delle componenti delle forze secondo i tre assi nonché la somma dei momenti assiali si ottiene, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ -p(l+a) \\ Fa - pl^2/2 \\ pa(l+a/2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

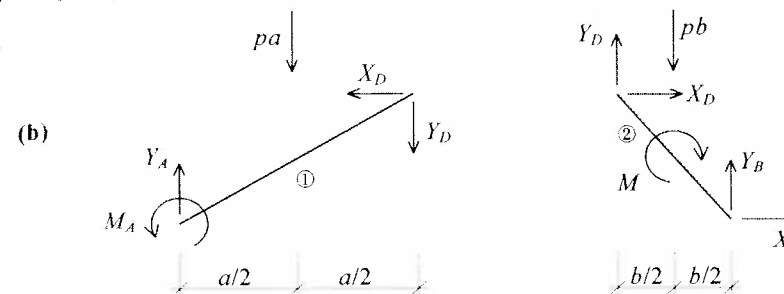
La matrice dei coefficienti, di dimensioni 6×6 , è la matrice di equilibrio. Poiché $\det \mathbf{B} \neq 0$, la soluzione del problema è unica.

Esercizio 9: Risolvere il problema statico in Fig. (a).



Si tratta di un arco a tre cerniere. Il glifo in A applica a $C_1 \equiv AD$ una forza verticale Y_A ed una coppia M_A ; la cerniera in B applica a $C_2 \equiv BD$ due forze, X_B e Y_B ; la cerniera interna in D applica ai due corpi due forze uguali e contrarie. Scelto arbitrariamente un verso positivo per le reazio-

ni vincolari, e sostituendo a ciascun segmento di carico la sua risultante (si veda l'Osservazione 12) i corpi risultano sollecitati come in Fig. (b) (anche detta esplosione del sistema).



Imponendo l'equilibrio tra forze attive e reattive si ottiene, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_A \\ M_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_D \\ Y_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -pa \\ -pa^2/2 \\ 0 \\ -pb \\ -M + pb^2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

dove le prime tre equazioni sono le equazioni cardinali relative a C_1 , le ultime tre equazioni quelle relative a C_2 . Esse esprimono l'annullamento della somma delle componenti orizzontali e verticali delle forze applicate a ciascun corpo, nonché l'annullamento dei momenti delle stesse forze rispetto ai poli A e B . Risolvendo si ottiene:

$$Y_A = p \left(a + \frac{b}{2} \right) - \frac{M}{b}, \quad M_A = p \frac{a}{2} (a+b) - M \frac{a}{b};$$

$$X_B = 0, \quad Y_B = p \frac{b}{2} + \frac{M}{b}; \quad X_D = 0, \quad Y_D = p \frac{b}{2} - \frac{M}{b} \quad (b)$$

Si noti che le reazioni dei vincoli esterni in A e B compaiono nelle equazioni di equilibrio di un solo corpo, mentre le reazioni del vincolo interno in D compaiono nelle equazioni di equilibrio di entrambi i corpi. Poiché la matrice di equilibrio \mathbf{B} è non singolare, le (a) ammettono una ed una sola soluzione.

• **Osservazione 20.** Dal confronto delle equazioni di equilibrio relative ai tre esempi precedenti (esercizi 7÷9) con le equazioni di congruenza relative agli stessi sistemi (esercizi 1.9÷1.11) emerge un'importante proprietà di simmetria (detta *dualità*) tra il problema statico e il problema cinematico. Sotto opportune condizioni (che verranno illustrate più avanti), dato un sistema di corpi rigidi, la matrice di equilibrio \mathbf{B} è la trasposta della matrice di congruenza \mathbf{A} :

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{A} \quad (28)$$

Questa proprietà, come sarà visto nel Cap. 3, è generale; non è cioè legata a sistemi particolari. Si ricordi a tal proposito l'Osservazione 19.

3.2 Classificazione statica

In base alle caratteristiche della matrice di equilibrio \mathbf{B} (dimensioni $n \times m$ e rango p), ricordando il teorema di Rouché-Capelli (paragrafo 1.3.2) si può procedere ad una *classificazione statica dei sistemi di corpi rigidi*, in modo simile a quanto fatto in cinematica (si veda il punto 1.3.3).

Si distinguono i quattro casi fondamentali discussi nel seguito.

- a) $m=n=p$: *sistema staticamente determinato, o isostatico*. La matrice \mathbf{B} è quadrata ed ha rango massimo, poiché $\det \mathbf{B} \neq 0$. Il problema statico (26) ammette una ed una sola soluzione:

$$\mathbf{r} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{f} \quad (29)$$

qualunque sia il vettore delle forze attive generalizzate \mathbf{f} . In particolare, se le forze attive sono staticamente equivalenti a zero (sono cioè autoequilibrate su ciascun corpo, oppure sono del tutto assenti) l'unica soluzione del problema statico è quella banale, $\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

In questa classe ricadono i sistemi in cui il numero di reazioni vincolari m è uguale al numero di forze generalizzate, $n=6n_c$ (nello spazio) o $n=3n_c$ (nel piano) e per i quali le forze generalizzate reattive risultano linearmente indipendenti.

I sistemi studiati negli esercizi 7÷9 sono staticamente determinati.

- b) $p=n<m$: *sistema staticamente indeterminato, o iperstatico*.

La matrice \mathbf{B} è rettangolare "bassa", avente numero di colonne maggiore di quello delle righe, per cui il sistema (26) è indeterminato. Il problema statico ammette dunque ∞^{m-n} soluzioni. Infatti, effettuata la partizione (si veda l'Appendice A1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} = -\{\mathbf{f}\} \quad \det \mathbf{B}_1 \neq 0 \quad (30)$$

la soluzione può scriversi nella forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \chi \quad (31)$$

dove

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (32)$$

e in cui le $r:=m-n$ reazioni $\chi:=\mathbf{r}_2$ sono arbitrarie; r è detto *grado di indeterminazione*, o di *iperstaticità*, del sistema. Il vettore χ , di dimensioni $r \times 1$, è il vettore dei *parametri liberi di reazione*, o *incognite iperstatiche*; la matrice \mathbf{R} , di dimensioni $m \times r$, è la *matrice delle autoreazioni*, cioè degli stati reattivi autoequilibrati.

Si noti che la soluzione (31) è somma di due termini: il primo, \mathbf{r}_0 , è una *soluzione particolare del problema non omogeneo* ($\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$) ed è relativa ad un *sistema principale isostatico*, di matrice \mathbf{B}_1 invertibile; il secondo $\mathbf{r}_\chi := \mathbf{R} \chi$, è la *soluzione generale del problema omogeneo* ($\mathbf{f}=\mathbf{0}$), espressa come combinazione lineare a coefficienti χ incogniti di r soluzioni particolari linearmente indipendenti, costituite

dalle colonne di \mathbf{R} . Queste descrivono gli stati di autoreazione del sistema iperstatico, cioè particolari autosoluzioni del problema statico omogeneo. Un sistema iperstatico di grado r possiede r stati autoreattivi; questi però non sono univocamente determinati, perché ogni loro combinazione lineare, essendo ancora soluzione del problema omogeneo, è uno stato autoreattivo.

In questa classe ricadono i *SCR* il cui numero dei vincoli è eccessivo, per i quali un dato sistema di forze attive può essere equilibrato da infiniti sistemi di forze reattive tra loro equivalenti. Anche se, come caso particolare, le forze attive sono staticamente equivalenti a zero, le reazioni vincolari sono in generale non nulle, anche se autoequilibrate. Un esempio di sistema iperstatico è trattato nell'Esercizio 10 che segue.

- c) $p=m<n$: *sistema staticamente impossibile, o ipostatico*.

La matrice \mathbf{B} è rettangolare "alta", avente numero di righe maggiore del numero di colonne, per cui il sistema (26) è sovradeterminato. Il problema statico, in generale, non ammette soluzione. Se infatti si partiziona il sistema (26) si ha (si veda anche l'Appendice A2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \{\mathbf{r}\} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad \det \mathbf{B}_1 \neq 0 \quad (33)$$

per cui, anche se si risolvono le prime m equazioni, $\mathbf{r} = -\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{f}_1$, le restanti $l:=n-m$ non sono soddisfatte, essendo in generale $\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$; l è perciò detto *grado di sovradeterminazione* del sistema. Fa eccezione naturalmente il caso in cui le forze attive sono scelte "ad hoc", in modo tale da soddisfare la parte inferiore del sistema di equazioni. Questa circostanza si verifica quando

$$\mathbf{V} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (34)$$

con:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (35)$$

La (34) esprime la condizione che deve essere soddisfatta dalle forze attive perché il problema statico, sebbene impossibile, ammetta egualmente soluzione. Essa è detta *condizione di compatibilità (o di solvibilità) del problema statico*, o ancora *condizione di compatibilità delle forze*. La matrice \mathbf{V} , di dimensioni $l \times n$, è la *matrice di compatibilità delle forze*. Se la (34) è soddisfatta, le ultime r equazioni possono essere scartate (in quanto ripetizione delle prime m) ed il sistema può essere risolto in corrispondenza delle prime. Il termine noto nullo ($\mathbf{f}=\mathbf{0}$) rientra nel caso particolare e ad esso è associata la soluzione banale $\mathbf{r}=\mathbf{0}$.

Ricadono in questa classe i sistemi in cui il numero delle reazioni vincolari è insufficiente a soddisfare tutte le equazioni cardinali della statica. Un esempio di sistema ipostatico è illustrato più avanti nell'esercizio 11.

- d) $p<n=m$: *sistema staticamente degenero*.

È il caso di matrici \mathbf{B} quadrate, con $\det \mathbf{B}=0$. Poiché il sistema è di forma non normale ($p<n$) in generale il problema statico non ammette soluzione. Se, come caso

particolare ammette soluzione in quanto $\text{rango}[\mathbf{B} | \mathbf{f}] = \text{rango}[\mathbf{B}]$, le soluzioni sono ∞^{m-p} , in quanto $p < m$.

Il sistema degenere è quindi essenzialmente staticamente impossibile; nei casi eccezionali si comporta però come un sistema staticamente indeterminato. Se le forze attive sono equivalenti a zero ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$) gli stati reattivi autoequilibrati sono comunque infiniti. Sono staticamente degeneri quei sistemi in cui le reazioni vincolari, pure in numero pari alle equazioni di equilibrio, hanno caratteristiche globali non tutte indipendenti, cosicché non possono equilibrare qualunque sistema di forze attive. Quale ulteriore effetto possono costituire un sistema reattivo autoequilibrato anche in assenza di forze attive. Un esempio verrà presentato nell'esercizio 12.

Oltre ai quattro casi trattati si possono considerare altri due casi di sistemi degeneri: $p < n < m$ e $p < m < n$. Le conclusioni a cui si perviene sono simili a quelle del caso d) e sono lasciate per esercizio al lettore.

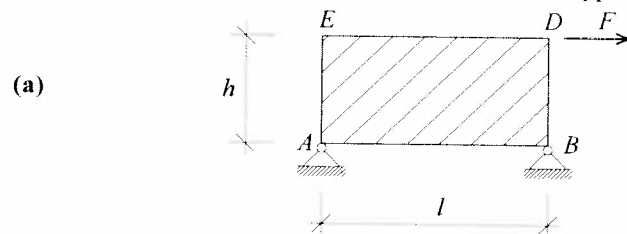
• **Osservazione 21.** Stante la dualità, espressa dall'equazione (28), le classificazioni cinematica e statica dei sistemi sono strettamente connesse. Infatti:

- a) un sistema cinematicamente determinato è anche staticamente determinato;
- b) un sistema cinematicamente indeterminato è anche staticamente impossibile;
- c) un sistema cinematicamente impossibile è anche staticamente indeterminato;
- d) un sistema cinematicamente degenere è anche staticamente degenere.

Ai fini della classificazione, quindi, è possibile utilizzare le nozioni già sviluppate in cinematica, con particolare riguardo alla classificazione diretta (punto 1.3.4), che permette di distinguere un sistema determinato da uno degenere.

Nel seguito (esercizi 10÷12) si studiano nell'ordine un sistema staticamente indeterminato, uno impossibile e uno degenere. I problemi sono gli stessi analizzati in cinematica (esercizi 1.13, 1.12 e 1.14 rispettivamente). Anche per questi sistemi, come per quelli isostatici, si può verificare che la proprietà di dualità (28) è soddisfatta.

Esercizio 10: Si studi il sistema staticamente indeterminato rappresentato in Fig. (a).



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido piano ($n=3$) vincolato con due cerniere ($m=4$). La matrice \mathbf{B} ha dimensioni 4×3 , per cui il sistema è iperstatico. Scelti i versi positivi delle reazioni vincolari come indicato in Fig. (b), le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ -Fh \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

avendo annullato i momenti delle forze rispetto al polo $O \equiv A$. Le equazioni possono essere riscritte nella forma (30) portando a secondo membro una colonna di \mathbf{B} e facendo in modo che la sottomatrice quadrata \mathbf{B}_1 che resta a primo membro sia non singolare. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ Fh \\ 0 \end{Bmatrix} + \chi \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

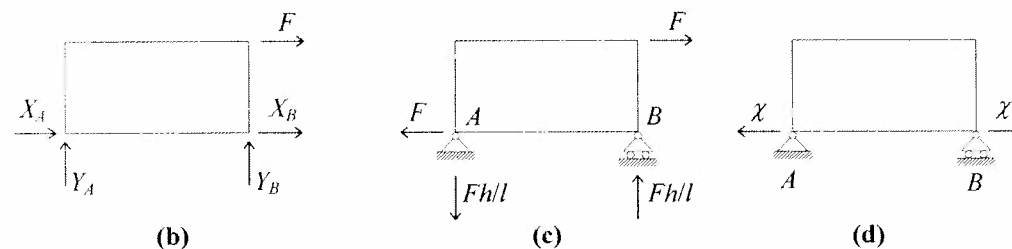
dove si è posto $\chi := X_B$, parametro arbitrario. Risolvendo si ha:

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ -Fh/l \\ 0 \\ Fh/l \end{Bmatrix} + \chi \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{c})$$

La soluzione è della forma (31). Il primo termine, proporzionale ad F , rappresenta una soluzione particolare (in quanto legata ad una particolare scelta di \mathbf{B}_1) del problema non omogeneo; il secondo, proporzionale al parametro indeterminato χ , rappresenta la soluzione generale del problema omogeneo; il vettore colonna moltiplicato da χ è la matrice delle autoreazioni,

$$\mathbf{R} = [-1 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (\text{d})$$

Il procedimento può essere interpretato in modo strettamente meccanico. Si pensi di eliminare il vincolo sovrabbondante che applica la reazione vincolare X_B e di sostituire ad esso una forza arbitraria χ . Il sistema si riduce ad un corpo appoggiato (quindi staticamente determinato), che costituisce un sistema principale (ma non l'unico) per il sistema originario. Sovrapponendo gli effetti, il sistema principale è sollecitato dalla forza attiva F (Fig. c) e dall'incognita iperstatica χ applicata in B (Fig. d). Risolvendo separatamente i due problemi si determinano i due contributi della soluzione.



Si noti che, anche in assenza di forze attive, le reazioni X_A ed X_B sono diverse da zero e costituiscono un sistema reattivo autoequilibrato di intensità arbitraria, descritto dalla matrice delle autoreazioni.

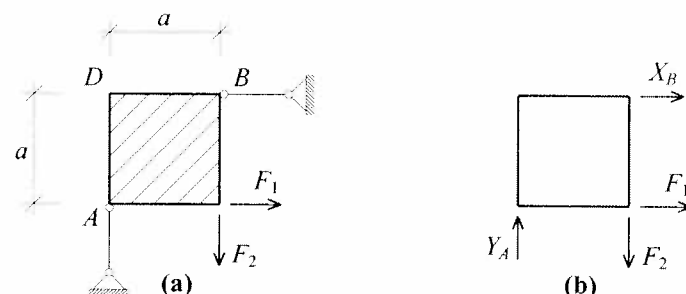
Esercizio 11: Si studi il sistema staticamente impossibile rappresentato in Fig. (a). Si ottenga poi la matrice di compatibilità delle forze.

Il sistema è costituito da un unico corpo rigido piano ($n=3$) vincolato con due bielle ($m=2$). La matrice \mathbf{B} ha dimensioni 3×2 , per cui il sistema è impossibile. Orientate le reazioni vincolari come in Fig. (b), le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_A \\ X_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ -F_2 \\ -F_2 a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

avendo scelto A come polo rispetto a cui annullare i momenti. Il problema è manifestamente impossibile in quanto la prima e terza riga della matrice di equilibrio sono tra loro proporzionali mentre, se F_1 ed F_2 sono arbitrari, i termini noti non stanno tra loro nello stesso rapporto. Se però, come caso particolare, è $F_1 = F_2$, una delle tre equazioni si può scartare ed il sistema può essere risolto in corrispondenza delle altre due equazioni, la cui matrice è non singolare. Così operando si ottiene:

$$X_B = -F_1, \quad Y_A = F_2 \quad (b)$$



Si osservi che se $F_1 = F_2$ la matrice \mathbf{B} e la matrice orlata che si ottiene aggiungendo a \mathbf{B} la colonna dei termini noti, hanno lo stesso rango $p=2$, quindi, come risulta dal teorema di Rouché-Capelli, il problema ammette soluzione.

La circostanza può essere spiegata in termini meccanici. Qualunque siano Y_A ed X_B , il loro momento rispetto a D , punto di intersezione delle due rette di azione, è nullo. Poiché in generale la risultante delle forze attive F_1 ed F_2 ha retta d'azione r esterna a D , il momento risultante rispetto a D è diverso da zero, cosicché l'equilibrio non può sussistere. Se però, come caso particolare, la retta r passa per D (il che avviene per $F_1 = F_2$) l'equilibrio sussiste. È evidente che questi casi eccezionali sono privi di interesse tecnico, infatti, una piccola perturbazione delle forze attive rende il sistema non equilibrato (*equilibrio instabile*).

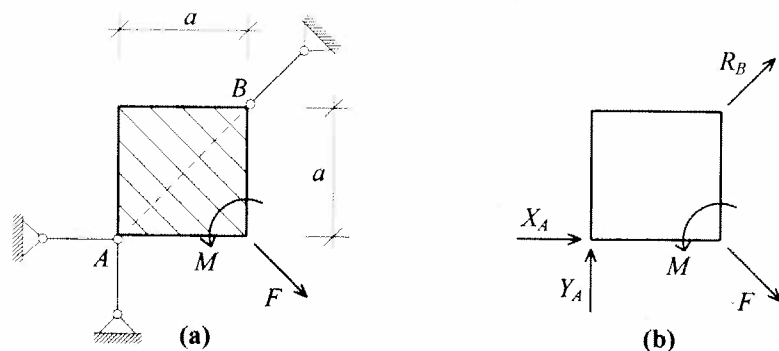
Per ottenere la condizione di solvibilità dell'equilibrio (34) si considerano forze attive generalizzate generiche, X_0, Y_0, M ridotte al polo $O \equiv A$. Risolvendo le prime due equazioni di equilibrio e sostituendo nella terza si ottiene

$$aX_0 + M = 0 \quad (c)$$

che costituisce l'equazione cercata; la matrice di compatibilità delle forze è perciò

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Esercizio 12: Si studi il sistema staticamente degenere rappresentato in Fig. (a).



Il sistema è costituito da un unico corpo rigido piano ($n=3$) vincolato con tre bielle ($m=3$) convergenti nel medesimo punto A . La matrice \mathbf{B} ha dimensioni 3×3 . Scelte le reazioni come in fig. (b), le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \sqrt{2}/2 \\ \cdot & 1 & \sqrt{2}/2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ R_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F\sqrt{2}/2 \\ -F\sqrt{2}/2 \\ M - Fa\sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avendo scelto A come polo dei momenti. Il determinante della matrice di equilibrio è nullo, mentre il minore principale 2×2 individuato dalle prime due righe e colonne è diverso da zero, per cui il rango è $p=2$. Il sistema è di forma non normale ed in generale non ammette soluzione. Poiché in generale il rango della matrice orlata è $p=3$, non si verificano le condizioni di esistenza della soluzione; il problema statico è quindi impossibile. Fa eccezione il caso in cui

$$M - Fa\sqrt{2}/2 = 0$$

La circostanza si spiega con il fatto che, a causa della convergenza in A delle reazioni vincolari, è nullo il momento rispetto ad A delle reazioni vincolari stesse, mentre è in generale diverso da zero quello dovuto alle forze attive. In modo simile a quanto visto nell'esercizio 11, se la risultante delle forze attive passa per A il sistema è equilibrato; ciò si verifica quando M ed F sono tali da annullare il momento rispetto ad A . In tal caso però gli stati reattivi equilibrati sono ∞^1 ; assegnando infatti ad arbitrio ad esempio R_B , dalle prime due equazioni di equilibrio si ricavano X_A ed Y_A .

- **Osservazione 22.** Con riferimento agli esercizi precedenti, se si confrontano la matrice delle autosoluzioni del problema statico \mathbf{R} (esercizio 10) e la matrice di compatibilità \mathbf{Q} del problema cinematico (esercizio 1.13), relative ad un sistema staticamente indeterminato/cinematicamente impossibile, si rileva che

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \quad (36)$$

Inoltre, se si confrontano la matrice di compatibilità delle forze \mathbf{V} (esercizio 11) e la matrice delle autosoluzioni del problema cinematico \mathbf{U} (Esercizio 1.12), relative ad un sistema staticamente impossibile/cinematicamente indeterminato, si rileva che

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^T \quad (37)$$

Risulta cioè soddisfatta la seguente proprietà: *considerati due problemi duali, uno indeterminato e l'altro impossibile, la matrice delle autosoluzioni del primo è la trasposta della matrice di solvibilità del secondo* (si veda l'Appendice A.3). Le due proprietà (36) e (37), come sarà visto nel Cap. 3, sono generali, e strettamente legate alla proprietà (28).

3.3 Classificazione diretta

Come si è detto nell'Osservazione 21, la sussistenza della dualità rende superfluo sviluppare concetti specifici circa la classificazione statica diretta, risultando più agevole quella cinematica. Si vuole tuttavia sottolineare come il concetto di sottostrutture in serie o serie/parallelo, già discusso nel paragrafo 1.3.4, sia di grande utilità anche in statica.

Si riprenda ad esempio il sistema rappresentato in Fig. 1.21a, costituito da due archi a tre cerniere in serie, e lo si supponga sollecitato da forze attive generiche (Fig. 16a). Ricordando la forma della matrice cinematica \mathbf{A} (Fig. 1.22) ed applicando la (28), può concludersi che la matrice di equilibrio \mathbf{B} è del tipo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (38)$$

con $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{11}^T$, $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T$ e $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{A}_{22}^T$ essendo \mathbf{B}_{11} e \mathbf{B}_{22} rispettivamente le matrici di equilibrio degli archi ADB ed EGF . Procedendo in cascata, è conveniente risolvere prima le equazioni relative all'arco EGF (struttura "portata") e poi quella relativa all'arco ADB (struttura "portante"). Ciò equivale a procedere come indicato in Fig. 16b, determinando cioè prima le reazioni "esterne" all'arco EGF , ed applicandole poi, cambiate di segno, all'arco ADB .

Applicando questi concetti al sistema in serie/parallelo di Fig. 1.21b, risulta conveniente equilibrare il corpo GH e determinare quindi le forze che applica ai due sottosistemi in parallelo, che possono essere risolti indipendentemente. In particolare il sistema $ABDEF$ può essere risolto come nell'esempio precedente.

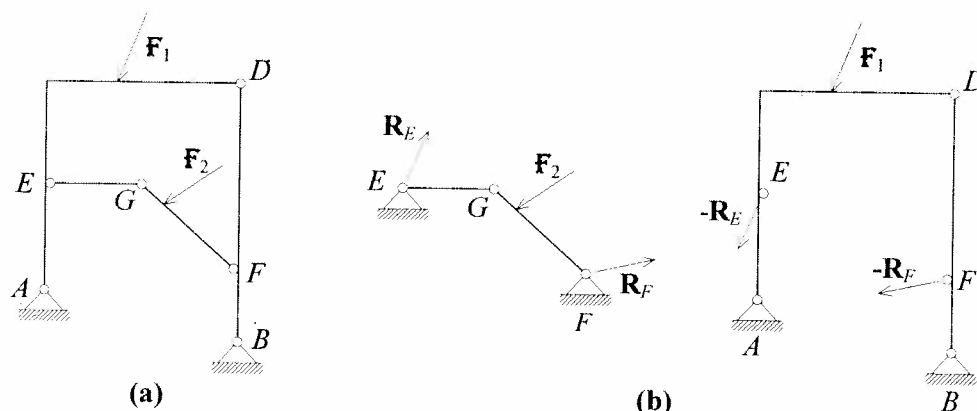


Fig. 16 Sottostrutture in serie: struttura "portata" e "portante"

- **Osservazione 23.** L'ordine con il quale vengono risolti i sottoproblemi statici è invertito rispetto a quello dei problemi cinematici. Ciò è conseguenza del fatto che $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$. Così, in statica occorre risolvere prima la struttura "portata" e poi quella "portante", potendosi identificare la prima con la struttura "trascinata" e la seconda con quella "trascinante".

3.4 Vincoli multipli; forze applicate a cerniere

La modellazione delle forze reattive esercitate da vincoli multipli, quali quelli di Fig. 1.23a, è strettamente connessa alla modellazione cinematica già discussa nel paragrafo 1.3.5.

Si è già detto che una cerniera interna che collega mutuamente n corpi piani in un punto A (Fig. 17a) è equivalente ad $n-1$ cerniere che collegano ciascuna il corpo 1 ai

restanti $n-1$ corpi. Le reazioni vincolari indipendenti \mathbf{R}_j sono allora $n-1$; esse consistono in forze uguali e contrarie che il corpo 1 scambia con i corpi $j=2, 3, \dots, n$ (Fig. 17b). Se la cerniera è vincolata al suolo da un carrello (Fig. 1.23b), modellando il vincolo come un'ulteriore biella applicata al corpo 1 nel punto A , alle reazioni precedenti deve essere sommata la forza esercitata sul corpo 1 dalla biella.

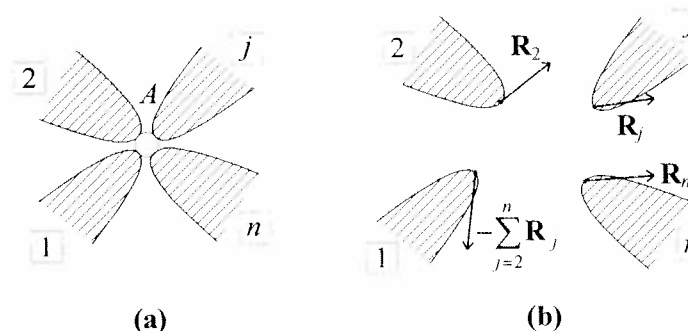
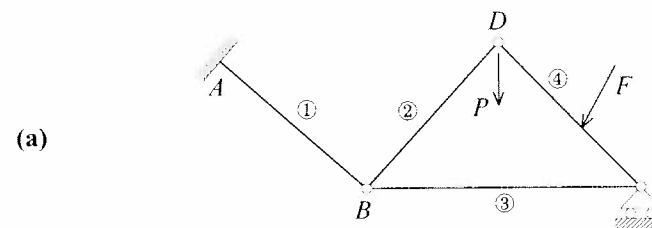
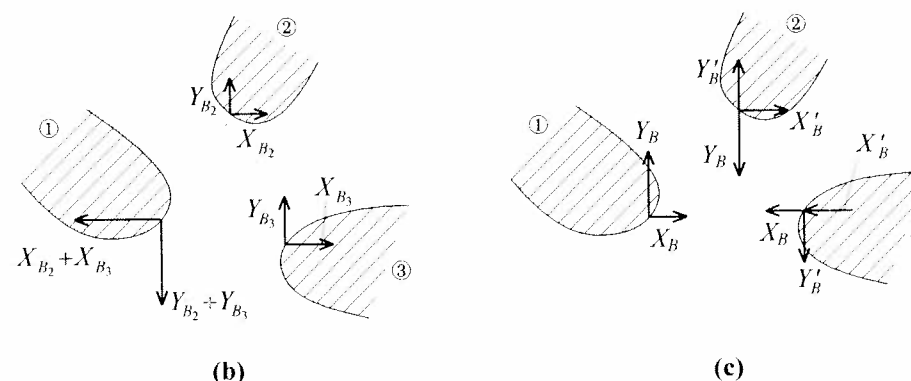


Fig. 17 Reazioni vincolari di una cerniera che collega n corpi

Esercizio 13: Individuare il tipo di reazioni esercitate dai vincoli in Fig. (a) ed impostare il problema statico. Si assuma inizialmente $P=0$.



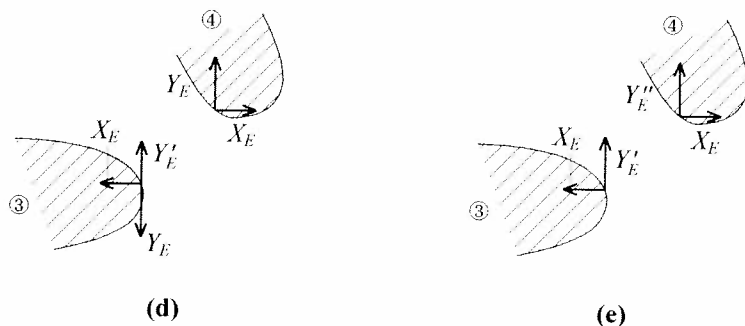
Il sistema è il medesimo dell'esercizio 1.16. Le reazioni in A e D non comportano difficoltà; le reazioni vincolari in B ed E dipendono da come sono disposti i vincoli elementari. Con riferimento alle disposizioni delle Fig. (b)-(e) dell'Esercizio 1.16, le reazioni vincolari associate sono indicate nelle Fig. (b)-(e) che seguono:



In Fig. (b) X_{Bj} ed Y_{Bj} ($j=2, 3$) sono le componenti delle reazioni della cerniera che collega il corpo 1 al corpo j ; sul corpo 1 agisce la somma delle reazioni cambiate di segno. In Fig. (c)

X_B ed Y_B sono le reazioni delle bielle che collegano il corpo 1 rispettivamente al corpo 3 e al corpo 2, mentre X'_B e Y'_B sono le reazioni della cerniera che collega i corpi 2 e 3. In Fig. (d) X_E ed Y_E sono le reazioni della cerniera interna ed Y''_E la reazione del carrello applicato al corpo 1. Nella Fig. (e) X_E è la reazione della biella interna ed Y'_E e Y''_E quelle delle bielle esterne.

Utilizzando le schematizzazioni in Fig. (c) e (d) si ottiene l'esploso di Fig. (f), dove le componenti delle reazioni vincolari agenti nel medesimo punto di un corpo sono state sommate algebricamente.



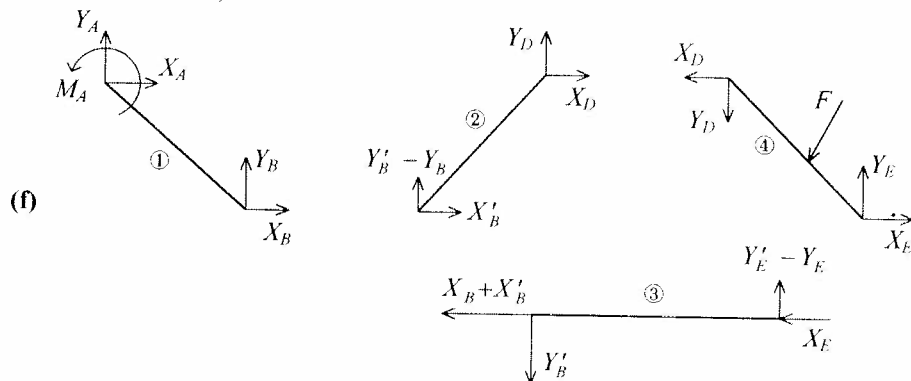
Scrivendo per ciascun corpo tre equazioni di equilibrio si ottiene un sistema di equazioni nelle dodici incognite

$$\mathbf{r} = \{X_A, Y_A, M_A; X_B, Y_B, X'_B, Y'_B; X_D, Y_D; X_E, Y_E, Y''_E\}^T$$

Ad esempio l'annullamento del momento rispetto a D delle forze agenti sul corpo 2 si scrive:

$$-(Y'_B - Y_B)b + X'_B h = 0$$

dove b ed h sono rispettivamente i bracci delle forze $Y'_B - Y_B$ (positiva verso l'alto) ed X'_B (positiva verso destra).



È frequente nelle applicazioni considerare forze direttamente applicate a cerniere, come nella Fig. (a) dell'esercizio 13. Questa schematizzazione, alquanto impropria, appare in contrasto con quanto detto in precedenza, dal momento che le forze attive sono state considerate applicate esclusivamente ai corpi. La forza può essere interpretata come una forza reattiva nota che un altro vincolo, esterno al sistema mostrato in figura, esercita sulla struttura. Un esempio è offerto dall'esercizio precedente, dove il carrello in E applica una reazione vincolare (in quel caso incognita) alla cerniera

esterna che collega i corpi 3 e 4. In questa ottica è possibile pensare \mathbf{P} applicata indifferentemente ad uno dei due (o più) corpi collegati dalla cerniera, così come si è fatto per le reazioni vincolari.

Un modo formalmente più elegante per risolvere il problema consiste nel considerare la cerniera a cui è applicata la forza come un corpo puntiforme collegato da due cerniere ai corpi C_i e C_j (Fig. 18a). Si noti che, in questo modo, la molteplicità del vincolo aumenta di due (le reazioni vincolari passano da due a quattro, Fig. 18b) ma anche il numero delle equazioni di equilibrio aumenta di due, in quanto occorre imporre l'equilibrio del corpo puntiforme. Nel caso trattato deve essere:

$$\begin{aligned} -Y'_D - Y''_D - P &= 0 \\ -X'_D - X''_D &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

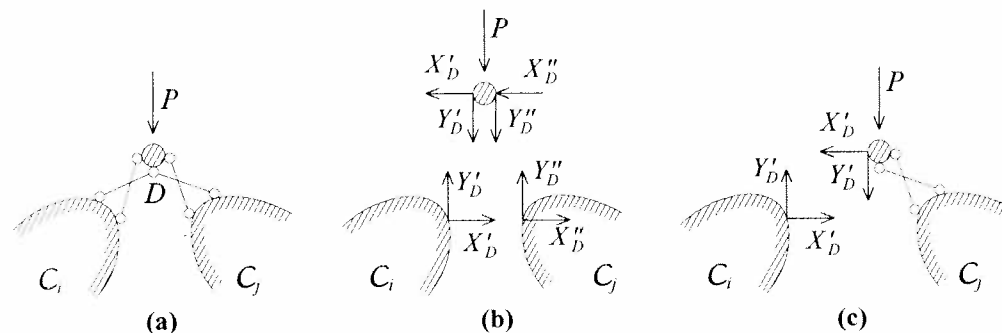


Fig. 18 Forza applicata ad una cerniera

Il procedimento, concettualmente corretto, è però operativamente scomodo, in quanto fa aumentare le dimensioni del problema. Risulta allora più conveniente considerare il corpo puntiforme solidale ad uno dei due corpi, ad esempio C_j , come illustrato in Fig. 18c. In questo caso il corpo C_i scambia con il sistema " C_j più corpo puntiforme" due sole reazioni, X'_D ed Y'_D e le dimensioni del problema rimangono immutate. In questa schematizzazione la forza \mathbf{P} è solidale ad un solo corpo (C_j nell'esempio); si ottiene perciò il risultato precedentemente annunciato. Risolto l'intero problema, si possono utilizzare le equazioni di equilibrio della cerniera per determinare, se d'interesse, le reazioni X''_D ed Y''_D .

- **Osservazione 24.** Se una forza è applicata ad una cerniera che collega due corpi, è indifferente considerarla solidale ad uno dei corpi. Se si risolve due volte il sistema, considerando la forza applicata ora ad un corpo ed ora all'altro, si determinano nella cerniera in questione reazioni vincolari diverse. La differenza, però, è solo apparente in quanto, come illustrato in Fig. 18c, le reazioni sono in un caso X'_D ed Y'_D e nell'altro X''_D ed Y''_D . È comunque possibile, risolto il problema, passare dalle une alle altre utilizzando le (39).

3.5 Sollecitazioni interne

Può essere interessante determinare l'azione meccanica, supposta esclusivamente di contatto, che due parti di un corpo rigido sezionate da un assegnato piano π si scambiano (Fig. 19). L'azione è detta *sollecitazione interna*. Essa è costituita da due sistemi di forze uguali e contrarie distribuite rispettivamente sulle due facce π_1 e π_2 del piano π , staticamente equivalenti ad una forza $\pm \mathbf{F}$ ed una coppia $\pm \mathbf{M}$. Le componenti di \mathbf{F} ed \mathbf{M} in una data base sono dette *caratteristiche della sollecitazione*. Per poterle determinare è necessario modellare il corpo come costituito da *due corpi rigidi*, mutuamente incastrati sul piano π , esplicitando così, come già fatto in cinematica (paragrafo 1.3.6) il vincolo di continuità. Si può quindi dire che le caratteristiche della sollecitazione sono le *reazioni del vincolo di continuità*. Nello spazio, per ciascun piano π , si hanno sei caratteristiche della sollecitazione, tre forze e tre coppie; nel piano, tre caratteristiche della sollecitazione, due forze ed una coppia; in definitiva una caratteristica per ciascun vincolo interno.

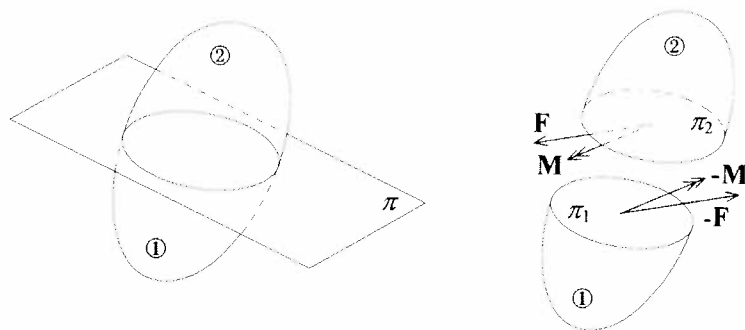


Fig. 19 Sollecitazioni interne

Se il corpo rigido è costituito da una trave, è opportuno far coincidere π con il piano ortogonale alla linea d'asse che contiene una data sezione S e proiettare le sollecitazioni su una terna intrinseca. Con riferimento ad una trave piana rettilinea (Fig. 20), le due componenti di forza, rispettivamente parallela e ortogonale alla linea d'asse, e la coppia sono dette: *sforzo normale* N_S , *sforzo di taglio* T_S e *momento flettente* M_S . Le sollecitazioni sono assunte positive quando le forze e la coppia agenti sulla sezione S_1 , la cui normale uscente è concorde con l'asse x , sono concordi con gli assi.

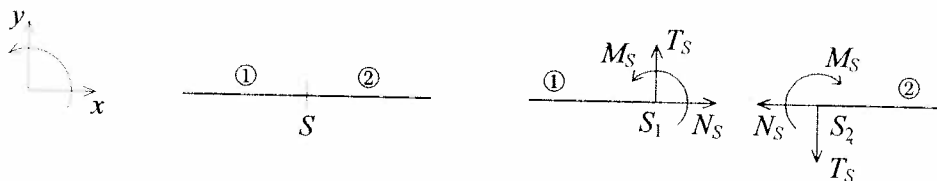


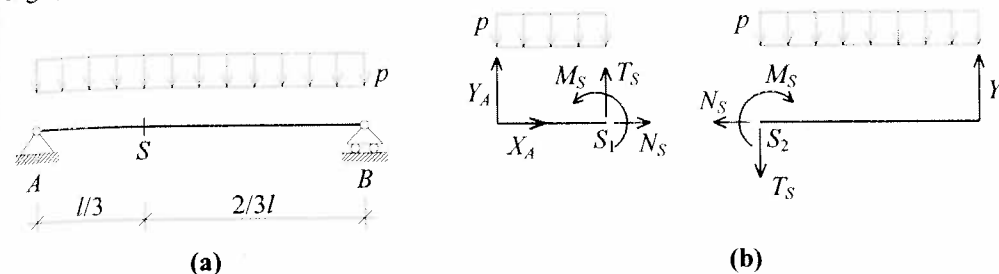
Fig. 20 Sollecitazioni di una trave piana rettilinea

- **Osservazione 25.** In un corpo rigido è possibile determinare solo le caratteristiche globali del sistema di forze di contatto, non la loro distribuzione puntuale. Deter-

minate le sollecitazioni, esistono infatti infinite distribuzioni di forze equilibrate equivalenti: il problema è perciò staticamente indeterminato.

- **Osservazione 26.** Le caratteristiche della sollecitazione sono le grandezze duali delle distorsioni, così come le reazioni vincolari sono le grandezze duali dei cedimenti vincolari.

Esercizio 14: Si determinino le caratteristiche della sollecitazione nella sezione S della trave in Fig. (a).



Si considera la trave AB come costituita da due corpi, $C_1 \equiv AS$ e $C_2 \equiv SB$, mutuamente incastrati in S . Concordemente alla convenzione adottata, si assumono le caratteristiche della sollecitazione in S positive come in fig. (b); il segno delle reazioni vincolari in A e B è invece arbitrario. Per l'equilibrio devono essere soddisfatte le tre equazioni della statica per ciascun corpo; si hanno quindi sei equazioni nelle sei incognite $\mathbf{r} = \{X_A, Y_A, Y_B, N_S, T_S, M_S\}^T$. Quali poli di riduzione delle forze è conveniente scegliere i punti S_1 ed S_2 . Si ha:

$$X_A = 0, \quad Y_A + T_S - p \frac{l}{3} = 0, \quad -Y_A \frac{l}{3} + M_S + p \frac{l^2}{18} = 0$$

$$N_S = 0, \quad Y_B - T_S - \frac{2}{3} pl = 0, \quad Y_B \frac{2}{3} l - M_S - \frac{2}{9} pl^2 = 0$$

Risolvendo si ottiene:

$$X_A = 0, \quad Y_A = p \frac{l}{2}, \quad Y_B = p \frac{l}{2}, \quad N_S = 0, \quad T_S = -p \frac{l}{6}, \quad M_S = p \frac{l^2}{9}$$

Si noti che le reazioni Y_A ed Y_B possono essere più convenientemente ricavate considerando AB come un unico corpo. Una volta determinate le reazioni, le caratteristiche della sollecitazione N_S, T_S, M_S si calcolano imponendo l'equilibrio di uno solo dei due tratti, AS oppure SB .

- **Osservazione 27.** In un sistema isostatico di corpi rigidi, le caratteristiche della sollecitazione possono essere determinate in tutte le sezioni di interesse dopo aver calcolato le reazioni vincolari esterne ed interne, come l'esercizio 14 ha chiarito.
- **Osservazione 28.** Le sollecitazioni sono determinabili in modo univoco, solo se la trave è *monoconnessa*. Infatti, se la trave è *pluriconnessa*, esplicitando il vincolo di continuità non si divide il corpo in due parti, cosicché il numero delle equazioni di equilibrio non aumenta. La trave *pluriconnessa* è quindi staticamente indeterminata per vincoli interni. In cinematica (Osservazione 1.19) era stata riconosciuta essere cinematicamente impossibile per vincoli interni.

4. Metodi strategici di soluzione

La scrittura delle equazioni di equilibrio di un sistema di corpi rigidi è, come si è visto, un'operazione concettualmente semplice. Essa conduce però ad un sistema di equazioni le cui dimensioni possono essere grandi. Ciò non comporta difficoltà di rilievo se si dispone di un mezzo automatico di calcolo ma può essere uno scomodo inconveniente se si procede attraverso una soluzione manuale. Risulta perciò utile sviluppare delle *strategie di soluzione* che, rinunciando all'automatismo del procedimento sin qui descritto, conducano a formulazioni alternative strettamente connesse al problema in esame, ma che richiedano un minore onere computazionale.

Per introdurre il concetto è utile richiamare un algoritmo di Analisi Numerica, detto di triangolarizzazione alla Gauss, utilizzato nella soluzione di sistemi di equazioni lineari di dimensioni $N \times N$, del tipo $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Il metodo, che si assume noto nelle sue linee generali, consiste nel combinare linearmente le equazioni in modo tale da trasformare la matrice dei coefficienti \mathbf{A} , generalmente piena o sparsa, in una matrice triangolare, ad esempio superiore. È possibile allora risolvere l' N -esima equazione che contiene solo l'incognita x_N ; passando alla $(N-1)$ -esima equazione, dove si hanno solo due incognite, x_{N-1} ed x_N , si ricava x_{N-1} , e così via sino a determinare x_1 dalla prima equazione. Si dice che si procede per sostituzione all'indietro.

Si può ovviamente applicare il metodo di Gauss al sistema di equazioni $\mathbf{Br}+\mathbf{f}=0$; l'impegno più grande è comunque quello di triangolarizzare la matrice facendo combinazioni lineari tra le equazioni di equilibrio. Qui si vuole perseguire un obiettivo più ambizioso: *scrivere la matrice di equilibrio direttamente nella forma triangolare o, equivalentemente, risolvere delle equazioni di equilibrio in cui compaia sempre una sola nuova incognita rispetto a quelle sino ad allora determinate*. Detto in altri termini, si cerca di mettere a punto una strategia di scrittura delle equazioni tale che: la prima equazione contenga una sola incognita, e quindi sia immediatamente risolvibile; la seconda equazione contenga eventualmente l'incognita già trovata più una seconda incognita, che possa quindi essere immediatamente determinata; la terza equazione contenga eventualmente le due incognite già trovate più una nuova, e così via.

Per perseguire questa strategia, si ha a disposizione un unico strumento: *scrivere equazioni di equilibrio relative a gruppi di corpi*, anziché a singoli corpi. È possibile perciò raggruppare i corpi a due a due, a tre a tre, etc., ovvero considerare il sistema nella sua globalità. Per ciascuno di questi gruppi di corpi si scrivono tutte, o parte delle equazioni cardinali della statica. Poiché in esse le reazioni dei vincoli interni al gruppo si elidono a due a due è possibile ottenere equazioni in un numero ridotto di incognite. È importante sottolineare che le equazioni che si possono scrivere sono in numero molto maggiore delle reazioni vincolari da determinare. Ciò in quanto *le equazioni non sono tra loro linearmente indipendenti*: esse sono combinazioni lineari delle equazioni cardinali scritte per ciascun corpo, che rappresentano le equazioni fondamentali del problema. Se la strategia ha successo, si è raggiunto l'obiettivo di combinare linearmente in modo diretto le equazioni fondamentali, in modo da triangolarizzare la matrice esattamente come fatto col metodo di Gauss. Nel seguito si presentano applicazioni del metodo limitatamente a problemi piani.

Esercizio 15: Risolvere con il metodo strategico il problema statico dell'esercizio 9.

Le reazioni vincolari sono illustrate in Fig. (b) dello stesso esercizio. Si vede che qualunque equazione di equilibrio, alla traslazione o alla rotazione, sia del corpo 1 che del corpo 2, coinvolge almeno due incognite, cosicché il procedimento non può essere innescato. Tuttavia, se si raggruppano i due corpi, le reazioni vincolari in D si elidono a due a due. Imponendo che la somma delle forze orizzontali sia nulla si ottiene un'equazione nella sola incognita X_B , che può essere subito determinata. Ritornando poi al corpo 2 ed imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto a D si ricava Y_B ; dall'equilibrio alla traslazione si possono poi determinare separatamente X_D ed Y_D . Dall'equilibrio globale in direzione verticale si ricava Y_A e dall'equilibrio alla rotazione intorno ad un qualunque punto, M_A . La strategia può essere sintetizzata in simboli:

$$\begin{aligned} \sum_{1+2} X &= 0 \Rightarrow X_B, \quad \sum_2 M_D = 0 \Rightarrow Y_B, \quad \sum_2 X = 0 \Rightarrow X_D \\ \sum_2 Y &= 0 \Rightarrow Y_D, \quad \sum_{1+2} Y = 0 \Rightarrow Y_A, \quad \sum_{1+2} M(A) = 0 \Rightarrow M_A \end{aligned}$$

Si osservi che così operando non si sono mai scritte condizioni di equilibrio relative al corpo 1. Avendo però imposto l'equilibrio del corpo 2 e dell'intero sistema, anche il corpo 1 è in equilibrio.

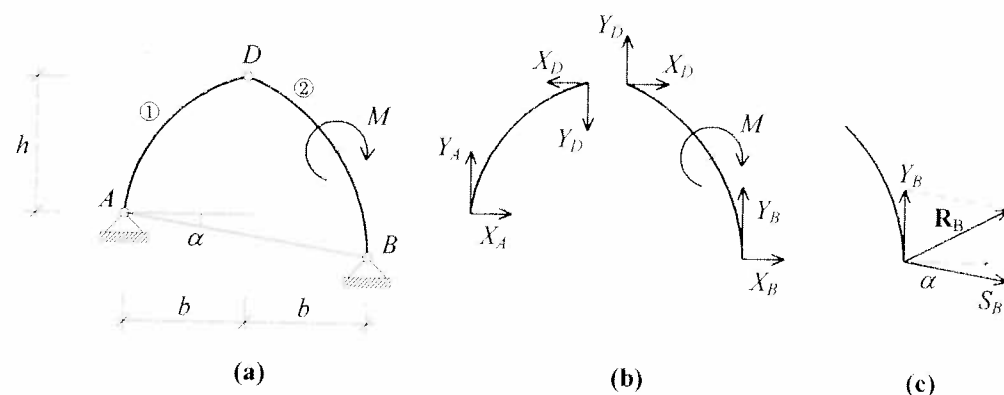
Le equazioni di cui sopra si esplicitano come segue:

$$\begin{aligned} X_B &= 0 & \Rightarrow Y_B &= p \frac{b}{2} + \frac{M}{b} \\ Y_B b - M - p \frac{b^2}{2} &= 0 & \Rightarrow X_D &= 0 \\ X_D + X_B &= 0 & \Rightarrow Y_D &= p \frac{b}{2} - \frac{M}{b} \\ Y_D + Y_B - pb &= 0 & \Rightarrow Y_A &= p \left(a + \frac{b}{2} \right) - \frac{M}{b} \\ Y_A + Y_B - p(a+b) &= 0 & \Rightarrow M_A &= p \frac{a}{2} (a+b) - M \frac{a}{b} \\ M_A - p \frac{a^2}{2} - pb \left(a + \frac{b}{2} \right) + Y_B(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

si riottiene quindi la soluzione dell'esercizio 9. Si noti che, nelle equazioni relative a tutto il sistema, l'intero carico distribuito è stato sostituito con la sua risultante (si veda poi Osservazione 29).

- **Osservazione 29.** Quando si scrivono equazioni di equilibrio relative a gruppi di corpi, è lecito effettuare operazioni di equivalenza statica tra forze applicate a corpi diversi dello stesso gruppo; questo è infatti trattato come un unico corpo rigido. Ciò non è in contrasto con l'Osservazione 12, dove si fa riferimento ad equazioni relative al singolo corpo.
- **Osservazione 30.** Quando si applica un metodo strategico è consigliabile procedere come nell'esercizio 15, cioè mettere prima a punto la strategia e poi sviluppare le equazioni. La metodologia permette così di separare la fase concettuale da quella più strettamente operativa, con indiscutibili vantaggi in termini di efficienza.

Esercizio 16: Impostare la strategia di soluzione del sistema in Fig. (a).



Si tratta di un arco a tre cerniere, nel gergo detto “zoppo”, in quanto le cerniere A e B non sono a livello. Si vede subito che (Fig. b), se $\alpha \neq 0$, anche scrivendo equazioni relative all'intero sistema, non si riesce ad ottenere un'equazione in una sola incognita. Il caso $\alpha=0$ è infatti un caso particolare nel quale, imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto ad A , si ottiene un'equazione nella sola incognita Y_B , in quanto il braccio di X_B è nullo. Tuttavia anche se $\alpha \neq 0$ è possibile superare l'inconveniente semplicemente scomponendo la reazione \mathbf{R}_B come indicato in Fig. (c). La componente S_B ha ora braccio nullo rispetto ad A ed il procedimento può essere innescato. Una possibile strategia è la seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2} M_A = 0 &\Rightarrow Y_B, \quad \sum_2 M_D = 0 \Rightarrow S_B, \quad \sum_2 X = 0 \Rightarrow X_D \\ \sum_2 Y = 0 &\Rightarrow Y_D, \quad \sum_1 X = 0 \Rightarrow X_A, \quad \sum_1 Y = 0 \Rightarrow Y_A \end{aligned}$$

- **Osservazione 31.** L'esercizio 16 ha mostrato che, mettendo in atto opportuni accorgimenti, è spesso possibile utilizzare la strategia di sopra. Tuttavia altrettanto spesso questi accorgimenti hanno elevati costi computazionali (ad esempio scomposizioni non ortogonali delle forze) che possono rendere svantaggiosa l'operazione. È allora conveniente rinunciare a scrivere la prima equazione in una sola incognita e accontentarsi di scrivere *due equazioni in due incognite*, per poi eventualmente proseguire con equazioni in una sola incognita (si veda in proposito l'esercizio seguente).

Esercizio 17: Impostare la strategia di soluzione del sistema dell'esercizio 16, assumendo le incognite in fig. (b).

Come detto nell'Osservazione 31 basta ricercare due equazioni indipendenti nelle stesse due incognite. Si ha:

$$\begin{cases} \sum_{i=2} M(A) = 0 \\ \sum_2 M(D) = 0 \end{cases} \Rightarrow (X_B, Y_B)$$

È poi possibile proseguire come nell'esercizio 16.

3

Dualità dei problemi cinematico e statico. Il teorema dei lavori virtuali

1. La dualità

1.1 Aspetti geometrici e dinamici

I problemi di congruenza e di equilibrio di un sistema di corpi rigidi sono stati formulati nei due capitoli precedenti in modo indipendente. Il primo è infatti un *problema geometrico*, basato sulle proprietà di invarianza delle distanze tra i punti materiali del corpo e sulla condizione di appartenenza di alcuni di essi a regioni dello spazio ambiente. Il secondo è invece un *problema dinamico*, basato sulle condizioni di equilibrio di corpi sollecitati da forze esterne. Tuttavia si è già sottolineato il fatto che la caratterizzazione statica dei vincoli è subordinata alle loro proprietà cinematiche; inoltre, le stesse equazioni cardinali sono state dedotte nella Meccanica Razionale come condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio grazie proprio alla condizione di rigidità del corpo. In definitiva si è fatto uso in modo implicito di nozioni di cinematica nella formulazione del problema della statica, sia riguardo i vincoli esterni che quello interno di rigidità del corpo. Conseguentemente, i due problemi, a dispetto della loro differente natura, sono in stretta relazione, e per questo sono detti duali.

Il legame è sintetizzato da una proprietà di simmetria che prende il nome di *proprietà di dualità*, già constatata nell'Osservazione (2.20) relativamente a problemi specifici, e qui dimostrata e discussa in generale, prima con riferimento ad un singolo corpo e poi ad un sistema di corpi.

1.2 Il singolo corpo rigido

Si consideri dapprima, per semplicità di scrittura, un sistema costituito da un unico corpo rigido, vincolato in modo generico. Poiché i vincoli, come si è visto, sono equivalenti a un sistema di bielle e/o di bipendoli, ci si può riferire, senza perdita di generalità, ad un corpo vincolato con m vincoli semplici del tipo suddetto. La Fig. 1 schematizza il sistema nel problema cinematico (Fig. 1a) e nel problema statico (Fig. 1b) nell'ipotesi che siano presenti i soli vincoli di biella; l'eventuale presenza di bipendoli viene considerata nell'Osservazione 4.

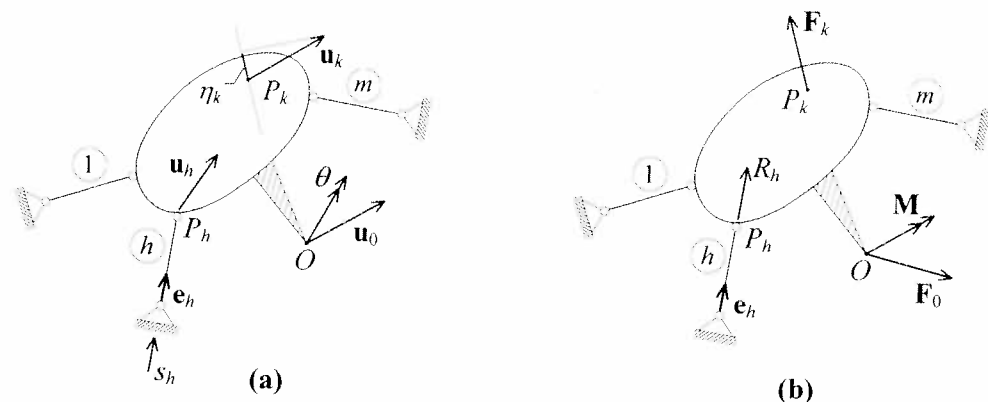


Fig. 1 (a) il problema cinematico, (b) il problema statico per un sistema costituito da un solo corpo

Si richiamano alcuni risultati acquisiti circa i due problemi.

a) Il problema cinematico (Fig. 1a) si pone in questi termini: *assegnati i cedimenti vincolari s_h ($h=1,2,\dots,m$) determinare il campo degli spostamenti $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}_{P_k}$. Stante il vincolo interno di rigidità, gli spostamenti \mathbf{u}_k sono funzione dei soli spostamenti generalizzati \mathbf{u}_0 e θ (FGSR):*

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \theta \times \mathbf{OP}_k \quad (1)$$

Il problema è governato dalle equazioni di vincolo:

$$\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_h = s_h \quad (2)$$

dove $\mathbf{u}_h \equiv \mathbf{u}_{P_h}$, ed \mathbf{e}_h è il versore dell' h -esima biella, applicata in P_h . Un campo di spostamenti rigidi che soddisfa le (1) e (2) è detto *campo di spostamento congruente con i dati cedimenti vincolari*.

b) Il problema statico (Fig. 1b) si pone in questi termini: *assegnate le forze attive \mathbf{F}_k ($k=1,2,\dots$) determinare le reazioni vincolari R_h ($h=1,2,\dots,m$). Stante il vincolo interno di rigidità, la sollecitazione attiva è funzione delle sole forze attive generalizzate \mathbf{F}_0 ed \mathbf{M} :*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \sum_k \mathbf{F}_k \\ \mathbf{M} &= \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k \end{aligned} \quad (3)$$

Il problema è governato dalle equazioni cardinali della statica:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^m \mathbf{R}_h + \mathbf{F}_0 &= \mathbf{0} \\ \sum_{h=1}^m \mathbf{OP}_h \times \mathbf{R}_h + \mathbf{M} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Per il postulato dei vincoli le reazioni vincolari \mathbf{R}_h sono:

$$\mathbf{R}_h = R_h \mathbf{e}_h \quad (5)$$

Un sistema di reazioni vincolari che rispetta le (3)-(5) è detto *sistema reattivo equilibrato con le date forze attive*.

- **Osservazione 1.** Le (1) e (3) traducono delle operazioni duali che sono state dette di *riduzione ad un polo*, rispettivamente degli spostamenti e delle forze attive. Le grandezze relative al polo O però, appaiono in un caso a secondo membro e nell'altro a primo membro. Questa circostanza traduce il fatto che, nel caso delle forze, assegnate le \mathbf{F}_k , a queste si associano univocamente le grandezze generalizzate; nel caso degli spostamenti, noti \mathbf{u}_0 e θ , da questi si determinano univocamente gli spostamenti dei punti di interesse. Le operazioni inverse, invece, non sono univoche; nel caso delle forze il problema è indeterminato (in quanto esistono infiniti sistemi di forze equivalenti ad \mathbf{F}_0 ed \mathbf{M}) e nel caso degli spostamenti è impossibile (non si possono infatti assegnare ad arbitrio gli \mathbf{u}_k in un numero arbitrario di punti).

- **Osservazione 2.** Il problema cinematico è governato dalle (2) (caratterizzazione cinematica del vincolo) in cui gli spostamenti \mathbf{u}_h sono espressi dalla (1) (FGSR). Il problema statico è governato dalle (4) (equazioni cardinali della statica) in cui le \mathbf{R}_h sono espresse dalle (5) (caratterizzazione statica del vincolo). Nel primo caso la singola condizione di compatibilità (relativa alla biella h -esima) è espressa in funzione delle sei grandezze di spostamento generalizzato; nel secondo caso la singola reazione vincolare (relativa alla biella h -esima) fornisce un contributo alle sei grandezze di forza vincolare generalizzate. Questo meccanismo è alla base delle proprietà di dualità (Eq. 2.28), come apparirà immediatamente chiaro.

Si assuma ora che, in accordo alla Fig. 1, siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

- 1) i poli di riduzione O di spostamenti e forze sono gli stessi nei due problemi;
- 2) la base è la stessa nei due problemi;
- 3) i vincoli sono numerati nello stesso modo nei due problemi e cedimenti e reazioni positivi sono equiversi.

Vale allora la seguente (prima) proprietà di dualità: *la matrice di equilibrio e la matrice di congruenza sono l'una la trasposta dell'altra,*

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{A} \quad (6)$$

La dimostrazione si effettua per ispezione diretta delle due matrici.

a) *Matrice di congruenza.* Utilizzando la (1), le (2) si scrivono:

$$s_h = (\mathbf{u}_0 + \theta \times \mathbf{OP}_h) \cdot \mathbf{e}_h = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_h + \mathbf{OP}_h \times \mathbf{e}_h \cdot \theta \quad (7)$$

avendo permutato circolarmente i fattori del prodotto misto. Ricordando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= u_0 \mathbf{i} + v_0 \mathbf{j} + w_0 \mathbf{k} \\ \theta &= \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_h &= \alpha_h \mathbf{i} + \beta_h \mathbf{j} + \gamma_h \mathbf{k} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{OP}_h \times \mathbf{e}_h = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_h & y_h & z_h \\ \alpha_h & \beta_h & \gamma_h \end{vmatrix}$$

con $P_h \equiv (x_h, y_h, z_h)$, le (7) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_h & \beta_h & \gamma_h & y_h \gamma_h - z_h \beta_h & z_h \alpha_h - x_h \gamma_h & x_h \beta_h - y_h \alpha_h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ s_h \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (9)$$

La matrice dei coefficienti $m \times 6$ delle equazioni (9) è la matrice di congruenza \mathbf{A} .
b) *Matrice di equilibrio.* Sostituendo le (5) nelle (4) si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^m R_h \mathbf{e}_h + \mathbf{F}_0 &= \mathbf{0} \\ \sum_{h=1}^m R_h \mathbf{OP}_h \times \mathbf{e}_h + \mathbf{M} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

Ricordando le (8₃), (8₄) e che:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= X_0 \mathbf{i} + Y_0 \mathbf{j} + Z_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{M} &= M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (11)$$

le (10), proiettate sugli assi, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \dots & \alpha_h & \dots \\ \dots & \beta_h & \dots \\ \dots & \gamma_h & \dots \\ \dots & y_h \gamma_h - z_h \beta_h & \dots \\ \dots & z_h \alpha_h - x_h \gamma_h & \dots \\ \dots & x_h \beta_h - y_h \alpha_h & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ R_h \\ \dots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

La matrice dei coefficienti $6 \times m$ nelle equazioni (12) è la matrice di equilibrio \mathbf{B} . Dal confronto delle (9) e (12) si evince la proprietà di dualità (6).

- **Osservazione 3.** Le ipotesi 1) e 2) circa la coincidenza dei poli di riduzione di spostamenti e forze, e circa la scelta della base, sono essenziali affinché valga la dualità tra il problema cinematico e statico. L'ipotesi 3), invece, pure necessaria, assicura solo che le righe di \mathbf{A} sono ordinate come le colonne di \mathbf{B} ; se non è soddisfatta, \mathbf{A} e \mathbf{B}^T contengono gli stessi elementi ma hanno righe scambiate.
- **Osservazione 4.** La dualità vale anche se nel sistema sono presenti dei bipendoli. Le equazioni di vincolo corrispondenti risultano della forma:

$$\theta \cdot \mathbf{e}_h = s_h \quad (s_h := \phi_h)$$

mentre le prestazioni statiche associate sono del tipo:

$$\mathbf{R}_h = R_h \mathbf{e}_h \quad (R_h := M_h)$$

avendo indicato con h il numero d'ordine del bipendolo in questione e con \mathbf{e}_h il versore ortogonale al piano cui il bipendolo appartiene. Ricordando le (8₂) e (11₂) le equazioni (9) e (12) assumono nell'ordine la forma duale:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_h & \beta_h & \gamma_h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ s_h \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \alpha_h & \dots \\ \dots & \beta_h & \dots \\ \dots & \gamma_h & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ R_h \\ \dots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- **Osservazione 5.** La proprietà di dualità traduce una relazione di eguaglianza tra una riga della matrice \mathbf{A} (cioè dei coefficienti della combinazione lineare che esprime la componente di spostamento s_h in funzione degli spostamenti generalizzati) ed una colonna di \mathbf{B} (cioè del contributo della reazione R_h alle forze reattive generalizzate). Questa proprietà vale evidentemente anche quando la forza è di tipo attivo, ad esempio F_k , e lo spostamento è quello del punto di applicazione della forza nella direzione della forza medesima, ad esempio η_k (Fig. 1a). Infatti, osservato che per η_k ed F_k valgono relazioni formalmente analoghe alle (2) e (5)

$$\eta_k = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{F}_k = F_k \mathbf{e}_k$$

in base alle (1) e (2.12) si può porre:

$$\eta_k = \mathbf{a}_k^T \mathbf{u}, \quad \mathbf{f} = \sum_k \mathbf{b}_k F_k$$

con $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k$ dato da:

$$\mathbf{a}_k = \{\alpha_k \quad \beta_k \quad \gamma_k \quad y_k \gamma_k - z_k \beta_k \quad z_k \alpha_k - x_k \gamma_k \quad x_k \beta_k - y_k \alpha_k\}^T$$

\mathbf{a}_k è detto *vettore di influenza su η_k degli spostamenti generalizzati* e \mathbf{b}_k *vettore di riduzione al polo della forza \mathbf{F}_k* .

1.3 I sistemi di corpi rigidi

Le considerazioni fin qui fatte si generalizzano facilmente ai sistemi costituiti da più corpi rigidi. La Fig. 2 schematizza un sistema di n_c corpi nel problema cinematico (Fig. 2a) e nel problema statico (Fig. 2b) in presenza di soli vincoli di biella.

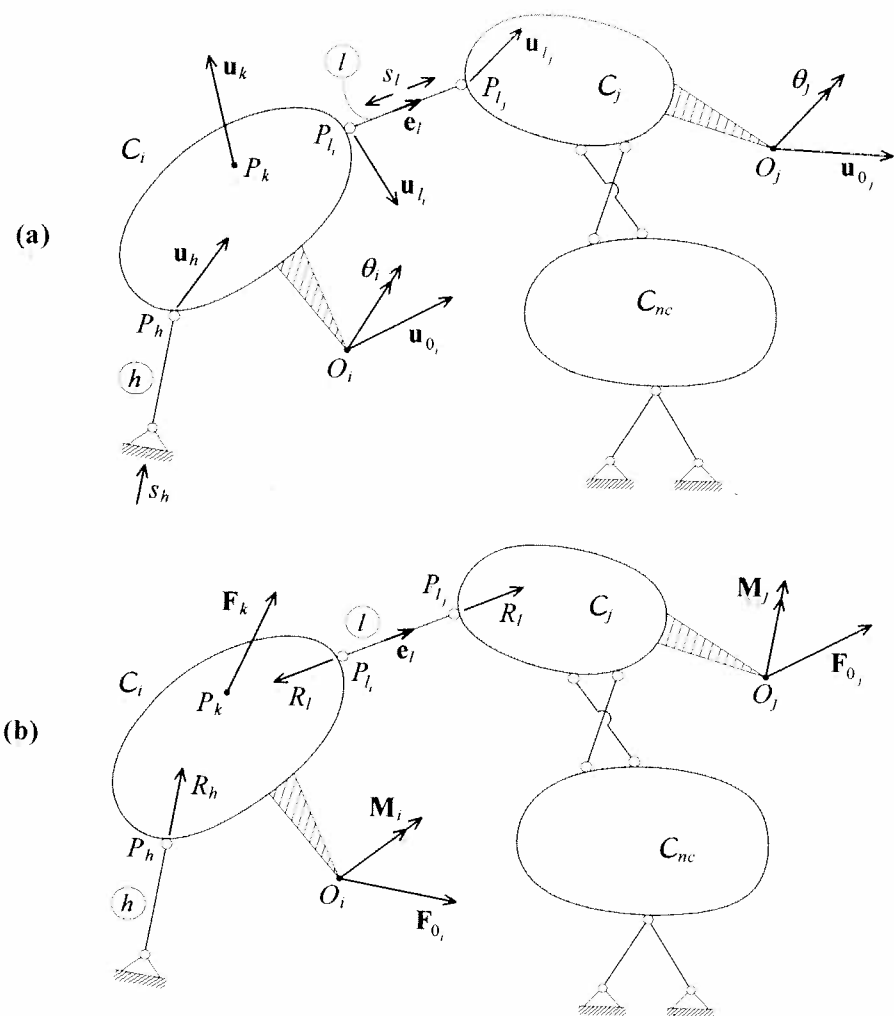


Fig. 2 (a) il problema cinematico, (b) il problema statico per un sistema costituito da n_c corpi rigidi

Alle ipotesi 1)÷3) si aggiunge la seguente:

4) i corpi sono numerati nello stesso modo nei due problemi.

Le equazioni (1), (3) e (4) vanno ora scritte per ciascun corpo C_i . Le equazioni (2) e (5) sono relative ai soli vincoli esterni; per quanto riguarda i vincoli interni, le equazioni di vincolo sono:

$$(\mathbf{u}_{l_j} - \mathbf{u}_{l_i}) \cdot \mathbf{e}_l = s_l \quad (13)$$

e le reazioni associate:

$$\mathbf{R}_{l_j} = R_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{R}_{l_i} = -R_l \mathbf{e}_l \quad (14)$$

Le equazioni di congruenza del sistema hanno conseguentemente questa struttura:

$$\begin{aligned} \text{vincolo } h &\rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{a}_{hi}^T & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\mathbf{a}_{li}^T & 0 & \mathbf{a}_{lj}^T & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{u}_i \\ \dots \\ \mathbf{u}_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ s_h \\ \dots \\ s_l \\ \dots \end{bmatrix} \\ \text{vincolo } l &\rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{u}_i \\ \dots \\ \mathbf{u}_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ s_h \\ \dots \\ s_l \\ \dots \end{bmatrix} \quad (15)$$

e quelle di equilibrio:

$$\begin{aligned} \text{corpo } i &\rightarrow \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_{hi} & \dots & -\mathbf{a}_{li} & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \mathbf{a}_{lj} & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ R_h \\ \dots \\ R_l \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{f}_i \\ \dots \\ \mathbf{f}_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \end{bmatrix} \\ \text{corpo } j &\rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ R_h \\ \dots \\ R_l \\ \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{f}_i \\ \dots \\ \mathbf{f}_j \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

in cui:

$$\mathbf{u}_i = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T; \quad \mathbf{f}_i = \{X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}\}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{a}_{rs} = \{\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, y_r \gamma_r - z_r \beta_r, z_r \alpha_r - x_r \gamma_r, x_r \beta_r - y_r \alpha_r\}_s^T \quad r = h, l; \quad s = i, j$$

dove l'indice s denota il riferimento $O_s x_s y_s z_s$ in cui sono calcolate le coordinate ed i coseni direttori. Nella (15) l'equazione relativa al vincolo esterno h è la stessa dell'equazione (9); nella (16) il contributo della reazione vincolare esterna R_h all'equilibrio del corpo C_i è il medesimo dell'equazione (12). L'equazione relativa al vincolo interno di numero d'ordine l contiene termini analoghi, associati però agli spostamenti generalizzati dei due corpi vincolati; il contributo della reazione interna R_l è analogo a quello della reazione esterna, ma compare (con segni opposti) sia nelle equazioni di equilibrio del corpo C_i che in quelle del corpo C_j .

Si conclude che, anche per sistemi costituiti da più corpi, vale la proprietà di dualità espressa dalla (6).

• **Osservazione 6.** Se l'ipotesi (4) circa la numerazione dei corpi non è soddisfatta, \mathbf{A} e \mathbf{B}^T hanno colonne scambiate.

• **Osservazione 7.** In presenza di bipendoli le equazioni di vincolo interno sono:

$$(\theta_{l_j} - \theta_{l_i}) \cdot \mathbf{e}_l = s_l \quad s_l := \phi_l$$

e le reazioni associate:

$$\mathbf{R}_{l_j} = R_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{R}_{l_i} = -R_l \mathbf{e}_l; \quad R_l := M_l$$

Le equazioni di congruenza e di equilibrio hanno ancora la forma (15) e (16), dove però il vettore \mathbf{a}_{rs} è:

$$\mathbf{a}_{rs} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_r \quad \beta_r \quad \gamma_r\}_s^T; \quad r = h, l; \quad s = i, j$$

1.4 Altre proprietà di dualità: sistemi impossibili e indeterminati

Dalla prima proprietà di dualità (Eq. 6) discendono altre due notevoli relazioni che legano la matrice delle autosoluzioni di un problema indeterminato, di equilibrio o di congruenza, alla matrice di solvibilità del problema duale. Queste relazioni sono già state rilevate nell'Osservazione 2.22 con riferimento a degli esempi, e sono qui dimostrate in generale. In sede di classificazione cinematica e statica dei sistemi (Paragrafi 1.3.3 e 2.3.2) si sono determinate le seguenti relazioni.

(a) Sistemi staticamente indeterminati/cinematicamente impossibili.

Il problema statico ammette infinite soluzioni (Eq. 2.31)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \chi \quad (18)$$

mentre il problema cinematico ammette soluzione solo se i cedimenti vincolari soddisfano la condizione di compatibilità cinematica (Eq. 1.45)

$$\mathbf{Q} \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (19)$$

Nelle (18), (19) è

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (20)$$

dove \mathbf{B}_1 e \mathbf{A}_1 sono sottomatrici quadrate di rango massimo rispettivamente di \mathbf{B} ed \mathbf{A} . Se si partizionano le due matrici nello stesso modo (facendo cioè corrispondere righe di \mathbf{A}_1 e colonne di \mathbf{B}_1), stante la dualità $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ è anche $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1^T$, $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2^T$ cosicché è

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \quad (21)$$

La (21) è detta seconda proprietà di dualità (o dei sistemi iperstatici). Essa stabilisce che la matrice di compatibilità cinematica (o di congruenza esplicita) \mathbf{Q} è la trasposta della matrice delle autoreazioni \mathbf{R} .

(b) Sistemi cinematicamente indeterminati/staticamente impossibili.

Il problema cinematico ammette infinite soluzioni (Eq. 1.42)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U} \mathbf{q} \quad (22)$$

mentre il problema statico ammette soluzione solo se le forze soddisfano la condizione di compatibilità statica (Eq. 2.34)

$$\mathbf{V} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Nelle (22), (23) è

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Se \mathbf{A}_1 e \mathbf{B}_1 sono partizioni corrispondenti di \mathbf{A} e \mathbf{B} , essendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ è anche $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^T$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2^T$, da cui

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^T \quad (25)$$

La (25) è detta terza proprietà di dualità (o dei sistemi labili). Essa stabilisce che la matrice di compatibilità della statica \mathbf{V} è la trasposta della matrice modale \mathbf{U} .

Le relazioni precedenti possono essere sintetizzate nel seguente quadro.

	Cinematica $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{s}$	Statica $\mathbf{A}^T \mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$
Sistemi indeterminati	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U} \mathbf{q}$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \chi$
Sistemi impossibili	$\mathbf{R}^T \mathbf{s} = \mathbf{0}$	$\mathbf{U}^T \mathbf{f} = \mathbf{0}$

2. Il teorema dei lavori virtuali

2.1 Il lavoro virtuale

Un aspetto della dualità dei problemi cinematico e statico è rappresentato dal teorema dei lavori virtuali, che costituisce uno strumento, sia concettuale che operativo, di grande importanza. In esso si considera il lavoro che le forze agenti nel problema statico (Fig. 1b e 2b) compiono negli spostamenti che si verificano nel problema cinematico duale (Fig. 1a, 2a). A questo lavoro si dà l'attributo di *virtuale*, volendo sottolineare il fatto che, non esistendo alcun nesso di causa ed effetto tra i due problemi, non si tratta di un lavoro effettivamente compiuto dalle forze, bensì di una grandezza fittizia, non avente significato fisico. Nel seguito si dimostra il teorema, prima per un singolo corpo rigido, poi per un sistema di corpi. I vincoli considerati sono solo di biella; va da sé l'estensione al caso in cui siano presenti anche dei bipendoli.

2.2 Il singolo corpo rigido

Il lavoro virtuale che le forze attive \mathbf{F}_k (Fig. 1a) compiono negli spostamenti \mathbf{u}_k dei loro punti di applicazione (Fig. 1a) è, per definizione,

$$L_a = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_k \quad (26)$$

Poiché il campo degli spostamenti è rigido (è cioè rispettoso della congruenza interna)

si può esprimere \mathbf{u}_k in termini degli spostamenti generalizzati (Eq. 1); si ha quindi

$$\begin{aligned} L_a &= \sum_k \mathbf{F}_k \cdot (\mathbf{u}_0 + \theta \times \mathbf{OP}_k) \\ &= \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_0 + \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k \cdot \theta \\ &= \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{M} \cdot \theta \end{aligned} \quad (27)$$

avendo prima permutato circolarmente i fattori del prodotto misto e poi utilizzato le (3). Dalla (27) si evince la seguente proprietà: *il lavoro virtuale compiuto da un sistema di forze (attive) in un campo di spostamenti rigido è uguale al lavoro virtuale compiuto dalle forze generalizzate negli spostamenti generalizzati associati*. In altri termini il lavoro virtuale può indifferentemente essere espresso in termini di grandezze effettive (il dato sistema di forze negli spostamenti corrispondenti) o di grandezze ridotte ad un polo (le forze e gli spostamenti generalizzati).

- **Osservazione 8.** Perché il lavoro virtuale delle forze attive possa essere espresso in termini di grandezze generalizzate i poli di riduzione delle forze e degli spostamenti devono essere gli stessi. Le grandezze devono cioè essere associate nel senso dei lavori virtuali.
- **Osservazione 9.** Se, come caso particolare, il sistema di forze attive è equivalente a zero (è cioè $\mathbf{F}_0=0$, $\mathbf{M}=0$) il lavoro virtuale attivo è nullo, anche se le singole forze che costituiscono il sistema compiono lavoro virtuale diverso da zero.

Esercizio 1: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si calcoli il lavoro virtuale compiuto dalle forze attive p nel campo di spostamento conseguente ad una rotazione θ intorno ad A . Si mostri che il lavoro è uguale a quello compiuto dalle forze stesse ridotte al polo B oppure A .

Il lavoro compiuto dalla forza elementare $dF=p dx$ è $dL_a = p dx v(x)$; integrando, poiché $v(x) = \theta x$ (Fig. (b), si ha:

$$L_a = \int_0^l p \cdot v(x) dx = p \theta \int_0^l x dx = p \theta \frac{l^2}{2}$$

La distribuzione di forze equivale ad un'unica forza $P=pl$ applicata alla retta verticale per B . Essa compie lavoro

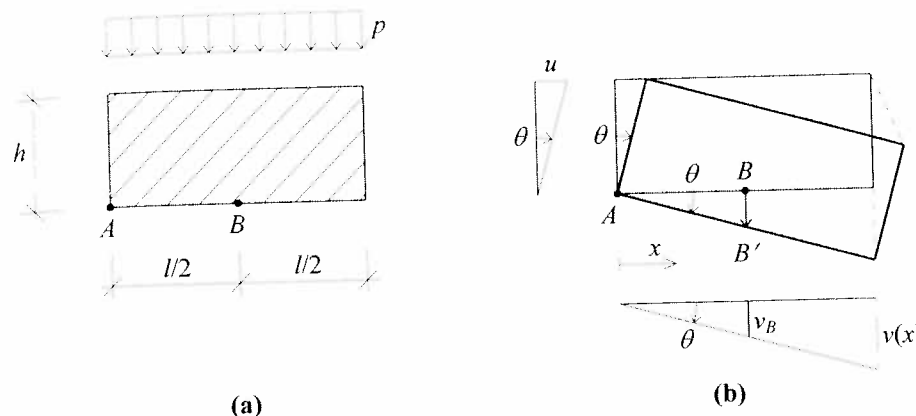
$$L_a = P \cdot v(l/2) = pl \cdot \theta \frac{l}{2}$$

uguale a quello prima calcolato.

Se si trasporta la risultante P in A si ha anche un momento di trasporto (orario) $M = Pl/2$. Il lavoro virtuale si calcola come somma dei lavori compiuto dalla forza e dalla coppia

$$L_a = P \cdot v(0) + M \cdot \theta = P \cdot 0 + p \frac{l^2}{2} \theta$$

Si ottiene ancora lo stesso valore.



Si vuole ora dimostrare il seguente **Teorema dei lavori virtuali (TLV)**: *il lavoro virtuale che un sistema di forze esterne equilibrate (attive e vincolari) compie in un campo di spostamenti rigido compatibile con dati cedimenti vincolari è uguale a zero*. Nelle ipotesi quindi che valgano le (1)÷(2) (spostamenti congruenti) e le (3)÷(5) (forze equilibrate) è

$$L_e = L_a + L_v = 0 \quad (28)$$

avendo espresso il lavoro delle forze esterne L_e nella somma dei lavori delle forze attive L_a e vincolari L_v .

Per dimostrare il teorema si sostituiscono le equazioni cardinali (4) e la definizione (5) delle reazioni vincolari nell'espressione (27) del lavoro delle forze attive. Si ha:

$$\begin{aligned} L_a &= - \sum_{h=1}^m (\mathbf{R}_h \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{OP}_h \times \mathbf{R}_h \cdot \theta) \\ &= - \sum_{h=1}^m (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_h + \theta \times \mathbf{OP}_h \cdot \mathbf{e}_h) R_h \\ &= - \sum_{h=1}^m \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_h R_h \\ &= - \sum_{h=1}^m R_h s_h \\ &= -L_v \end{aligned} \quad (29)$$

avendo permutato circolarmente i fattori del prodotto misto e avendo usato le (1) e (2). La (28) è così dimostrata.

2.3 I sistemi di corpi rigidi

I risultati sin qui ottenuti per il singolo corpo rigido vincolato si generalizzano facilmente ai sistemi di corpi rigidi, quali quello in Fig. 2. Il lavoro virtuale delle forze attive si ottiene sommando il lavoro compiuto dalle forze agenti sui singoli corpi. Quindi, utilizzando la (1) scritta per il generico corpo C_i si ha:

$$\begin{aligned}
L_a &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_k \right)_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{u}_0 + \sum_k \mathbf{OP}_k \times \mathbf{F}_k \cdot \boldsymbol{\theta} \right)_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_{0_i} \cdot \mathbf{u}_{0_i} + \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\theta}_i \right)
\end{aligned} \quad (30)$$

che generalizza la (27). Sostituendo nella (30) le equazioni di equilibrio (4) relative al corpo C_i e utilizzando la caratterizzazione statica dei vincoli (5) si ha:

$$\begin{aligned}
L_a &= - \sum_{i=1}^n \sum_r \left(\mathbf{R}_r \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{OP}_r \times \mathbf{R}_r \cdot \boldsymbol{\theta} \right)_i \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_r \left[(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}_r \cdot \mathbf{e}_r) R_r \right]_i \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_r (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{e}_r R_r)_i
\end{aligned} \quad (31)$$

dove si è fatto uso della (1) scritta per il corpo C_i . Nella (31) la sommatoria di indice r va estesa a tutti i vincoli effettivamente applicati a C_i . Complessivamente si hanno $m_e + 2m_i$ termini, in quanto si hanno m_e reazioni vincolari esterne e $2m_i$ reazioni vincolari interne, uguali a due a due. Distinguendo i contributi, dalla (31) si ha:

$$\begin{aligned}
L_a &= - \sum_{h=1}^{m_e} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{e}_h R_h - \sum_{l=1}^{m_i} (\mathbf{u}_{l_j} - \mathbf{u}_{l_i}) \cdot \mathbf{e}_l R_l \\
&= - \sum_{h=1}^{m_e} R_h s_h - \sum_{l=1}^{m_i} R_l s_l
\end{aligned} \quad (32)$$

avendo prima richiesto la caratterizzazione statica del vincolo (esterno) (5) ed (interno) (14) e avendo poi usato le equazioni di vincolo (esterno) (2) ed (interno) (13). La (32) generalizza la (29). Il teorema dei lavori virtuali (28) è quindi dimostrato anche per un generico sistema di corpi rigidi.

2.4 L'identità bilineare

Del teorema dei lavori virtuali può darsi una dimostrazione alternativa, molto sintetica, valida per un generico sistema di corpi, utilizzando la notazione matriciale anziché quella vettoriale. Il problema cinematico è governato dalle (1) e (2) che, in forma matriciale, si scrivono:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (33)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \{u_{0_1} \quad v_{0_1} \quad w_{0_1} \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \quad \theta_{z_1}; \dots; u_{0_{nc}} \quad v_{0_{nc}} \quad w_{0_{nc}} \quad \theta_{x_{nc}} \quad \theta_{y_{nc}} \quad \theta_{z_{nc}}\}^T \\
\mathbf{s} &= \{s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_m\}^T
\end{aligned} \quad (34)$$

Il problema statico è governato dalle (3)÷(5) che, in forma matriciale, si scrivono:

$$\mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (35)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \{R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m\}^T \\
\mathbf{f} &= \{X_{0_1} \quad Y_{0_1} \quad Z_{0_1} \quad M_{x_1} \quad M_{y_1} \quad M_{z_1}; \dots; X_{0_{nc}} \quad Y_{0_{nc}} \quad Z_{0_{nc}} \quad M_{x_{nc}} \quad M_{y_{nc}} \quad M_{z_{nc}}\}^T
\end{aligned} \quad (36)$$

Stante l'Osservazione 5, il lavoro virtuale delle forze attive può scriversi come

$$L_a = \sum_k F_k \eta_k = \sum_k F_k \mathbf{a}_k^T \mathbf{u} = \sum_k F_k \mathbf{b}_k^T \mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (37)$$

da cui, sostituendo le (33) e (35) e facendo uso delle proprietà di dualità (6) si ha:

$$L_a = -\mathbf{r}^T \mathbf{B}^T \mathbf{u} = -\mathbf{r}^T \mathbf{A}\mathbf{u} = -L_v \quad (38)$$

Il teorema è così dimostrato. Dalle (37) e (38) segue:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u} + \mathbf{r}^T \mathbf{s} = 0 \quad (39)$$

• **Osservazione 10.** Questa dimostrazione del teorema fa uso in modo esplicito delle proprietà (6) $\mathbf{B}^T = \mathbf{A}$, cosicché il teorema appare essere una sua conseguenza. In realtà si è visto che la dualità (6) e il teorema dei lavori virtuali sono *due conseguenze indipendenti delle equazioni fondamentali* (1)÷(5). Così, se le ipotesi 1)÷4) dei Paragrafi 1.2 e 1.3 sono soddisfatte, sono verificate sia la dualità che il teorema dei lavori virtuali; se invece le ipotesi non sono soddisfatte, non sono verificati né la dualità né il teorema dei lavori virtuali.

• **Osservazione 11.** È possibile dare un'interpretazione notevole della (39) (si veda anche l'Appendice A.4). È noto che in algebra due problemi lineari

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{A}^T \mathbf{y} &= \mathbf{c}
\end{aligned} \quad (40)$$

sono detti *aggiunti*. Per essi vale l'identità bilineare

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0 \quad (41)$$

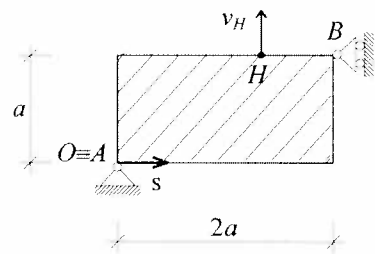
che si ottiene premoltiplicando la (40₁) per \mathbf{y}^T , la (40₂) per \mathbf{x}^T e poi sottraendo membro a membro.

Stante la dualità, il problema cinematico (33) e il problema statico (35) sono *aggiunti*; il TLV (39) rappresenta l'identità bilineare del problema.

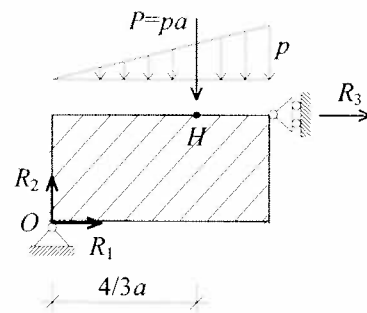
Esercizio 2: Con riferimento ai sistemi di Fig. (a) e (b) si verifichi la validità del TLV.

Il sistema è già stato studiato negli esercizi 1.9 e 2.7. Le equazioni di congruenza sono

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$



(a)



(b)

e quelle di equilibrio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -pa \\ -4pa^2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Risolvendo le (a) si ottengono gli spostamenti compatibili:

$$u_0 = s, \quad v_0 = 0, \quad \theta = s/a \quad (c)$$

In particolare:

$$v_H = v_0 + \theta \frac{4}{3}a = \frac{4}{3}s \quad (d)$$

Risolvendo le (b) si ottiene lo stato reattivo equilibrato:

$$R_1 = \frac{4}{3}P, \quad R_2 = P, \quad R_3 = -\frac{4}{3}P \quad (e)$$

Il lavoro virtuale delle forze attive è:

$$L_a = -Pv_H = -\frac{4}{3}Ps \quad (f)$$

Il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è:

$$L_v = R_1s = \frac{4}{3}Ps \quad (g)$$

Il TLV è soddisfatto.

2.5 I corollari del teorema dei lavori virtuali

Si è visto che, se le equazioni di congruenza e di equilibrio sono soddisfatte, vale il TLV. È possibile mostrare anche che, se è soddisfatto un solo gruppo di equazioni (di congruenza o di equilibrio) ed inoltre è soddisfatta l'equazione dei lavori virtuali (28), anche l'altro gruppo di equazioni è soddisfatto. In altre parole la congruenza, l'equilibrio e il TLV rappresentano tre aspetti del problema di cui solo due sono indipendenti: studiati due di essi il terzo è una conseguenza. Si dimostrano quindi i se-

guenti due corollari del TLV. In essi, è opportuno attribuire ad uno dei due problemi il significato di *problema reale* (quello che si vuole realmente risolvere) e all'altro di *problema virtuale* (quello che si introduce per poter applicare il TLV). Così le grandezze implicate vengono dette grandezze reali (\mathbf{f} , \mathbf{r} oppure \mathbf{u} , \mathbf{s}) e grandezze virtuali ($\delta\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{s}$ oppure $\delta\mathbf{f}$, $\delta\mathbf{r}$).

1° Corollario (degli spostamenti virtuali). Se un sistema di forze attive e vincolari (\mathbf{f} , \mathbf{r}) compie lavoro nullo in ogni campo virtuale di spostamenti e cedimenti vincolari congruente ($\delta\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{s}$), il sistema di forze è equilibrato.

2° Corollario (delle forze virtuali). Se un campo di spostamenti e cedimenti vincolari (\mathbf{u} , \mathbf{s}) è tale che ogni sistema virtuale di forze equilibrato ($\delta\mathbf{f}$, $\delta\mathbf{r}$) compie in esso lavoro nullo, il campo di spostamenti è congruente.

I corollari si dimostrano come segue. Nelle ipotesi del primo corollario è:

$$L_e = \mathbf{f}^T \delta\mathbf{u} + \mathbf{r}^T \delta\mathbf{s} = 0 \quad \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{s}) | \mathbf{A} \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{s} \quad (42)$$

Sostituendo a $\delta\mathbf{s}$ la sua espressione e ricordando che $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$, si ha:

$$L_e = (\mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{f})^T \delta\mathbf{u} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (43)$$

da cui \mathbf{r} ed \mathbf{f} sono equilibrati (Eq. 35). Nelle ipotesi del secondo corollario è:

$$L_e = \delta\mathbf{f}^T \mathbf{u} + \delta\mathbf{r}^T \mathbf{s} = 0 \quad \forall (\delta\mathbf{f}, \delta\mathbf{r}) | \mathbf{B} \delta\mathbf{r} + \delta\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (44)$$

Sostituendo a $\delta\mathbf{f}$ la sua espressione e ricordando che $\mathbf{B}^T = \mathbf{A}$, si ha:

$$L_e = \delta\mathbf{r}^T (\mathbf{s} - \mathbf{A}\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{r} \quad (45)$$

da cui \mathbf{u} ed \mathbf{s} sono congruenti (Eq. 33).

• **Osservazione 12.** Tenuto conto del TLV e dei suoi corollari può affermarsi che: CNES per l'equilibrio di un sistema di forze esterne è che esso compia lavoro virtuale nullo per ogni campo di spostamento e cedimenti vincolari congruenti; CNES per la congruenza di un campo di spostamenti e cedimenti vincolari è che ogni sistema di forze attive e vincolari equilibrato compia in esso lavoro virtuale nullo.

• **Osservazione 13.** I due corollari del TLV rappresentano uno strumento operativo importante. Il primo corollario stabilisce che le equazioni di equilibrio di un dato problema (reale) possono essere ottenute dal TLV imponendo la congruenza del campo (virtuale) di spostamenti; *in questo modo un problema di equilibrio può essere trasformato in un problema cinematico*. In modo duale, il secondo corollario stabilisce che le equazioni di congruenza di un dato problema (reale) possono essere ottenute dal TLV imponendo l'equilibrio del sistema (virtuale) di forze; *in questo modo un problema cinematico può essere trasformato in un problema di equilibrio*.

- **Osservazione 14.** Se il sistema è cinematicamente/staticamente determinato le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} sono invertibili. Così nella (42) è $\delta \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{s}$ che, sostituite nella equazione dei lavori virtuali, fornisce

$$\delta \mathbf{s}^T (\mathbf{r} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{s} \quad (46)$$

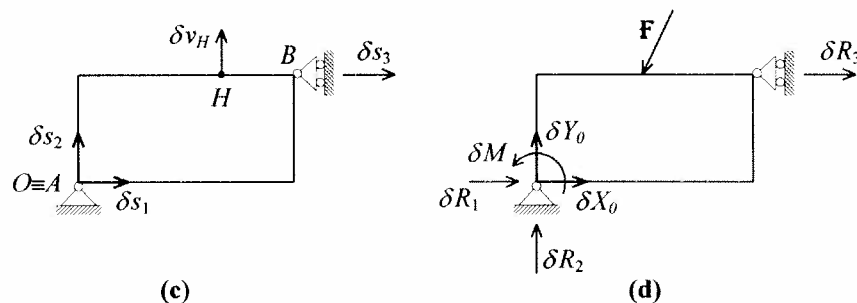
da cui $\mathbf{r} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}$; si ricavano così le reazioni vincolari. In modo duale, nella (44) è $\delta \mathbf{r} = -\mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{f}$ che, sostituita nell'equazione dei lavori virtuali, fornisce

$$\delta \mathbf{f}^T (\mathbf{u} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{f} \quad (47)$$

da cui $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s}$; si ricavano così gli spostamenti generalizzati. Questo metodo è alla base dei procedimenti di calcolo sviluppati nei Paragrafi 3.1 e 3.2. Un esempio è mostrato qui di seguito.

Esercizio 3: Si applichi la metodologia dell'Osservazione 14 al sistema cinematicamente/staticamente determinato dell'Esercizio 2.

Le Fig. (a) e (b) dell'Esercizio 2 rappresentano due (particolari) problemi reali. Accanto a questi occorre considerare i problemi virtuali duali, in cui tutti i termini noti (cedimenti vincolari e forze attive generalizzate) sono diversi da zero. Questi sono rappresentati nelle seguenti Fig. (c) e (d)¹, dove δX_0 , δY_0 e δM sono le forze attive \mathbf{F} ridotte al polo O .



- a) **Problema statico.** Si vuole risolvere in modo indiretto il problema statico (reale) in Fig. (b) risolvendo invece il problema cinematico (virtuale) in Fig. (c). L'equazione dei lavori virtuali (42) si scrive:

$$L_e = -P \delta v_H + R_1 \delta s_1 + R_2 \delta s_2 + R_3 \delta s_3 = 0 \quad \forall \delta v_H, \delta s_h \text{ congruenti} \quad (h)$$

Le grandezze cinematiche virtuali δv_H e δs_h ($h=1,2,3$) (Fig. c) soddisfano le equazioni di congruenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \\ \delta \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta s_1 \\ \delta s_2 \\ \delta s_3 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

Risolvendo si ottiene:

$$\delta u_0 = \delta s_1, \quad \delta v_0 = \delta s_2, \quad \delta \theta = (\delta s_1 - \delta s_3)/a \quad (l)$$

ed in particolare:

$$\delta v_H = \delta v_0 + \frac{4}{3} a \delta \theta = \delta s_2 + \frac{4}{3} (\delta s_1 - \delta s_3) \quad (m)$$

Sostituendo δv_H nell'equazione dei lavori virtuali si ha:

$$L_e = \left(R_1 - \frac{4}{3} P \right) \delta s_1 + (R_2 - P) \delta s_2 + \left(R_3 + \frac{4}{3} P \right) \delta s_3 = 0, \quad \forall \delta s_h \quad (n)$$

Dovendosi separatamente annullare i coefficienti di δs_h si ottengono le reazioni vincolari (e).

- b) **Problema cinematico.** Si vuole risolvere in modo indiretto il problema cinematico (reale) in Fig. (a), risolvendo invece il problema statico (virtuale) in Fig. (d). L'equazione dei lavori virtuali (44) si scrive:

$$L_e = \delta X_0 u_0 + \delta Y_0 v_0 + \delta M \theta + \delta R_1 s = 0, \quad \forall \delta X_0, \delta Y_0, \delta M, \delta R_1 \text{ equilibrate} \quad (o)$$

Le grandezze statiche virtuali δR_h (Fig. d) soddisfano le equazioni di equilibrio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta R_1 \\ \delta R_2 \\ \delta R_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (p)$$

Risolvendo si ottiene:

$$\delta R_1 = -\delta X_0 - \delta M/a, \quad \delta R_2 = -\delta Y_0, \quad \delta R_3 = \delta M/a \quad (q)$$

Sostituendo δR_1 nell'equazione dei lavori virtuali, si ha:

$$L_e = \delta X_0 (u_0 - s) + \delta Y_0 v_0 + \delta M (\theta - s/a) = 0 \quad \forall \delta X_0, \delta Y_0, \delta M \quad (r)$$

Dovendosi annullare separatamente i coefficienti delle forze generalizzate, seguono le (c).

3. Applicazioni del teorema dei lavori virtuali

3.1 Reazioni vincolari e sollecitazioni di sistemi staticamente determinati

Come si è detto nell'Osservazione 13, un problema (reale) di equilibrio può essere trasformato in un problema (virtuale) di congruenza applicando il TLV. Se il sistema è staticamente determinato si può applicare il procedimento descritto nell'Osservazione 14 e ricavare le reazioni vincolari incognite così come si è fatto nell'Esercizio 3(a). Ovviamente l'onere computazionale non diminuisce rispetto ad un approccio diretto, perché invece di invertire la matrice \mathbf{B} è necessario invertire la matrice \mathbf{A} . Il metodo, comunque, può risultare vantaggioso quando si vogliono calcolare non tutte le reazioni \mathbf{r} ma solo alcune di esse. In tal caso, non è necessario assegnare al sistema virtuale il più generale sistema di cedimenti vincolari $\delta \mathbf{s}$, come fatto nell'Esercizio 3(a), ma

¹ La numerazione di figure e formule è sequenziale a quella dell'esercizio 2.

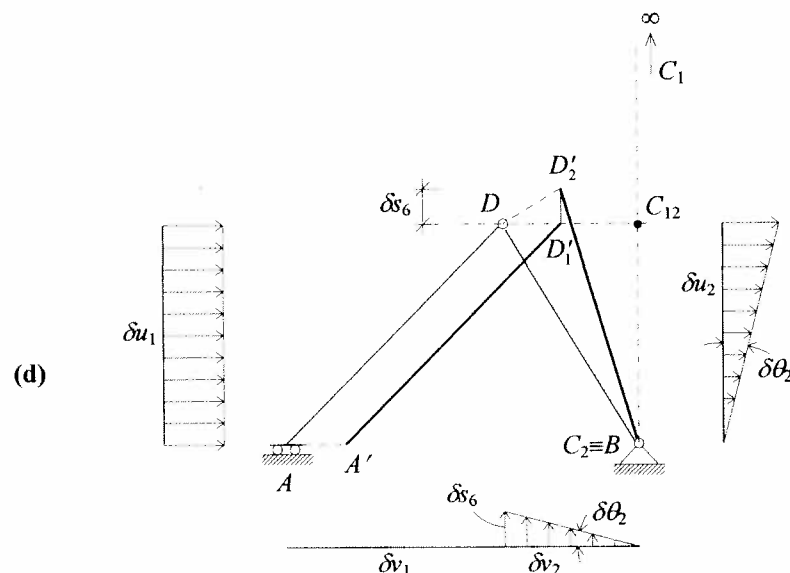
Utilizzando le (f), l'ELV si scrive

$$\left(Y_D - p \frac{b}{2} + \frac{M}{b}\right) \delta s_6 = 0 \quad \forall \delta s_6 \quad (g)$$

da cui

$$Y_D = p \frac{b}{2} - \frac{M}{b} \quad (h)$$

Agli stessi risultati si perviene ovviamente sostituendo le (c) ed (f) nell'ELV (b), ed uguagliando separatamente a zero i coefficienti di δs_2 e δs_6 .



- **Osservazione 15.** L'Esercizio 4 ha mostrato che, se si vogliono determinare p reazioni vincolari, basta procedere per sovrapposizione di effetti, assegnando al sistema virtuale un cedimento vincolare per volta. Peraltro, poiché l'ampiezza dei cedimenti è arbitraria, è possibile assegnare ad essi un valore convenzionale, ad esempio unitario. Così, per determinare una reazione vincolare esterna si assegna uno spostamento (o rotazione) virtuale assoluto uguale ad 1; per determinare una reazione vincolare interna si assegna uno spostamento (o rotazione) virtuale relativo uguale ad 1; per determinare una sollecitazione interna si assegna una distorsione virtuale uguale ad 1. I tre esempi che seguono chiariscono il procedimento.

Esercizio 5: Sullo stesso schema dell'Esercizio 4 si calcoli la reazione $R_1 \equiv Y_A$.

Con riferimento all'Osservazione 15, assegnando al punto A un abbassamento unitario $\delta s_1=1$ ed assunto per la reazione Y_A un valore positivo se diretta verso l'alto, l'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$-Y_A - p a v'_E - p b v'_F - M \theta'_2 = 0$$

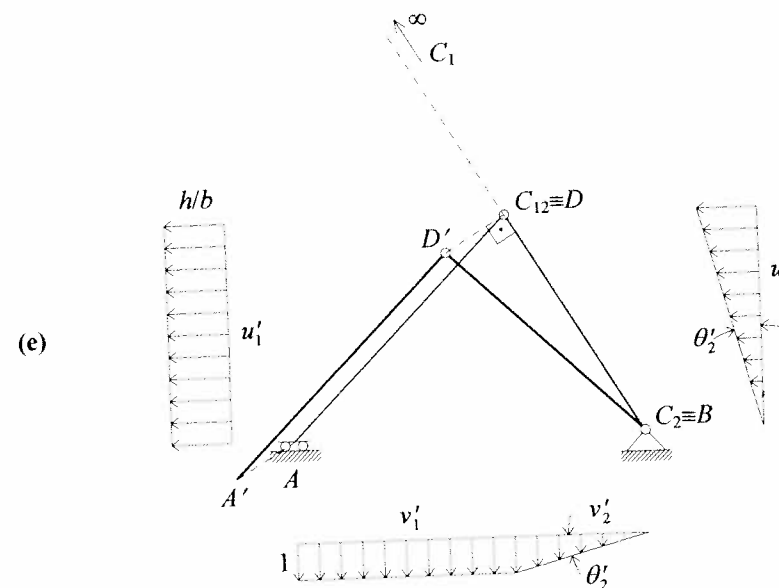
dove l'apice vuole ricordare che gli spostamenti in questione sono associati ad un cedimento

unitario. Dall'analisi della cinematica (Fig. e) si ha:

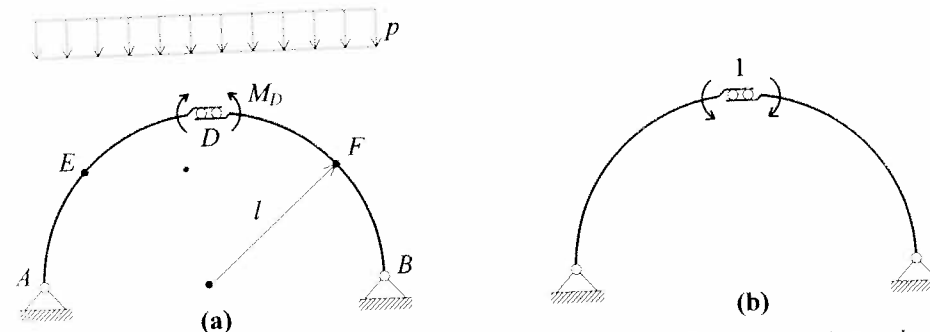
$$v'_E = -1, \quad v'_F = -\frac{1}{2}, \quad \theta'_2 = \frac{1}{b}$$

per cui l'ELV fornisce

$$Y_A = p \left(a + \frac{b}{2}\right) - M \frac{1}{b}$$



Esercizio 6: Con riferimento allo schema in Fig. (a) si calcoli il momento M_D .



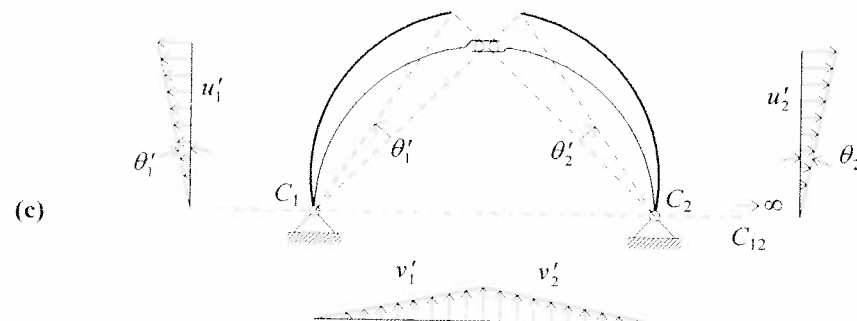
Adottando quale sistema virtuale quello di Fig. (b), la soluzione del problema cinematico associato (Fig. c) fornisce:

$$\theta'_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta'_2 = -\frac{1}{2}$$

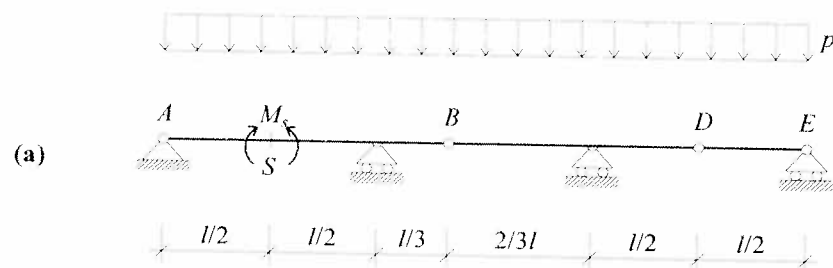
da cui l'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$M_D = -p l v'_E - p l v'_F = -p \frac{l^2}{2}$$

avendo indicato con E ed F i punti medi dei semiarchi (Fig. a).



Esercizio 7: Si calcoli il momento flettente nella sezione S della struttura di Fig. (a).

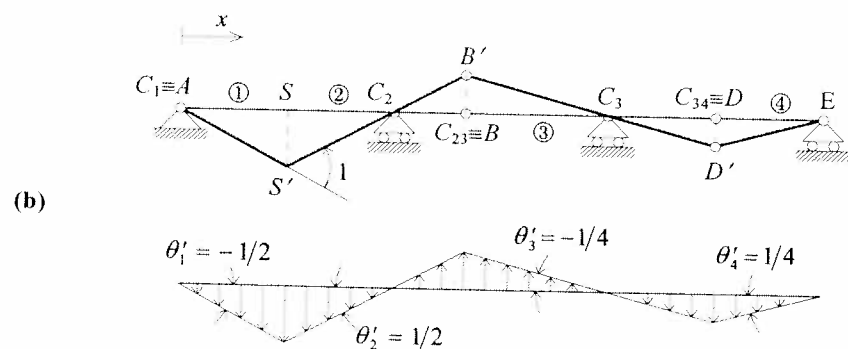


Assegnando nella sezione S una distorsione angolare unitaria, l'assetto variato della struttura è quello di Fig. (b). Detti $C_1 \equiv AS$, $C_2 \equiv SB$, $C_3 \equiv BD$, $C_4 \equiv DE$ i corpi coinvolti nel cinemismo (Fig. b), l'equazione dei lavori virtuali si scrive

$$M_S \cdot 1 - p \left(\int_0^{l/2} v_1' dx + \int_{l/2}^{2l/3} v_2' dx + \int_{2l/3}^{l} v_3' dx + \int_l^{3l/2} v_4' dx \right) = 0$$

da cui si ottiene:

$$M_S = \frac{5}{12} pl^2$$

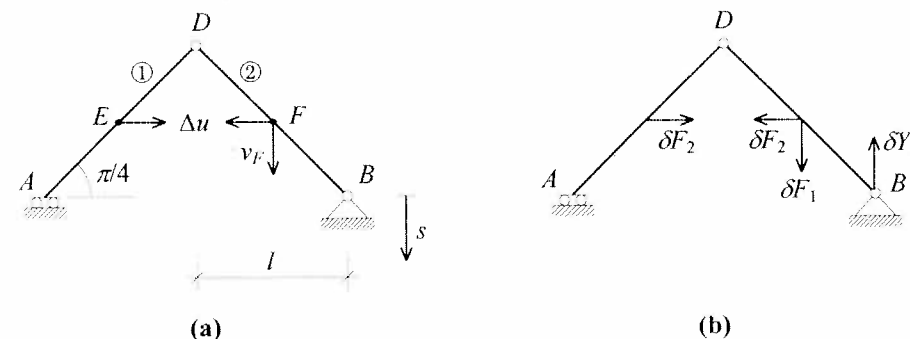


3.2 Spostamenti di sistemi cinematicamente determinati

Del procedimento descritto nel Par. 3.1 può darsi una versione duale. Se si vogliono calcolare gli spostamenti di un sistema cinematicamente determinato compatibili con cedimenti vincolari e/o distorsioni assegnate (problema reale), applicando il TLV si può invece risolvere un problema (virtuale) di equilibrio. L'Osservazione 14 e l'Esercizio 3(b) hanno descritto il procedimento; in esso, in luogo dell'inversione della matrice \mathbf{A} è richiesta l'inversione della matrice \mathbf{B} . Il metodo risulta effettivamente vantaggioso quando si vogliono calcolare non tutti gli spostamenti generalizzati \mathbf{u} , ma soltanto alcuni di essi. In tal caso non è necessario applicare al sistema virtuale il più generale sistema di forze $\delta \mathbf{f}$ come fatto nell'esercizio 3(b), ma *basta applicare le sole forze $\delta X_0, \delta Y_0, \delta M_i$ associate alle incognite u_0, v_0, θ_i che si vogliono determinare*. Così, ad esempio, nello stesso esercizio 3(b), applicando solo la coppia $\delta M \neq 0$, con $\delta X_0 = \delta Y_0 = 0$, l'equazione dei lavori virtuali (r) fornisce immediatamente la rotazione θ . È opportuno sottolineare che il TLV fornisce gli spostamenti (reali) dei punti di applicazione delle forze (virtuali); *può quindi essere conveniente applicare le forze direttamente ai punti di interesse invece che calcolare prima gli spostamenti generalizzati*. Il procedimento risulta particolarmente vantaggioso se il numero delle componenti di spostamento da determinare è piccolo e se è possibile determinare, utilizzando ad esempio un metodo strategico, le sole reazioni vincolari che compiono lavoro virtuale non nullo nei cedimenti reali. Nelle applicazioni si procede come segue:

- I. Si applicano al sistema le forze attive δF_k ($k=1,2,\dots,p$) associate ai p spostamenti u_k da determinare.
- II. Si determina lo stato reattivo $\delta \mathbf{r} = \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{f}$ equilibrato con le forze attive; questo dipende dai p parametri arbitrari δF_k .
- III. Si impone che valga l'equazione dei lavori virtuali per ogni δF_k ; si ottengono così p equazioni, ciascuna contenente una diversa incognita u_k .

Esercizio 8: Con riferimento al problema cinematico di Fig. (a) si calcoli lo spostamento relativo Δu tra i punti E ed F (positivo se di avvicinamento) nonché l'abbassamento v del punto F .



Ai fini della soluzione del problema si assume lo schema virtuale di Fig. (b). In modo duale a quanto fatto nell'esercizio 4, anche in questo caso, è possibile operare per sovrapposizione degli effetti. Detto infatti $\delta Y_B^{(j)}$ ($j=1,2$) la reazione virtuale in B associata alla forza δF_j l'ELV

$$\delta F_1 v_F + \delta F_2 \Delta u - \delta Y_B s = 0 \quad \forall \delta F_1, \delta F_2 \quad (a)$$

si scrive:

$$(\delta F_1 v_F - \delta Y_B^{(1)} s) + (\delta F_2 \Delta u - \delta Y_B^{(2)} s) = 0 \quad \forall \delta F_1, \delta F_2 \quad (b)$$

Osservato che $\delta Y_B^{(j)}$ dipende linearmente da δF_j , segue che il lavoro virtuale compiuto dalla singola forza δF_j nel corrispondente spostamento incognito eguaglia quello che la reazione vincolare ad esso associata compie nel cedimento vincolare assegnato. Questo consente di calcolare ogni spostamento incognito indipendentemente dagli altri: ciò si ottiene scrivendo l'ELV in cui lo stato equilibrato virtuale è quello derivante dall'applicazione della forza δF_j associata (nel senso del lavoro) allo spostamento incognito che si desidera valutare.

Ad esempio, ai fini del calcolo di v_F , applicando la sola forza δF_1 (Fig. c) si ha

$$\sum_{i=1,2} \delta X^{(1)} = 0 \Rightarrow \delta X_B^{(1)} = 0 \quad (c)$$

$$\sum_2 \delta M_D^{(1)} = 0 \Rightarrow \delta Y_B^{(1)} = \frac{1}{2} \delta F_1$$

Lo stato di reazione completo è illustrato in Fig. (d). L'equazione dei lavori virtuali:

$$-\delta Y_B^{(1)} s + \delta F_1 v_F = 0 \quad (d)$$

fornisce:

$$v_F = \frac{s}{2} \quad (e)$$

Analogamente, per il calcolo di Δu , facendo riferimento allo schema di carico in Fig. (e), le equazioni di equilibrio strettamente necessarie al calcolo di $\delta Y_B^{(2)}$ si scrivono:

$$\sum_{i=1,2} \delta X^{(2)} = 0 \Rightarrow \delta X_B^{(2)} = 0 \quad (f)$$

$$\sum_2 \delta M_D^{(2)} = 0 \Rightarrow \delta Y_B^{(2)} = \frac{1}{2} \delta F_2$$

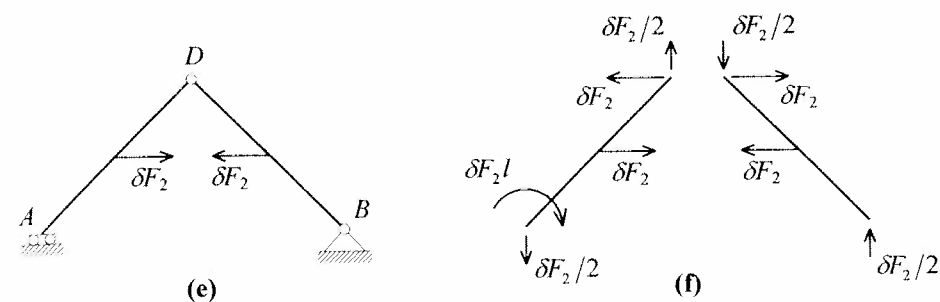
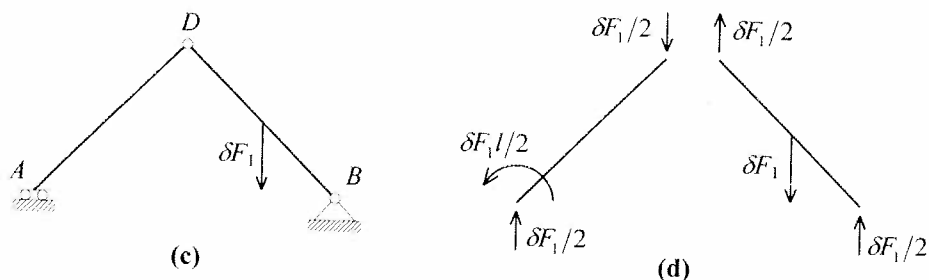
Lo stato di reazione completo è illustrato in Fig. (f). L'equazione dei lavori virtuali,

$$-\delta Y_B^{(2)} s + \delta F_2 \Delta u = 0 \quad (g)$$

tenendo conto della (f₂), fornisce:

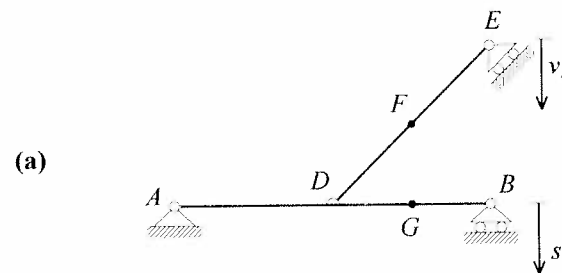
$$\Delta u = \frac{s}{2} \quad (h)$$

Agli stessi risultati si perviene ovviamente sostituendo le (c₂) e (f₂) nella (a) ed uguagliando separatamente a zero i coefficienti di δF_1 e δF_2 .



- **Osservazione 16.** L'Esercizio 8 ha mostrato che, se si vogliono determinare p spostamenti, basta procedere per sovrapposizione degli effetti, applicando al sistema virtuale una forza attiva per volta. Peraltro, poiché l'intensità della forza è arbitraria, è possibile assegnare ad essa un valore convenzionale, ad esempio unitario. Così, per determinare uno spostamento assoluto si applica una forza (o coppia) virtuale uguale ad 1; per determinare uno spostamento relativo tra due punti si applicano ai due punti due forze (o coppie) virtuali uguali ad 1 ed opposte. I due esempi che seguono chiariscono il procedimento.

Esercizio 9: Si calcoli l'abbassamento v_E del sistema in Fig. (a).



Si considera il sistema virtuale in Fig. (b). Occorre calcolare la reazione virtuale Y'_B (ossia la reazione che compie lavoro nel cedimento assegnato s) conseguente all'applicazione della forza unitaria applicata in E (Fig. b). Con riferimento alle notazioni di Fig. (c) (dove si sono indicate con l'apice le grandezze derivanti dall'applicazione della forza unitaria) le equazioni di equilibrio strettamente necessarie al calcolo di Y'_B si scrivono:

$$\sum_2 M'_D = 0 \Rightarrow R'_E = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

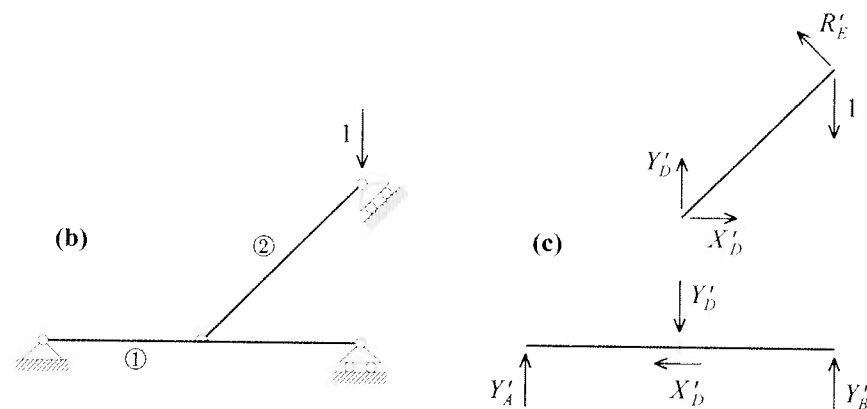
$$\sum_{i=1,2} M'_A = 0 \Rightarrow Y'_B = \frac{1}{4}$$

L'equazione dei lavori virtuali è

$$1 \cdot v_E - Y'_B s = 0$$

Sostituendo ad Y'_B il valore trovato, si ha

$$v_E = \frac{1}{4} s$$



Esercizio 10: Sullo stesso schema dell'esercizio 9 si calcoli lo spostamento relativo tra F e G .

Indicato con Δv lo spostamento richiesto, positivo se di avvicinamento, lo schema virtuale associato risulta quello di Fig. (d). Con riferimento alle notazioni di Fig. (e) le equazioni di equilibrio strettamente necessarie alla valutazione di Y'_B risultano:

$$\sum_2 M'_D = 0 \Rightarrow R'_E = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

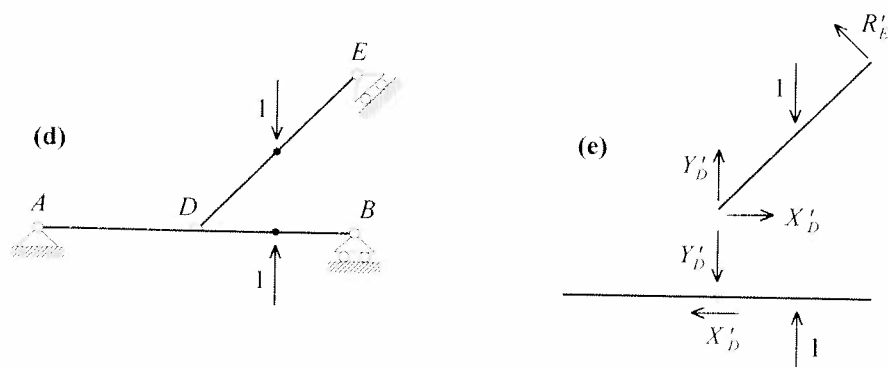
$$\sum_{1+2} M'_A = 0 \Rightarrow Y'_B = \frac{3}{8}$$

L'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$1 \cdot \Delta v - Y'_B s = 0$$

da cui, sostituendo ad Y'_B il valore trovato, si ottiene:

$$\Delta v = \frac{3}{8} s.$$



3.3 Sistemi cinematicamente/staticamente impossibili

Si è già visto (Par. 1.3.3, 2.3.2) che se il sistema è cinematicamente (staticamente) impossibile il problema cinematico (statico) ammette soluzione solo per particolari cedimenti vincolari (forze attive). Le condizioni sotto cui il problema algebrico, di forma non normale, ammette egualmente soluzione sono dettate dal teorema di Rouché-Capelli (Par. 1.3.2), una particolare forma del quale è espressa dall'Osservazione 1.15. Quest'ultima, alla luce del TLV, è suscettibile di una notevole interpretazione meccanica.

a) *Sistemi cinematicamente impossibili.*

Si consideri dapprima un sistema (reale) cinematicamente impossibile. Il sistema (virtuale) duale è staticamente indeterminato, cosicché esistono infiniti stati virtuali equilibrati; in particolare, anche in assenza di forze attive $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$, esistono infiniti stati reattivi autoequilibrati $\delta \mathbf{r}_x$, tali che $\mathbf{B} \delta \mathbf{r}_x = \mathbf{0}$. Per il secondo corollario del TLV gli spostamenti sono compatibili se²

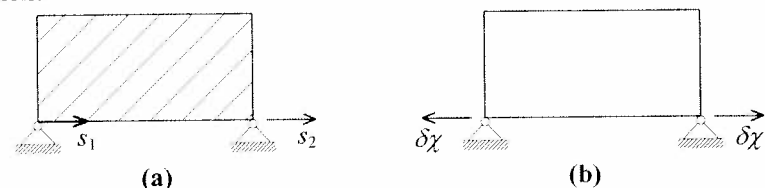
$$L_v = \delta \mathbf{r}_x^T \mathbf{s} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}_x | \mathbf{B} \delta \mathbf{r}_x = \mathbf{0} \quad (48)$$

essendo $L_a = 0$. Dunque, un problema cinematicamente impossibile è risolubile se, e solo se, i cedimenti vincolari sono tali che il più generale stato reattivo autoequilibrato compie in essi lavoro virtuale nullo. La (48) non è altro che la già citata condizione di solvibilità dell'Osservazione 1.15, che discende direttamente dall'identità bilineare (si veda l'Osservazione 11). Ricordando che (Eq. 18) $\delta \mathbf{r}_x = \mathbf{R} \delta \chi$, la (48) si scrive (si veda anche l'Appendice A.4)

$$\delta \chi^T \mathbf{R}^T \mathbf{s} = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (49)$$

da cui seguono le condizioni di solvibilità (19) $\mathbf{R}^T \mathbf{s} = \mathbf{0}$, in accordo alla seconda proprietà di dualità (21).

Esercizio 11: Si determinino le condizioni sotto le quali il problema cinematico in Fig. (a) ammette soluzione.



Si tratta del sistema già studiato negli esercizi 1.13 e 2.10. Il più generale stato reattivo virtuale è rappresentato in Fig. (b) (da confrontare con la Fig. (d) dell'esercizio 2.10); in esso le reazioni orizzontali sono uguali e di segno opposto, mentre quelle verticali sono nulle. L'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$(s_2 - s_1) \delta \chi = 0 \quad \forall \delta \chi$$

da cui la condizione di compatibilità è $s_1 = s_2$, come già trovato nell'esercizio 1.13. Si noti che,

² Questa forma del TLV è anche detta in letteratura *teorema dei lavori virtuali complementare* (TLVC).

come già osservato, eventuali cedimenti vincolari verticali sono arbitrari, in quanto le reazioni verticali sono nulle.

b) Sistemi staticamente impossibili.

Si consideri dapprima un sistema (reale) staticamente impossibile. Il sistema (virtuale) duale è cinematicamente indeterminato, cosicché esistono infiniti stati virtuali compatibili; in particolare, anche in assenza di cedimenti vincolari $\delta s=0$, esistono infiniti spostamenti compatibili $\delta \mathbf{u}_q$, tali che $\mathbf{A} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0}$. Per il primo corollario del TLV le forze sono equilibrate se

$$L_a = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{u}_q = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_q | \mathbf{A} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0} \quad (50)$$

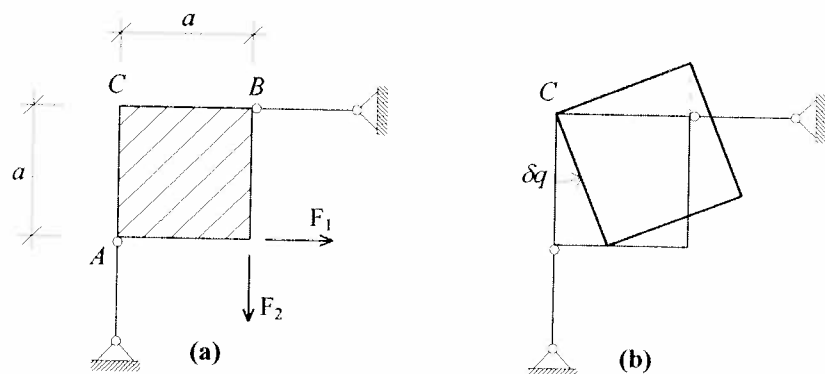
essendo $L_v=0$. Dunque, un problema staticamente impossibile è risolubile se, e solo se, le forze attive compiono lavoro virtuale nullo nel più generale campo di spostamenti compatibile con cedimenti vincolari nulli.

La (50) non è altro che la già citata condizione di solvibilità dell'Osservazione 1.15, che discende direttamente dall'identità bilineare (si veda l'Osservazione 11). Ricordando che (Eq. 22), $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}$, la (50) si scrive (si veda anche l'Appendice A.4):

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T \mathbf{f} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (51)$$

da cui seguono le condizioni di solvibilità (23) $\mathbf{U}^T \mathbf{f} = \mathbf{0}$, in accordo alla terza proprietà di dualità (25).

Esercizio 12: Si determinino le condizioni sotto le quali il problema statico in Fig. (a) ammette soluzione.



Si tratta del sistema già studiato negli esercizi 1.12 e 2.11. Il più generale campo di spostamenti compatibile con cedimenti nulli è rappresentato in Fig. (b) (da confrontare con la Fig. b3 dell'esercizio 1.12), e consiste in una rotazione di ampiezza arbitraria δq intorno a C. L'equazione dei lavori virtuali si scrive:

$$L_e = (F_1 - F_2)a \delta q = 0 \quad \forall \delta q$$

da cui la condizione di equilibrio è $F_1 = F_2$, come già trovato nell'esercizio 2.11. Si noti che forze di intensità e direzione arbitrarie applicate in C possono essere equilibrate dalle reazioni vincolari; queste forze infatti compiono lavoro nullo nel campo di spostamenti descritto da δq .

Sistemi rigidi ad elasticità concentrata: stati locali di deformazione e tensione

1. Introduzione

1.1 Limiti del modello rigido

Il modello rigido rappresenta una schematizzazione estrema del comportamento meccanico delle strutture. Come si è visto, però, pur essendo così semplice, fornisce risposta ad importanti problemi, quali quello cinematico e statico. Si sono tuttavia già individuate delle classi di problemi dove l'uso del modello rigido non conduce ad alcuna risposta, oppure lascia qualche grado di indeterminazione nella soluzione del problema stesso. Si pensi ad esempio ad un sistema cinematicamente impossibile, dove cedimenti vincolari generici sono incompatibili con l'ipotesi di rigidità dei corpi costituenti il sistema. Il comportamento qualitativo della struttura è invece chiaro da rilevazioni sperimentali: *i corpi si deformano* ed il sistema trova una nuova configurazione compatibile con i cedimenti assegnati. Questo comportamento non può ovviamente essere descritto dal modello rigido, che presuppone l'invarianza della forma dei corpi. Problemi di questo tipo, quindi, vanno necessariamente affrontati ricorrendo ad un modello più ricco, e quindi più complesso.

Si pensi poi ad un sistema staticamente indeterminato, dove gli stati reattivi equilibrati con una data distribuzione di forze attive sono infiniti. Qui non esistono rilevazioni sperimentali, non essendo possibile misurare delle forze. Comunque, l'indeterminazione della soluzione è in contrasto con i principi della meccanica deterministica: il modello rigido attribuirebbe infatti al caso l'effettiva distribuzione delle forze reattive. Risulta perciò più ragionevole pensare che il modello sia insufficiente a determinare la soluzione del problema, in quanto non tiene conto del fatto che le forze reattive sono associate a deformazioni del sistema. Anche problemi di questo tipo, dunque, vanno affrontati con modelli più sofisticati.

I due esempi illustrati sono entrambi relativi a sistemi ipervincolati e forniscono la misura più eclatante dei limiti del modello rigido. Comunque, anche limitandosi a trattare sistemi isovincolati, per i quali i problemi cinematico e statico ammettono una soluzione unica, si vede che la risposta del modello rigido è solo parziale. Nel caso statico, infatti, non è possibile determinare la deformazione del sistema conseguente all'applicazione delle forze attive; nel caso cinematico, invece, si perviene ad una soluzione unica solo in quanto i cedimenti dei vincoli (che possono assimilarsi a delle deformazioni localizzate) sono supposti noti, e non sono il risultato dell'applicazione di forze.

1.2 Modello a deformabilità concentrata: analisi locale e globale

Le considerazioni precedenti inducono a sviluppare un modello che, ancorché approssimato, superi i limiti del modello rigido. Il modello più corretto appare quello di corpo deformabile (detto anche *a deformabilità diffusa*). Tuttavia esso richiede l'introduzione di notevoli complicazioni formali; in particolare conduce alla scrittura di equazioni differenziali, anziché algebriche (è cioè un modello continuo, invece che discreto). Un passo intermedio, che permette di trattare il problema ancora come algebrico, è rappresentato dal *modello a deformabilità concentrata*. Esso è costituito da corpi rigidi, collegati però da *organi deformabili*. Un esempio è illustrato in Fig. 1. Rispetto al modello sin qui studiato, viene quindi rilasciata l'ipotesi di indeformabilità dei vincoli, che sono sostituiti da dispositivi cedevoli, ma viene mantenuta l'ipotesi di indeformabilità dei corpi. Il modello, oltre a dare informazioni quantitativamente utili da un punto di vista ingegneristico (se, ad esempio, i corpi sono piccoli rispetto alle dimensioni globali del sistema), ha il pregio di preservare tutte le caratteristiche qualitative del modello a deformabilità diffusa. Esso permette quindi di illustrare in modo semplice tutti i principi fondamentali della Scienza delle Costruzioni.

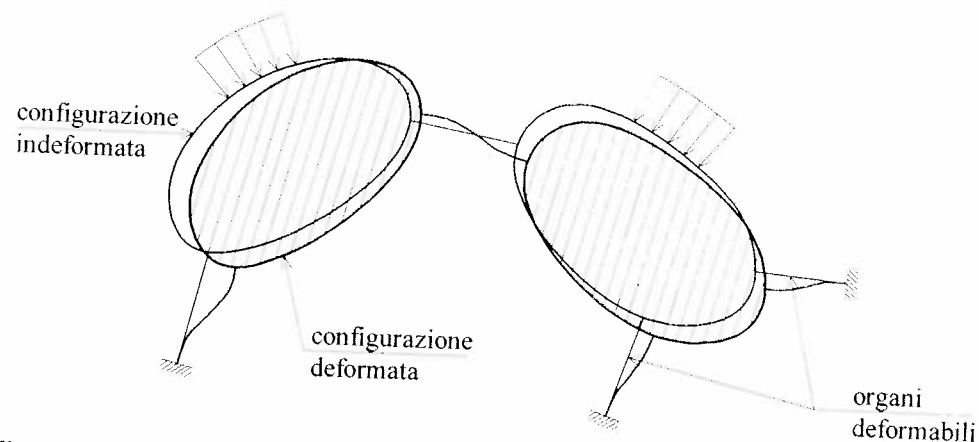


Fig. 1 Sistema rigido a deformabilità concentrata

L'analisi del modello a deformabilità concentrata richiede, come per i sistemi rigidi, lo studio degli aspetti cinematici e statici. Inoltre richiede l'introduzione di un nuovo

aspetto, il legame costitutivo, che descrive il comportamento meccanico del materiale di cui è costituito l'organo. Per chiarezza di esposizione, l'analisi verrà condotta in questo capitolo con riferimento al generico organo deformabile, considerato avulso dal sistema (*analisi locale*); nel capitolo successivo la stessa analisi verrà estesa al sistema di corpi rigidi ed organi deformabili (*analisi globale*).

1.3 Organi deformabili monodimensionali

Si considerano *organi deformabili monodimensionali*, la cui configurazione sia univocamente definita dalla posizione di due *nodi terminali dotati di orientazione* (Fig. 2a). Si suppone inoltre che l'organo (o elemento) sia sollecitato esclusivamente da forze o coppie applicate ai nodi terminali (Fig. 2b). Anche se questa classe non rappresenta la totalità dei possibili elementi deformabili, comprende tuttavia casi particolari notevoli, quali le molle e le travi.

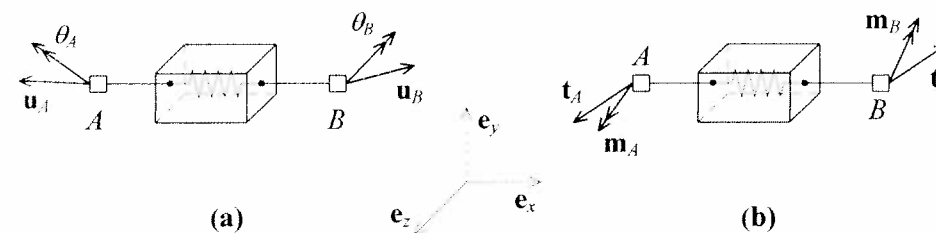


Fig. 2 Organo deformabile: (a) spostamenti, (b) sollecitazioni

2. Cinematica: analisi locale della deformazione

2.1 Misura della deformazione

Siano \mathbf{u}_A e \mathbf{u}_B gli spostamenti (assoluti) dei nodi A e B e θ_A e θ_B le rispettive rotazioni (assolute). La posizione relativa di B rispetto ad A è individuata dai vettori

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A, \quad \Delta \theta = \theta_B - \theta_A \quad (1)$$

che definiscono il *gradiente dello spostamento*. Se si assegna all'elemento uno spostamento rigido di polo A , è:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \theta_A \times \mathbf{AB}, \quad \theta_B = \theta_A \quad (2)$$

a cui corrisponde un gradiente rigido $\Delta \mathbf{u}_R = \theta_A \times \mathbf{AB} \neq \mathbf{0}$, $\Delta \theta_R = \mathbf{0}$. Il gradiente, quindi, non si annulla per una rotazione rigida e non descrive perciò una deformazione. Per ottenere una misura della deformazione pura è necessario sottrarre al gradiente generico (1), il gradiente rigido. Così facendo si definiscono due nuove grandezze che si annullano quando lo spostamento è rigido: $\varepsilon = \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_R$, $\kappa = \Delta \theta - \Delta \theta_R$, ovvero:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \theta_A \times \mathbf{AB} \\ \kappa &= \theta_B - \theta_A \end{aligned} \quad (3)$$

Esse prendono rispettivamente il nome di *vettore deformazione lineare* ε , e *vettore curvatura* κ , e costituiscono una (ma non l'unica) *misura della deformazione*. La deformazione ε ha dimensioni fisiche di una lunghezza [L], la curvatura κ di un numero puro [L⁰]. Le (3) sono dette *equazioni di congruenza locale* (dove l'attributo "locale" si riferisce al fatto che esse valgono per un particolare organo, e non "in grande", per l'intero sistema).

- **Osservazione 1.** Dalle (3) si rileva che i vettori deformazione ε e κ sono rispettivamente uguali allo spostamento e alla rotazione di B , visti da un osservatore solido ad A ; se infatti è $\mathbf{u}_A = \theta_A = \mathbf{0}$, dalle (3) si ha $\varepsilon = \mathbf{u}_B$, $\kappa = \theta_B$.

2.2 Matrici di congruenza locale

Le (3) vengono poste in forma scalare proiettando i vettori sulla base locale $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ (Fig. 2), dove \mathbf{e}_x è collineare al segmento AB . Posto

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_x \mathbf{e}_x + \varepsilon_y \mathbf{e}_y + \varepsilon_z \mathbf{e}_z \\ \kappa &= \kappa_x \mathbf{e}_x + \kappa_y \mathbf{e}_y + \kappa_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{u}_H &= u_H \mathbf{e}_x + v_H \mathbf{e}_y + w_H \mathbf{e}_z \quad (H = A, B) \\ \theta_H &= \theta_{Hx} \mathbf{e}_x + \theta_{Hy} \mathbf{e}_y + \theta_{Hz} \mathbf{e}_z \quad (H = A, B)\end{aligned}\quad (4)$$

poiché risulta:

$$\theta_A \times \mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_{Ax} & \theta_{Ay} & \theta_{Az} \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} = l(\theta_{Az} \mathbf{e}_y - \theta_{Ay} \mathbf{e}_z) \quad (5)$$

dove $l = |\mathbf{AB}|$ è la lunghezza dell'elemento, le equazioni di congruenza locale (3) si scrivono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_B - u_A, \quad \varepsilon_y = v_B - v_A - \theta_{Az} l, \quad \varepsilon_z = w_B - w_A + \theta_{Ay} l \\ \kappa_x &= \theta_{Bx} - \theta_{Ax}, \quad \kappa_y = \theta_{By} - \theta_{Ay}, \quad \kappa_z = \theta_{Bz} - \theta_{Az}\end{aligned}\quad (6)$$

Le (6) possono anche porsi nella forma matriciale

$$\varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (7)$$

dove

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_z\}^T \quad (8)$$

è il vettore 6×1 della *deformazione locale*,

$$\mathbf{u} = \{u_A \quad v_A \quad w_A \quad \theta_{Ax} \quad \theta_{Ay} \quad \theta_{Az}; u_B \quad v_B \quad w_B \quad \theta_{Bx} \quad \theta_{By} \quad \theta_{Bz}\}^T \quad (9)$$

è il vettore 12×1 dello *spostamento locale* e

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & -1 & . & . & . & -l & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & . & l & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

è la matrice 6×12 di *congruenza locale*.

2.3 Stato di deformazione piano

Se gli spostamenti \mathbf{u}_A e \mathbf{u}_B sono paralleli al medesimo piano π ed inoltre θ_A e θ_B sono ortogonali a π , lo *stato di deformazione* è detto *piano*. Assumendo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ come base su π , le uniche componenti non nulle della deformazione sono ε_x , ε_y e κ_z . Posto, per semplicità di notazione:

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \quad \varepsilon_y = \gamma, \quad \kappa_z = \kappa, \quad \theta_{Hz} = \theta_H \quad (H = A, B) \quad (11)$$

le (6) forniscono:

$$\varepsilon = u_B - u_A; \quad \gamma = v_B - v_A - \theta_A l; \quad \kappa = \theta_B - \theta_A \quad (12)$$

Nelle (7) è quindi

$$\varepsilon = \{\varepsilon \quad \gamma \quad \kappa\}^T, \quad \mathbf{u} = \{u_A \quad v_A \quad \theta_A; u_B \quad v_B \quad \theta_B\}^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & . & . & 1 & . & . \\ . & -1 & -l & . & 1 & . \\ . & . & -1 & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Delle tre componenti del vettore ε , ε è detta *deformazione assiale*, o allungamento, o elongazione; γ è detta *deformazione a taglio*, o scorrimento angolare; κ è detta *curvatura flessionale*. Il loro significato geometrico è illustrato in Fig. 3, dove tutte le grandezze assumono segno positivo.

- **Osservazione 2.** Nella definizione di deformazione si è supposto che l'elemento deformabile abbia dimensione finita. Conseguentemente, a causa della rotazione rigida, la deformazione ε non coincide con lo spostamento relativo $\Delta \mathbf{u}$. Se però la distanza del segmento AB è piccola rispetto ad una dimensione caratteristica dei corpi rigidi a cui l'elemento è collegato, il contributo della rotazione rigida è trascurabile rispetto agli spostamenti dovuti ad esempio alle rotazioni dei corpi. In tal caso può assumersi $\varepsilon \approx \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A$ nella (3₁), cosicché è $\mathbf{D} = [-\mathbf{I} \quad \mathbf{I}]$ nella (7), con \mathbf{I} matrice identità di ordine 6 nel caso spaziale (Eq. 10) e 3 nel caso piano

(Eq. 13₃). Nel seguito si farà riferimento a questa ipotesi come quella di *organo deformabile di dimensione infinitesima*.

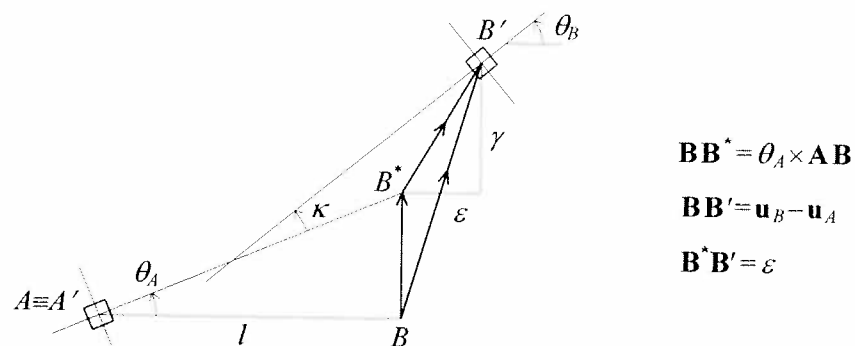


Fig. 3 Interpretazione geometrica di ε , γ , κ

- **Osservazione 3.** Il numero delle componenti scalari della deformazione è uguale a 6 nel caso spaziale e uguale a 3 nel caso piano. Esso è pari alla differenza tra il numero complessivo dei gradi di libertà dei due nodi (dodici, oppure sei) ed il numero degli spostamenti rigidi dell'organo (sei, oppure tre).

3. Statica: analisi locale della tensione

3.1 Misura della tensione

L'organo deformabile sia sollecitato da forze \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B e coppie \mathbf{m}_A , \mathbf{m}_B applicate ai nodi terminali (Fig. 2b). Quando l'organo è collegato ad un corpo rigido, le forze \mathbf{t}_H ed \mathbf{m}_H ($H=A, B$) rappresentano l'azione, supposta esclusivamente di contatto, che il corpo rigido esercita sull'elemento deformabile; corrispondentemente, per il principio di azione e reazione, l'elemento esercita sul corpo forze uguali e contrarie $-\mathbf{t}_H$ e $-\mathbf{m}_H$. Per questo motivo \mathbf{t}_H ed \mathbf{m}_H sono dette *forze interne* (al sistema), anche se si tratta di forze esterne all'elemento. Per l'equilibrio dell'organo devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B &= \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_B + \mathbf{AB} \times \mathbf{t}_B &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

avendo scelto A come polo di riduzione delle forze.

- **Osservazione 4.** Si noti che la condizione di equilibrio (14) è imposta nella *configurazione indeformata* dell'organo, nell'ipotesi cioè che la deformazione ε e κ (incognite) conseguenti all'applicazione delle forze siano tanto piccole da poter trascurare il cambiamento di geometria. Questa assunzione è nota come *ipotesi di deformazione infinitesima*, e ad essa si farà ricorso nella totalità dei problemi trattati, ad eccezione di quelli studiati nei Cap. 9 e 10.

Poiché le forze interne devono soddisfare le (14), esse non sono tutte indipendenti: scelte ad esempio $\mathbf{t}_B = \sigma$ ed $\mathbf{m}_B = \mu$, con σ e μ arbitrarie, \mathbf{t}_A ed \mathbf{m}_A sono univocamente determinate. Tenuto conto delle (14) si ha:

$$\mathbf{t}_A = -\sigma, \quad \mathbf{m}_A = -\mu - \mathbf{AB} \times \sigma; \quad \mathbf{t}_B = \sigma, \quad \mathbf{m}_B = \mu \quad (15)$$

In esse σ e μ sono dette *tensioni*; in particolare σ è il *vettore sforzo* e μ il *vettore momento*. I due vettori rappresentano una (ma non l'unica) misura dello stato di tensione agente nell'organo. Lo sforzo σ ha dimensioni fisiche di una forza [F], il momento μ di una forza moltiplicata per una lunghezza [FL].

3.2 Matrice di equilibrio locale

Le (15) vengono poste in forma scalare proiettando i vettori sulla base locale ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) (Fig. 2). Posto:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z \\ \mu &= \mu_x \mathbf{e}_x + \mu_y \mathbf{e}_y + \mu_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{t}_H &= t_{Hx} \mathbf{e}_x + t_{Hy} \mathbf{e}_y + t_{Hz} \mathbf{e}_z \quad (H = A, B) \\ \mathbf{m}_H &= m_{Hx} \mathbf{e}_x + m_{Hy} \mathbf{e}_y + m_{Hz} \mathbf{e}_z \quad (H = A, B) \end{aligned} \quad (16)$$

e tenuto conto che

$$\mathbf{AB} \times \sigma = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ l & 0 & 0 \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{vmatrix} = l(\sigma_y \mathbf{e}_z - \sigma_z \mathbf{e}_y) \quad (17)$$

le (15) si scrivono in forma matriciale

$$\mathbf{t} = \mathbf{E} \sigma \quad (18)$$

Nella (18)

$$\sigma = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \mu_x \quad \mu_y \quad \mu_z \right\}^T \quad (19)$$

è il vettore 6×1 della *tensione locale*,

$$\mathbf{t} = \left\{ t_{Ax} \quad t_{Ay} \quad t_{Az} \quad m_{Ax} \quad m_{Ay} \quad m_{Az}; \quad t_{Bx} \quad t_{By} \quad t_{Bz} \quad m_{Bx} \quad m_{By} \quad m_{Bz} \right\}^T \quad (20)$$

è il vettore 12×1 delle *forze interne locali*, ed

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & . & . & . & . & . \\ . & -1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . \\ . & . & l & . & -1 & . \\ . & -l & . & . & . & -1 \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

è la matrice 12×6 di equilibrio locale.

3.3 Stato di tensione piano

Se le forze interne \mathbf{t}_A e \mathbf{t}_B sono parallele al medesimo piano π ed inoltre \mathbf{m}_A e \mathbf{m}_B sono ortogonali a π , lo stato di tensione è detto *piano*. Assumendo $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ come base su π , le uniche componenti non nulle della tensione sono σ_x , σ_y e μ_z . Posto, per semplicità di notazione:

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \tau, \quad \mu_z = \mu, \quad m_{H_z} = m_H \quad (H = A, B) \quad (22)$$

nelle (18) è:

$$\sigma = \{\sigma \quad \tau \quad \mu\}^T, \quad \mathbf{t} = \{t_{Ax} \quad t_{Ay} \quad m_A; t_{Bx} \quad t_{By} \quad m_B\}^T, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & . & . \\ . & -1 & . \\ . & -l & -1 \\ 1 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Delle tre componenti del vettore σ , σ è detta *sforzo assiale* (o *normale*, alludendo ad un piano ortogonale alla direzione AB), τ è detta *sforzo di taglio* e μ *momento flettente*. Le componenti del vettore forze interne \mathbf{t} e tensione σ sono illustrate in Fig. 4 con il loro segno positivo.

• **Osservazione 5.** Nella definizione di tensione si è supposto che l'elemento abbia dimensione finita. Perciò, a causa del momento di trasporto, la tensione μ coincide con \mathbf{m}_B ma non con \mathbf{m}_A . Se però la distanza del segmento AB è piccola rispetto ad

una dimensione caratteristica dei corpi rigidi a cui l'elemento è collegato (ipotesi di organo di dimensione infinitesima, cfr. Osservazione 2), il contributo del momento di trasporto è trascurabile rispetto al momento delle forze attive applicate ai corpi. In tal caso può assumersi $\mu \cong -\mathbf{m}_A$ nella (15₂), cosicché è $\mathbf{E} = [-\mathbf{I} \quad \mathbf{I}]^T$ nella (18), con \mathbf{I} matrice identità di ordine 6 nel caso spaziale (Eq. 21) e 3 nel caso piano (Eq. 23₃).

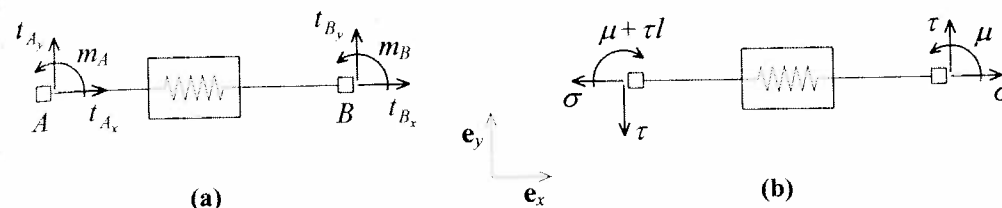


Fig. 4 Stato piano di tensione: (a) forze interne; (b) tensioni

• **Osservazione 6.** Il numero delle componenti scalari di tensione è uguale a 6 nel caso spaziale e uguale a 3 nel caso piano. Esso è pari alla differenza tra il numero complessivo di forze interne applicate ai due nodi (dodici, oppure sei) ed il numero delle equazioni di equilibrio dell'organo (sei, oppure tre).

4. Dualità e lavoro virtuale interno

Il confronto diretto delle matrici di congruenza locale (10) e di equilibrio locale (21) mostra la sussistenza della seguente proprietà di dualità:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^T \quad (24)$$

analogamente a quella, già discussa, tra le matrici di congruenza e di equilibrio di un sistema di corpi rigidi. Si noti che, affinché la proprietà (24) sia soddisfatta, nelle equazioni di congruenza locale (3) e di equilibrio locale (15): I) deve assumersi lo stesso polo A nell'espressione della rotazione rigida e dell'equilibrio dei momenti; II) le equazioni devono essere proiettate sulla stessa base; III) le forze interne e gli spostamenti dei nodi devono essere equiversi ed egualmente ordinati.

Dalle (3) e (15) discende un'altra, importante, proprietà. Si consideri il lavoro virtuale L_i (detto *lavoro virtuale interno*) che le forze applicate all'estremità dell'organo (Fig. 2b) compiono negli spostamenti degli stessi nodi (Fig. 2a). Si ha, tenuto conto delle (15) e poi delle (3):

$$\begin{aligned} L_i &= \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{u}_A + \mathbf{t}_B \cdot \mathbf{u}_B + \mathbf{m}_A \cdot \theta_A + \mathbf{m}_B \cdot \theta_B \\ &= \sigma \cdot (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) - (\mu + \mathbf{AB} \times \sigma) \cdot \theta_A + \mu \cdot \theta_B \\ &= \sigma \cdot (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \theta_A \times \mathbf{AB}) + \mu \cdot (\theta_B - \theta_A) \\ &= \sigma \cdot \varepsilon + \mu \cdot \kappa \end{aligned} \quad (25)$$

ovvero, richiamando le (8) e (19):

$$L_i = \sigma^T \varepsilon \quad (26)$$

Si ottiene quindi il seguente risultato notevole: *il lavoro virtuale interno si esprime come prodotto delle tensioni per le corrispondenti deformazioni; ogni componente di tensione compie lavoro esclusivamente nella componente di deformazione associata.*

- **Osservazione 7.** La dimostrazione (25) non richiede l'introduzione di una base. Se comunque questa viene introdotta può darsi una dimostrazione alternativa, più sintetica. Stanti le posizioni (9) e (20) è infatti

$$L_i = \mathbf{t}^T \mathbf{u} = (\mathbf{E}\sigma)^T \mathbf{u} = \sigma^T \mathbf{E}^T \mathbf{u} = \sigma^T \varepsilon \quad (27)$$

avendo usato nell'ordine le equazioni (18), (24) e (7).

- **Osservazione 8.** Le tensioni σ compiono lavoro virtuale nullo in uno spostamento rigido, per il quale è $\varepsilon=0$. Ciò è conseguenza del fatto che uno stato di tensione è rappresentato da un sistema di forze equilibrato che, per l'Osservazione 3.9, compie appunto lavoro virtuale nullo in uno spostamento rigido.

5. Legame elastico

5.1 Legame elastico lineare omogeneo

Occorre ora definire un legame tra tensioni σ e deformazioni ε ; questo legame è detto *costitutivo*, in quanto caratterizza il comportamento del materiale. Esiste una gamma molto vasta di legami costitutivi; qui ci si limiterà a considerare il solo *legame elastico*. Un organo è detto elastico quando il suo stato di tensione σ dipende solo dal *valore attuale* ε dello stato di deformazione, $\sigma=\sigma(\varepsilon)$; non dipende cioè dalla storia della deformazione, né dipende esplicitamente dal tempo. Così, se si rappresenta un processo di carico dell'elemento in uno spazio $\{\sigma, \varepsilon\}$ (in generale a dodici dimensioni), il punto che rappresenta lo stato tenso-deformativo dell'organo percorre una certa curva a partire da uno stato iniziale; se le sollecitazioni vengono rimosse invertendo la stessa legge di carico, il punto percorre in senso inverso la medesima curva; se le sollecitazioni vengono rimosse con altra legge, il punto percorre un'altra curva, ritornando però nello stato iniziale. La trasformazione deformativa elastica è quindi *reversibile*. Da un punto di vista energetico tutta l'energia immagazzinata dal corpo nella fase di carico viene restituita all'ambiente nella fase di scarico, con dissipazione nulla.

In genere si ammette l'esistenza di uno stato, detto *naturale*, in cui tensioni e deformazioni sono nulle; in tal caso il legame è detto *omogeneo*. Esistono però casi in cui è opportuno rimuovere questa ipotesi (si veda in proposito il successivo punto 5.4).

Tra tutte le possibili leggi $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, assume particolare rilevanza la legge lineare

$$\sigma = C\varepsilon \quad (28)$$

che esprime proporzionalità tra tensioni e deformazioni. Il legame è in tal caso detto *elastico lineare omogeneo*. Nel seguito si farà riferimento ad esso.

Nella (28) C è una matrice di dimensioni 6×6 detta *matrice elastica locale*. C è generalmente piena, ma gode di due importanti proprietà, dimostrate nel punto successivo:

- (a) C è simmetrica: $C = C^T$
- (b) C è definita positiva: $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$

Poiché C è definita positiva è anche invertibile. Può quindi scriversi

$$\varepsilon = H\sigma \quad (30)$$

avendo indicato con H^1 la matrice inversa di C ($H:=C^{-1}$), anch'essa simmetrica e definita positiva. In gergo ingegneristico il *legame* espresso dalla (28) viene detto *diretto* mentre quello espresso dalla (30) *inverso*.

5.2 Energia potenziale elastica

Per dimostrare le (29), e per ulteriori sviluppi, è necessario introdurre una nuova grandezza scalare: l'energia potenziale elastica. Il legame (28) è rappresentato in Fig. 5a per un organo i cui stati di tensione e deformazione siano espressi da scalari, $\sigma=c\varepsilon$ (legame monodimensionale; si veda il successivo punto 6.2). In figura è indicato un processo di carico che porta l'organo dallo stato naturale O allo stato finale F . Si assuma dapprima ε quale variabile di stato. Quando, a partire dal generico stato ε , si incrementa la deformazione di un infinitesimo $d\varepsilon$, le tensioni σ , corrispondenti allo stato ε , compiono nell'incremento $d\varepsilon$ un *lavoro interno*, o di deformazione, $dL_i=\sigma(\varepsilon)d\varepsilon$ (si ricordi la (26), che esprime però un lavoro virtuale).

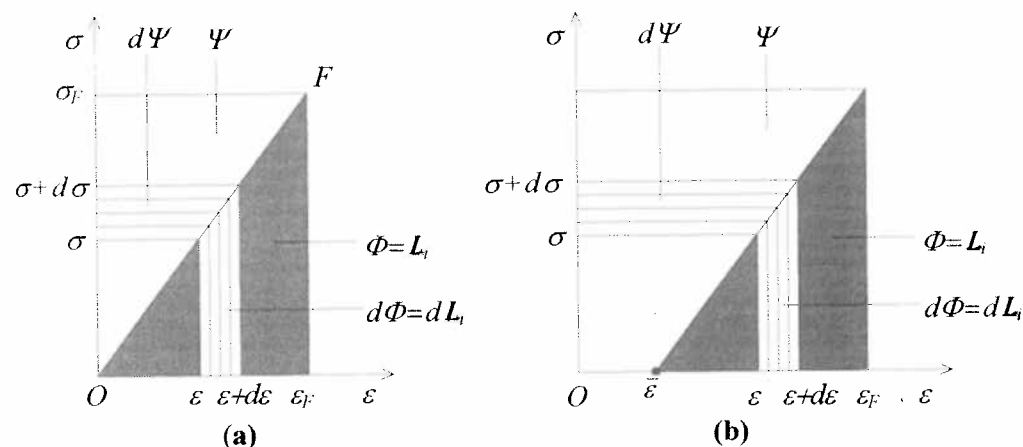


Fig. 5 Legame elastico lineare: (a) omogeneo; (b) non omogeneo. Energia potenziale elastica Φ , energia complementare elastica Ψ

¹ Da Robert Hooke (1635-1703), che ha formulato un'analogia legge per i corpi elastici a deformabilità diffusa.

Poiché le forze elastiche sono per ipotesi conservative, questo lavoro è uguale al differenziale di una funzione potenziale $\Phi(\varepsilon)$, cioè

$$d\Phi(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)d\varepsilon \quad (31)$$

da cui

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\Phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (32)$$

Generalizzando al caso multidimensionale si ha $dL_i = [\sigma(\varepsilon)]^T d\varepsilon$; poiché dL_i è un differenziale esatto è

$$[\sigma(\varepsilon)]^T d\varepsilon = d\Phi(\varepsilon) = \left[\frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]^T d\varepsilon \quad (33)$$

dove $\partial \Phi / \partial \varepsilon$ è un vettore di dimensioni 6×1 . Dalla (33) si ha:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (34)$$

Poiché, per la (28) è $\mathbf{C} = \partial \sigma / \partial \varepsilon$, dalla (34) segue:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \quad \text{ovvero} \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} \quad (35)$$

essendo $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ ed $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$. La (35) mostra che \mathbf{C} è l'Hessiano di $\Phi(\varepsilon)$; per il teorema di Schawrtz, è $c_{ij} = c_{ji}$, cioè vale la (29₁).

Integrando la (34) tra lo stato naturale $\varepsilon = \mathbf{0}$ e lo stato finale $\varepsilon = \varepsilon_F$ si ha:

$$\Phi(\varepsilon_F) = \int_0^{\varepsilon_F} [\sigma(\varepsilon)]^T d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_F} [\mathbf{C}\varepsilon]^T d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_F^T \mathbf{C} \varepsilon_F \quad (36)$$

ovvero, genericamente

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon \quad (37)$$

La funzione $\Phi(\varepsilon)$ prende il nome di *energia potenziale elastica*; essa è uguale al lavoro interno L_i necessario a portare l'organo dallo stato naturale $\varepsilon = \mathbf{0}$ allo stato ε . Nel caso monodimensionale (Fig. 5a), $\Phi(\varepsilon)$ può interpretarsi come l'area sottesa dal grafico della funzione $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ nell'intervallo $[0, \varepsilon]$.

Richiedendo che il lavoro L_i compiuto dalle tensioni per portare l'organo elastico dallo stato naturale ad un qualunque stato deformato sia sempre positivo, segue la proprietà di definitezza in segno della forma quadratica (36), $\Phi(\varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon \neq 0$, da cui la definitezza in segno di \mathbf{C} (Eq. 29₂). Rappresentando $\Phi(\varepsilon)$ come una superficie in \mathbb{R}^7 (in Fig. 6 è rappresentato un caso bidimensionale) questa ha un punto di stazionarietà nell'origine $\varepsilon = \mathbf{0}$ (in quanto $\partial \Phi / \partial \varepsilon|_{\varepsilon=0} = \mathbf{0}$) dove attinge un minimo assoluto (in

quanto il suo Hessiano è positivo).

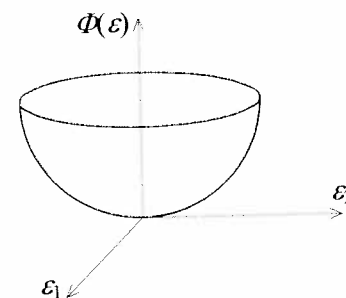


Fig. 6 Energia potenziale elastica definita positiva

- **Osservazione 9.** Il lavoro interno compiuto dalle tensioni per portare l'organo dallo stato naturale $(\varepsilon, \sigma) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ allo stato generico (ε, σ) è uguale a

$$L_i = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon \quad (38)$$

tenendo conto che $L_i = \Phi(\varepsilon)$ e avendo sostituito la (28) nella (37). Esso è pari alla metà del lavoro virtuale $L_i = \sigma^T \varepsilon$ che le tensioni σ compirebbero nelle deformazioni ε se agissero direttamente con il loro valore finale, invece che crescere con le deformazioni stesse (si veda la Fig. 5a). È cioè

$$L_i = \frac{1}{2} L_i \quad (39)$$

Questo risultato, valido solo per organi elastici lineari omogenei, è noto come *Teorema di Clapeyron*. Un'analoga relazione, espressa in termini di forze esterne \mathbf{t} all'organo e spostamenti \mathbf{u} dei nodi può essere facilmente provata usando nell'ordine la (7) e la (24).

5.3 Energia complementare elastica

Se in luogo di ε si assume σ come variabile di stato, può definirsi una *funzione duale* $\Psi(\sigma)$ della funzione $\Phi(\varepsilon)$, detta *energia complementare elastica*, tale che

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (40)$$

Tenuto conto della (30) ed integrando:

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma \quad (41)$$

Si noti la dualità tra le (34) e (40) e tra le (37) e (41).

L'energia complementare elastica, a differenza della funzione duale, non ha signifi-

cato fisico. Il suo significato geometrico emerge nel caso monodimensionale (Fig. 5a); $\Psi(\sigma)$ rappresenta il *complemento* (da cui il nome) all'area $\Phi(\varepsilon)$, dove σ ed ε rappresentano lo stesso stato elastico. La somma $\Phi(\varepsilon) + \Psi(\sigma)$, è uguale al prodotto $\sigma\varepsilon$.

Pertanto, nel caso di elasticità lineare omogenea l'energia potenziale elastica e l'energia complementare elastica assumono, in un dato stato, il medesimo valore. Se infatti nella (37) si sostituisce la (28) si ha:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma = \Psi(\sigma) \quad (42)$$

L'interpretazione geometrica è immediata nel caso monodimensionale (Fig. 5a).

- **Osservazione 10.** Le due funzioni $\Phi(\varepsilon)$ e $\Psi(\sigma)$ non sono "uguali", essendo l'una funzione di ε e l'altra di σ ; esse assumono però lo stesso valore in un certo stato elastico, rappresentato in un caso come $(\varepsilon, \sigma(\varepsilon))$, e nell'altro come $(\varepsilon(\sigma), \sigma)$.

5.4 Legame elastico lineare non omogeneo

Una generalizzazione del legame elastico lineare omogeneo, peraltro di notevole interesse applicativo, viene ottenuta assumendo l'esistenza di uno stato di deformazione iniziale ($\varepsilon = \bar{\varepsilon}$) a cui è associato uno stato di tensione nullo $\sigma = \mathbf{0}$ (*legame elastico lineare non omogeneo*). In questo caso, con riferimento alle notazioni di Fig. 5b, il legame diretto (28) e quello inverso (30) assumo rispettivamente la forma

$$\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}); \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \mathbf{H}\sigma \quad (43)$$

A differenza di quanto accade nel caso omogeneo, le due funzioni $\Phi(\varepsilon)$ e $\Psi(\sigma)$ non assumono il medesimo valore in un certo stato elastico. Ciò risulta evidente nel caso monodimensionale di Fig. 5b. Nel caso multidimensionale, esse sono espresse dalle relazioni:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^T \mathbf{C} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}); \quad \Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma + \sigma^T \bar{\varepsilon} \quad (44)$$

come può ottenersi generalizzando i risultati del caso monodimensionale. Peraltro è facile verificare come da tali espressioni sia possibile ottenere lo stato di tensione e deformazione attraverso le definizioni formali (34) e (40).

6. Esempi di organi elastici

6.1 Organi elastici semidefiniti: dimensione elastica

Come si è detto nel punto 5.1, una delle proprietà della matrice elastica \mathbf{C} è quella di essere definita positiva. Esistono tuttavia particolari organi elastici per i quali è conveniente rilassare questa proprietà, richiedendo piuttosto che \mathbf{C} sia *semidefinita positiva*; tali organi vengono perciò detti semidefiniti.

Implicazione di questa ipotesi è che esistono *particolari deformazioni alle quali sono*

associate tensioni nulle e corrispondentemente un'energia potenziale elastica $\Phi = (1/2) \sigma^T \varepsilon$ uguale a zero. Un esempio è rappresentato dal seguente legame costitutivo di un organo elastico piano:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad c > 0 \quad (45)$$

Per tale organo, a qualunque combinazione di γ e κ corrispondono tensioni τ e μ nulle. Si dice anche che l'elemento non ha rigidità, ovvero è *perfettamente flessibile*, al taglio e alla flessione; è perciò un elemento puramente estensionale, anche detto semplicemente *molla*. Da un punto di vista fisico gli *elementi semidefiniti non esistono*, essendo solo un'astrazione di comodo. Accade infatti che gli elementi nulli della matrice \mathbf{C} (o almeno quelli sulla diagonale principale), non sono realmente tali, ma soltanto molto più piccoli dell'elemento non nullo c ; per questo motivo è opportuno trascurarli e fare riferimento ad un organo ideale.

Al fine di preservare la proprietà di definitezza positiva della matrice \mathbf{C} , è conveniente *condensare il legame costitutivo*, tenendo conto delle sole deformazioni ε_i alle quali è associata un'energia potenziale elastica positiva. Nell'esempio precedente si assume cioè un vettore $\varepsilon = \{\varepsilon\}$ costituito da un'unica componente di deformazione, e corrispondentemente un vettore $\sigma = \{\sigma\}$ costituito da un'unica componente di tensione. Conseguentemente anche le matrici \mathbf{D} ed \mathbf{E} vengono contratte; nell'esempio esse corrispondono rispettivamente alla prima riga della matrice (13₃) e alla prima colonna della matrice (23₃). La matrice elastica è allora $\mathbf{C} = [c]$, ed è definita positiva.

In conclusione esistono organi (ideali) il cui numero di componenti di deformazione e tensione è minore di sei nel caso spaziale, o minore di tre nel caso piano. Si definisce *dimensione elastica* d dell'organo (da non confondersi con la dimensione geometrica dell'organo, che si è detto essere uguale ad uno), il numero delle componenti (significative) del vettore ε , uguale a quello delle componenti del vettore σ (si veda l'Osservazione 11). Per un organo monodimensionale è quindi $d \leq 6$.

- **Osservazione 11.** È sempre possibile trasformare per similitudine una data matrice simmetrica semidefinita positiva \mathbf{C} , in una matrice diagonale. Gli elementi della diagonale sono gli autovalori di \mathbf{C} : d sono positivi ed i rimanenti nulli. Partizionando il legame (28) in modo tale da separare gli autovalori positivi, si ottiene il legame condensato. Ciò mostra che il numero di deformazioni e tensioni significative è d .

6.2 Organi elastici semplici

Si chiamano semplici quegli organi la cui dimensione elastica è $d=1$. Essi hanno un legame costitutivo del tipo (45). L'organo elastico più semplice è la *molla estensionale* (Fig. 7a), per la quale vale il seguente legame costitutivo (condensato):

$$\sigma = c_e \varepsilon \quad (46)$$

dove σ è lo sforzo (normale), ε l'elongazione e c_e è la costante elastica (o di rigidità) della molla. Concordemente alle convenzioni già introdotte, ε è positiva se di allungamento e σ è positiva se di trazione. La rigidità c_e è positiva per la proprietà (29₂); le sue dimensioni fisiche sono $[FL^{-1}]$. Il lavoro virtuale interno si scrive $L_i = \sigma \varepsilon$, l'energia potenziale elastica $\Phi = (1/2)c_e \varepsilon^2$, l'energia complementare elastica $\Psi = (1/2)(\sigma^2/c_e)$.

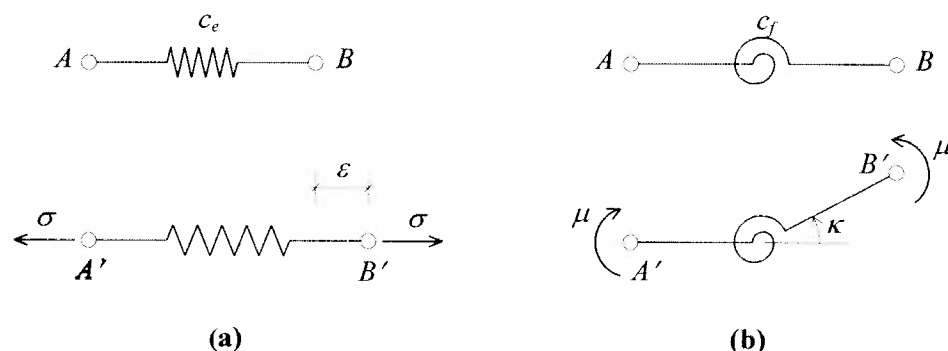


Fig. 7 Organi elastici semplici: (a) molla estensionale; (b) molla flessionale

Un secondo organo semplice è la *molla flessionale* (Fig. 7b); essa è caratterizzata dal seguente legame costitutivo (condensato)

$$\mu = c_f \kappa \quad (47)$$

dove μ è il momento flettente, κ è la curvatura flessionale e c_f è la costante elastica. Concordemente con le convenzioni introdotte, μ è positiva quando la coppia agente sul nodo B è antioraria e κ è positiva quando la rotazione di B , vista da un osservatore solidale ad A , è antioraria. Le dimensioni fisiche di c_f , sempre positiva, sono $[FL]$. Il lavoro virtuale interno è $L_i = \mu \kappa$, l'energia potenziale elastica $\Phi = (1/2)c_f \kappa^2$, l'energia complementare elastica $\Psi = (1/2)(\mu^2/c_f)$.

6.3 Organi elastici composti

Gli organi elastici semplici possono naturalmente essere combinati per realizzare organi composti più complessi. La Fig. 8 mostra un organo composto da due molle di rigidità c_1 e c_2 , collegate alle estremità a due piatti rigidi paralleli A e B su cui sono applicate le tensioni σ (normale al piatto) e μ . Lo sforzo τ , tangente al piatto, è invece identicamente nullo, in quanto le molle sono in grado di fornire solo forze normali al piatto (nell'ipotesi di deformazione infinitesima, cfr. Osservazione 4). Le componenti della deformazione dell'organo si determinano applicando l'Osservazione 1, considerando cioè A fisso e descrivendo lo spostamento di B . Esse consistono nello spostamento relativo ε in direzione normale al piatto e nella rotazione relativa κ ; lo spostamento relativo in direzione tangente, γ , non è invece una deformazione significativa, in quanto non produce (al primo ordine) allungamenti nelle molle. Per ottenere il legame costitutivo dell'organo composto si procede come segue (*approccio diretto*):

- si assegnano le deformazioni;
- si calcolano gli allungamenti e quindi le tensioni nelle molle componenti;
- si impone l'equilibrio dei piatti nella configurazione indeformata (Osservazione 4).

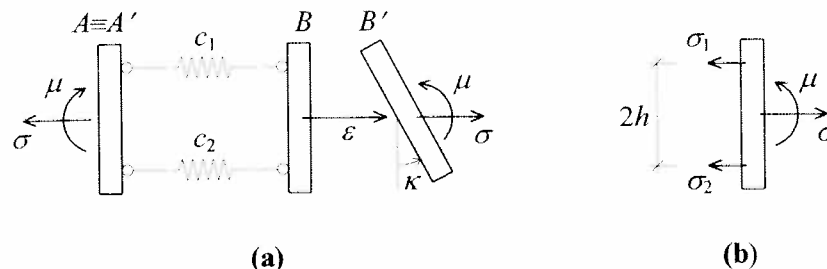


Fig. 8 Organo elastico composto da due molle in parallelo: (a) configurazione deformata; (b) equilibrio nella configurazione indeformata.

L'allungamento nelle molle è (Fig. 8a) $\varepsilon_1 = \varepsilon - \kappa h$, $\varepsilon_2 = \varepsilon + \kappa h$ e le tensioni corrispondenti $\sigma_i = c_i \varepsilon_i$ ($i=1,2$). Per l'equilibrio deve essere (Fig. 8b) $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\mu = (\sigma_2 - \sigma_1)h$, da cui:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & h(c_2 - c_1) \\ h(c_2 - c_1) & h^2(c_1 + c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (48)$$

La (48) è la legge costitutiva dell'organo in Fig. 8, del tipo (28), con $\sigma = \{\sigma, \mu\}^T$, $\varepsilon = \{\varepsilon, \kappa\}^T$; la matrice 2×2 è la matrice elastica C . L'organo ha pertanto dimensione elastica $d=2$.

Si noti che C è piena; quindi ad esempio, ad un allungamento ε corrisponde sia una forza σ che una coppia μ . Se, come caso particolare è $c_1 = c_2$ (organo simmetrico), la matrice elastica si diagonalizza: all'allungamento ε corrisponde solo lo sforzo normale σ , alla rotazione κ solo il momento flettente μ . In questo caso il lavoro virtuale interno si scrive $L_i = \sigma \varepsilon + \mu \kappa$, l'energia potenziale elastica

$$\Phi = \frac{1}{2}(2c\varepsilon^2 + 2ch^2\kappa^2)$$

e l'energia complementare elastica

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2c} + \frac{\mu^2}{2ch^2}\right)$$

- Osservazione 12.** Al metodo diretto di determinazione del legame costitutivo di un organo composto è possibile affiancare un metodo alternativo detto *energetico* (o *indiretto*). Esso consiste nel sostituire al punto (c) del metodo diretto il seguente: si impone l'eguaglianza tra l'energia potenziale elastica immagazzinata nelle molle e quella dell'organo scritta a coefficienti indeterminati, c_{ij} , come espresso dalla (37).

L'eguaglianza tra i coefficienti omonimi dei polinomi quadratici nelle deformazioni presenti nei due membri porta ad identificare i coefficienti elastici dell'organo. Il vantaggio del metodo risiede dunque nel non studiare l'equilibrio del sistema, bensì la sola congruenza. L'esercizio che segue serve a chiarire il procedimento.

Esercizio 1: Utilizzando il metodo energetico si scriva la legge costitutiva per il vincolo composto rappresentato nella Fig. 8.

Come si è visto, le elongazioni delle molle, espresse in funzione dei parametri di deformazione dell'organo, risultano espresse dalle relazioni:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \kappa h, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon + \kappa h$$

Sfruttando il legame costitutivo delle singole molle, l'energia potenziale elastica del sistema si scrive:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} (c_1 \varepsilon_1^2 + c_2 \varepsilon_2^2) \\ &= \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) \varepsilon^2 + 2h(c_2 - c_1) \varepsilon \kappa + h^2 (c_1 + c_2) \kappa^2] \end{aligned}$$

D'altra parte è

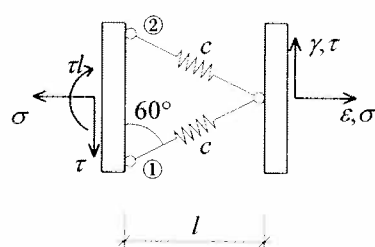
$$\Phi = \frac{1}{2} (c_{11} \varepsilon^2 + 2c_{12} \varepsilon \kappa + c_{22} \kappa^2)$$

da cui, eguagliando le due espressioni, si ha:

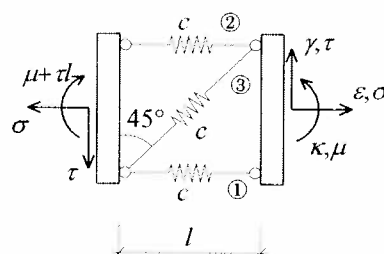
$$c_{11} = c_1 + c_2; \quad c_{12} = c_{21} = h(c_2 - c_1); \quad c_{22} = h^2 (c_1 + c_2)$$

come già trovato con il metodo diretto (Eq. 48).

Esercizio 2: Procedendo con il metodo diretto, scrivere la legge costitutiva per i vincoli composti rappresentati nelle Fig. (a) e (b).



(a)



(b)

Con riferimento alla Fig. (a), poiché la rotazione relativa κ tra i due piatti rigidi A e B non produce allungamenti delle molle, le componenti della deformazione consistono negli spostamenti relativi ε e γ (Fig. c). L'allungamento nelle molle è dato da:

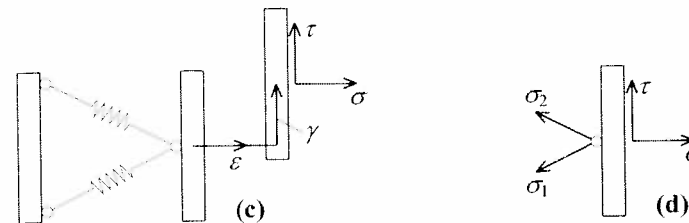
$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos 30^\circ + \gamma \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \gamma, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \cos 30^\circ - \gamma \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma \quad (a)$$

e le tensioni corrispondenti $\sigma_i = c_i \varepsilon_i$ ($i=1,2$). Per l'equilibrio deve essere (Fig. d):

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} c \varepsilon, \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 30^\circ = \frac{1}{2} c \gamma \quad (b)$$

da cui il legame disaccoppiato:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (c)$$



Procedendo in modo analogo per l'organo di Fig. (b), osservato che i parametri di deformazione sono espressi dall'elongazione ε , dallo scorrimento angolare γ e dalla curvatura κ , le deformazioni nelle molle componenti l'organo risultano (Fig. e):

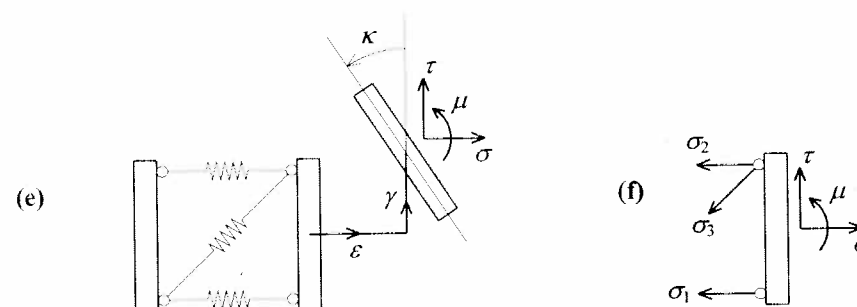
$$\varepsilon_1 = \varepsilon + \kappa l/2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - \kappa l/2, \quad \varepsilon_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\varepsilon + \gamma - \kappa l/2) \quad (d)$$

L'equilibrio nella configurazione indeformata (Fig. f) si scrive:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} c \varepsilon + \frac{1}{2} c \gamma - \frac{l}{4} c \kappa \\ \tau &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_3 = \frac{1}{2} c \varepsilon + \frac{1}{2} c \gamma - \frac{l}{4} c \kappa \\ \mu &= \sigma_1 \frac{l}{2} - \sigma_2 \frac{l}{2} - \sigma_3 \frac{\sqrt{2}}{4} l = -\frac{l}{4} c \varepsilon - \frac{l}{4} c \gamma + \frac{5l^2}{8} c \kappa \end{aligned} \quad (e)$$

da cui

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = c \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -l/4 \\ 1/2 & 1/2 & -l/4 \\ -l/4 & -l/4 & 5l^2/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (f)$$



Esercizio 3: Con l'approccio indiretto si determini la legge costitutiva dei due vincoli composti rappresentati nelle Fig. (a) e (b) dell'esercizio precedente.

Facendo riferimento alla numerazione dell'Esercizio 2, in forza delle (a), l'energia potenziale elastica del sistema di Fig. (a) si scrive:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 c_i \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \quad (g)$$

da cui è immediata l'identificazione dei coefficienti, c_{ij} , caratterizzanti il legame costitutivo

dell'organo. Essi risultano:

$$c_{11} = \frac{3}{2}c, \quad c_{12} = c_{21} = 0, \quad c_{22} = \frac{1}{2}c \quad (h)$$

come si è già trovato nelle (c). Procedendo in modo analogo anche per il sistema di Fig. (b), in forza delle (d) si ha:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i \varepsilon_i^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{5}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{5l^2}{8} \kappa^2 + \varepsilon \gamma - \frac{l}{2} \varepsilon \kappa - \frac{l}{2} \gamma \kappa \right) \quad (i)$$

Quest'ultima, eguagliata alla forma quadratica

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = c_{11} \varepsilon^2 + c_{22} \gamma^2 + c_{33} \kappa^2 + 2c_{12} \varepsilon \gamma + 2c_{13} \varepsilon \kappa + 2c_{23} \gamma \kappa \quad (l)$$

conduce all'espressione dei coefficienti

$$c_{11} = \frac{5}{2}c, \quad c_{22} = \frac{1}{2}c, \quad c_{33} = \frac{5}{8}cl^2, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{1}{2}c, \quad c_{13} = c_{31} = -\frac{l}{4}c, \quad c_{23} = c_{32} = -\frac{l}{4}c \quad (m)$$

ovvero alla (f).

- **Osservazione 13.** Gli organi elastici rappresentati nella Fig. 8 e nelle Fig. (a) e (b) dell'Esercizio 2, tutti costituiti da assemblaggi di molle, somigliano ai dispositivi di vincoli studiati nel Cap. 1, costituiti da assemblaggi di bielle. Per questo motivo possono essere denominati rispettivamente *biella elastica*, *bipendolo elastico*, *glifo elastico*, *cerniera elastica* ed *incastro elastico*. Più generalmente, quando sono collegati a corpi rigidi, si parla di "vincoli elastici". La dizione è però alquanto impropria, e può ingenerare confusione. Mentre infatti i "vincoli rigidi" sono propriamente dei vincoli, in quanto limitano gli spostamenti dei punti dei corpi cui sono applicati, i "vincoli elastici" non limitano in alcun modo la cinematica del corpo, anche se applicano ad esso delle forze (interne) proporzionali alle deformazioni. Per questo motivo qui si preferirà utilizzare il sostantivo "organo", o "elemento", piuttosto che "vincolo".

- **Osservazione 14.** Ad ulteriore sostegno della precedente osservazione può farsi la seguente considerazione. La dimensione elastica d degli organi composti esaminati coincide con il numero delle molle componenti, così come la molteplicità dei vincoli composti è pari al numero delle bielle componenti. Tuttavia, mentre la molteplicità del vincolo aumenta se aumenta il numero delle bielle, la *dimensione elastica degli organi non aumenta*, se queste non sono opportunamente disposte. Ad esempio, se all'organo di Fig. 8 si aggiungono delle molle parallele a quelle esistenti, la rigidità al taglio rimane nulla, e quindi la dimensione elastica resta $d=2$. Inoltre, mentre la molteplicità di un vincolo è illimitata, la dimensione elastica è limitata, essendo $d \leq 3$ nel piano e $d \leq 6$ nello spazio.

6.4 Travi piane elastiche

Un caso notevole di organo deformabile è rappresentato dalla *trave rettilinea elastica*. Questa è considerata come un oggetto (di dimensione finita) a prevalente sviluppo monodimensionale, costituito da una linea d'asse flessibile e sezioni normali rigide solidali all'asse (modello di Eulero-Bernoulli, Fig. 9a).

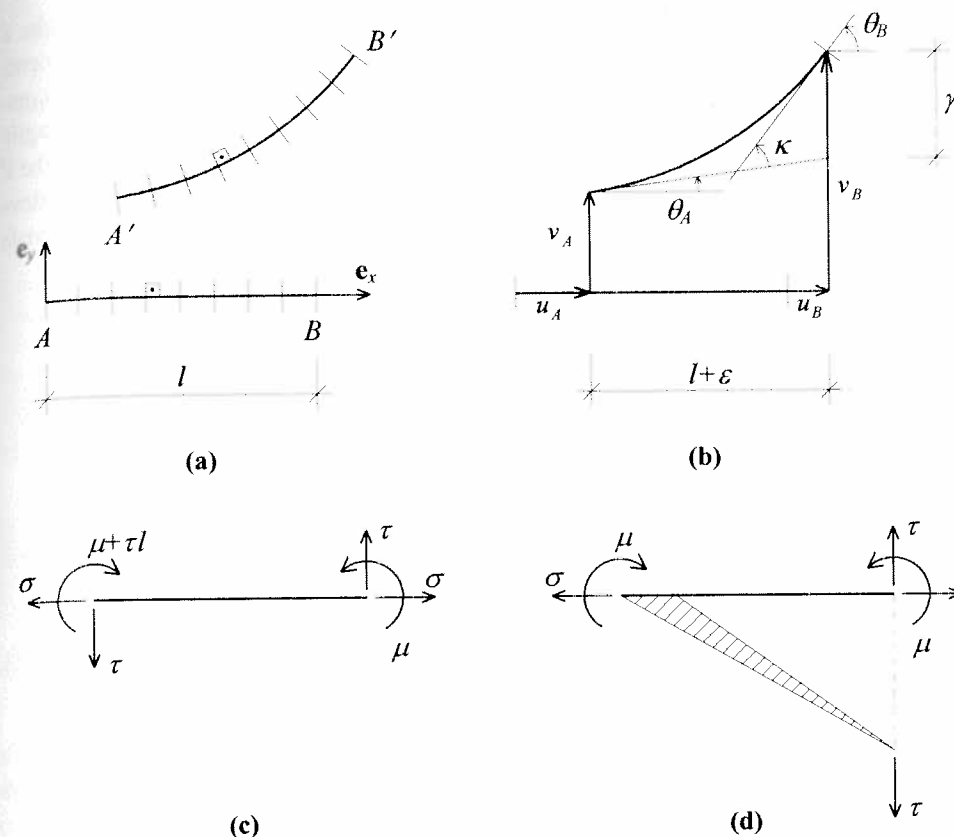


Fig. 9. Trave piana elastica rettilinea: (a) modello, (b) deformazioni, (c) e (d) tensioni.

La cinematica della trave piana è governata dalle Eq. (12). Le deformazioni hanno il significato geometrico illustrato in Fig. 9b, analoga alla Fig. 3. Le tensioni agenti alle estremità della trave sono rappresentate in Fig. 9c, analoga alla Fig. 4b. In essa è facile riconoscere il significato meccanico delle singole componenti di tensione; in particolare risulta: $\sigma = N_B$, $\tau = T_B$ e $\mu = M_B$ dove N_B , T_B ed M_B sono rispettivamente sforzo normale, taglio e momento agenti nella sezione B della trave (si veda il Par. 2.3.5). L'effetto del momento di trasporto τl è evidenziato in Fig. 9d: esso tiene conto del fatto che la forza τ agente sulla sezione A ha retta d'azione passante per B . Lo stato di tensione è descritto dal vettore $\sigma = \{\sigma, \tau, \mu\}^T$. Il legame costitutivo della trave è:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a & 0 & 0 \\ 0 & c_t & -c_l/2 \\ 0 & -c_l/2 & c_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (49)$$

La matrice elastica C dipende da quattro costanti: la lunghezza l , la rigidità assiale

c_a [FL⁻¹], la rigidezza a taglio c_t [FL⁻¹] e la rigidezza flessionale c_f [FL]. Si noti che il legame è parzialmente disaccoppiato: se la trave si deforma solo assialmente ($\varepsilon \neq 0, \gamma = \kappa = 0$), l'unica sollecitazione non nulla è lo sforzo normale: la trave si comporta cioè come una molla estensionale. Se la trave si deforma solo a taglio ($\gamma \neq 0, \varepsilon = \kappa = 0$; Fig. 10a), o solo a flessione ($\kappa \neq 0, \varepsilon = \gamma = 0$; Fig. 10b), sia il taglio che il momento sono diversi da zero. L'unico termine fuori diagonale della matrice **C** deve necessariamente essere uguale a $c_t/2$ per motivi di equilibrio e di simmetria (si veda la Fig. 8a).

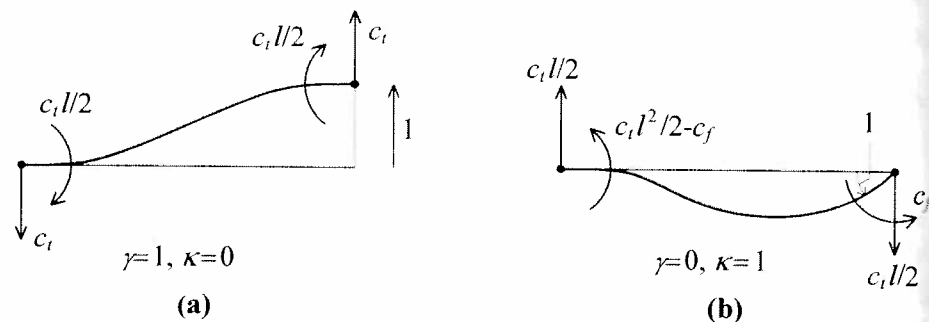


Fig. 10 Deformazioni e costanti elastiche di una trave omogenea: (a) deformazione a taglio ($\varepsilon=0, \gamma=1, \kappa=0$), (b) deformazione flessionale ($\varepsilon=0, \gamma=0, \kappa=1$)

I valori delle costanti elastiche di una trave omogenea si determinano nella Teoria delle Strutture; risolvendo il problema elastico relativo ad un mezzo continuo (sistema a deformabilità diffusa), si trova: $c_a = EA/l$, $c_t = 12EI/l^3$, $c_f = 4EI/l$, dove E è il modulo elastico del materiale, ed A ed I sono rispettivamente l'area e il momento d'inerzia baricentrico della sezione trasversale.

Invertendo il legame (49) si ha:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a & 0 & 0 \\ 0 & h_t & h_f l/2 \\ 0 & h_f l/2 & h_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \mu \end{Bmatrix} \quad (50)$$

dove il significato geometrico dei coefficienti di deformabilità h_a, h_t e h_f è illustrato in Fig. 11. Per una trave omogenea si ha: $h_a = l/EA$, $h_t = l^3/3EI$, $h_f = l/EI$.

Il lavoro virtuale interno si scrive $L_i = \sigma \varepsilon + \tau \gamma + \mu \kappa$, mentre l'energia potenziale e complementare elastica assumono nell'ordine la forma

$$\Phi = \frac{1}{2} (c_a \varepsilon^2 + c_t \gamma^2 + c_f \kappa^2 - l c_t \gamma \kappa), \quad \Psi = \frac{1}{2} (h_a \sigma^2 + h_t \tau^2 + h_f \mu^2 - l h_f \tau \mu) \quad (51)$$

• **Osservazione 15.** È facile verificare che una trave elastica è equivalente ad un organo elastico composto. Ad esempio l'organo in Fig. (a) dell'Esercizio 4 che segue è un possibile sistema equivalente. Esso ha infatti un legame costitutivo del

tipo (49) come può essere arguito in base a sole considerazioni di simmetria. Si conclude che tutti gli organi elastici monodimensionali possono essere realizzati mediante opportuni assemblaggi di molle.

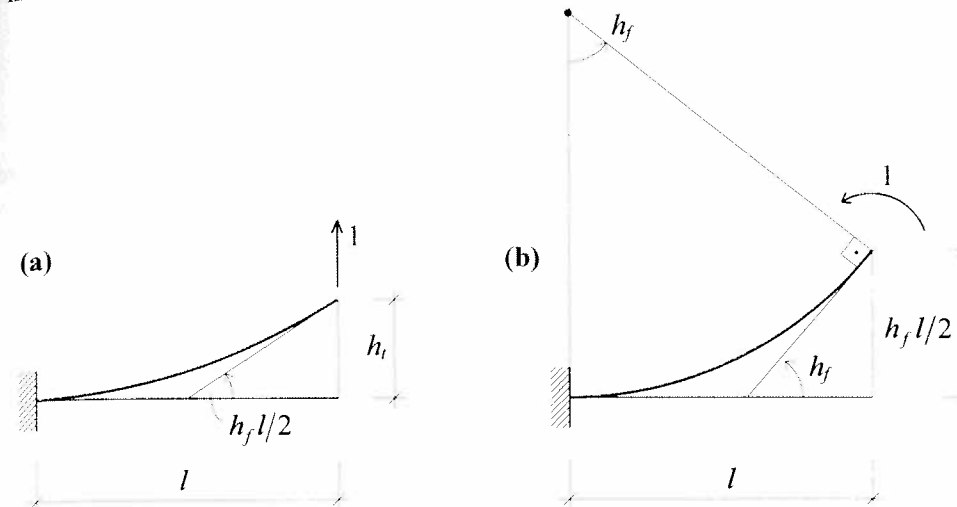
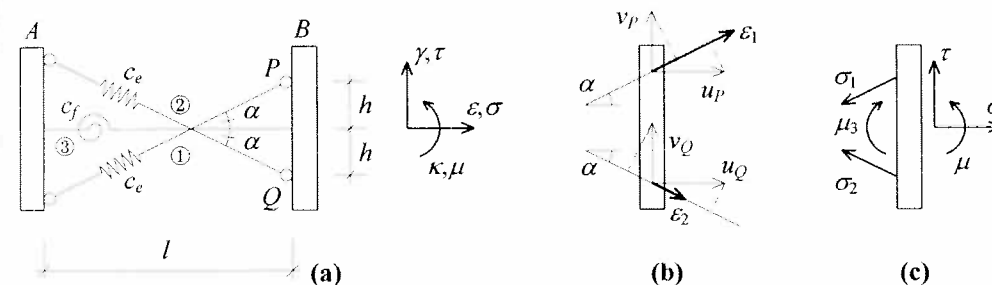


Fig. 11 Deformazioni di una trave omogenea dovute a: (a) forza di taglio ($\sigma=0, \tau=1, \mu=0$), (b) momento flettente ($\sigma=0, \tau=0, \mu=1$)

Esercizio 4: Scrivere il legame costitutivo dell'organo complesso in Fig. (a). Determinare poi i valori dei parametri c_a, c_f, α ed h che rendono il sistema equivalente ad una trave elastica omogenea di uguale lunghezza.



Si assegnano spostamenti nulli ad A e spostamenti $(\varepsilon, \gamma, \kappa)$ a B . Gli spostamenti di P e Q sono:

$$u_P = \varepsilon - \kappa h, \quad v_P = \gamma, \quad u_Q = \varepsilon + \kappa h, \quad v_Q = \gamma$$

Gli allungamenti delle molle si calcolano proiettando gli spostamenti nella direzione originaria delle molle stesse (Fig. b):

$$\varepsilon_1 = u_P \cos \alpha + v_P \sin \alpha = (\varepsilon - \kappa h) \cos \alpha + \gamma \sin \alpha$$

$$\varepsilon_2 = u_Q \cos \alpha - v_Q \sin \alpha = (\varepsilon + \kappa h) \cos \alpha - \gamma \sin \alpha$$

mentre la deformazione della molla flessionale è uguale alla rotazione κ . Gli sforzi nelle molle sono:

$$\sigma_1 = c_e \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = c_e \varepsilon_2, \quad \mu_3 = c_f \kappa$$

Imponendo l'equilibrio si ha (Fig. c):

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) \cos \alpha; \quad \tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha; \quad \mu = (\sigma_2 - \sigma_1) h \cos \alpha + \mu_3$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_e \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2c_e \sin^2 \alpha & -c_e h \sin 2\alpha \\ 0 & -c_e h \sin 2\alpha & 2c_e h^2 \cos^2 \alpha + c_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

Il legame costitutivo è quindi del tipo (49). Per l'equivalenza, i parametri c_e , c_f , α ed h devono essere tali che:

$$2c_e \cos^2 \alpha = EA/l, \quad 2c_e \sin^2 \alpha = 12 EI/l^3,$$

$$c_e h \sin 2\alpha = 6 EI/l^2, \quad 2c_e h^2 \cos^2 \alpha + c_f = 4 EI/l$$

Dal rapporto tra le prime due si ricava

$$\tan \alpha = \sqrt{12} \frac{\rho}{l}$$

dove $\rho = (I/A)^{1/2}$ è il giratore d'inerzia della sezione della trave. Poiché il rapporto ρ/l (rapporto di snellezza) è piccolo, anche α è piccolo, e dunque:

$$\alpha \cong \sqrt{12} \frac{\rho}{l}$$

Dalla prima eguaglianza, essendo $\cos \alpha \cong 1$, si ha

$$c_e = \frac{EA}{2l}$$

Dal rapporto della seconda e terza eguaglianza si ricava h :

$$h = l \frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} \cong l \frac{\alpha^2}{2\alpha} \cong \sqrt{3} \rho$$

Dall'ultima eguaglianza, tenuto conto della prima, si ricava c_f :

$$c_f = 4 \frac{EI}{l} - h^2 \frac{EA}{l} \cong \frac{EI}{l}$$

Si noti che, essendo $h = O(\rho)$, le dimensioni dell'organo elastico sono dello stesso ordine di quelle della trave equivalente.

5

Sistemi rigidi ad elasticità concentrata: stati globali di deformazione e tensione

1. Il modello a deformabilità concentrata

Si consideri un sistema a deformabilità concentrata, costituito da n_c corpi rigidi ed n_e organi monodimensionali elastici (Fig. 1). Gli organi collegano mutuamente coppie di corpi rigidi (organi elastici interni) oppure singoli corpi rigidi al suolo (organi elastici esterni).

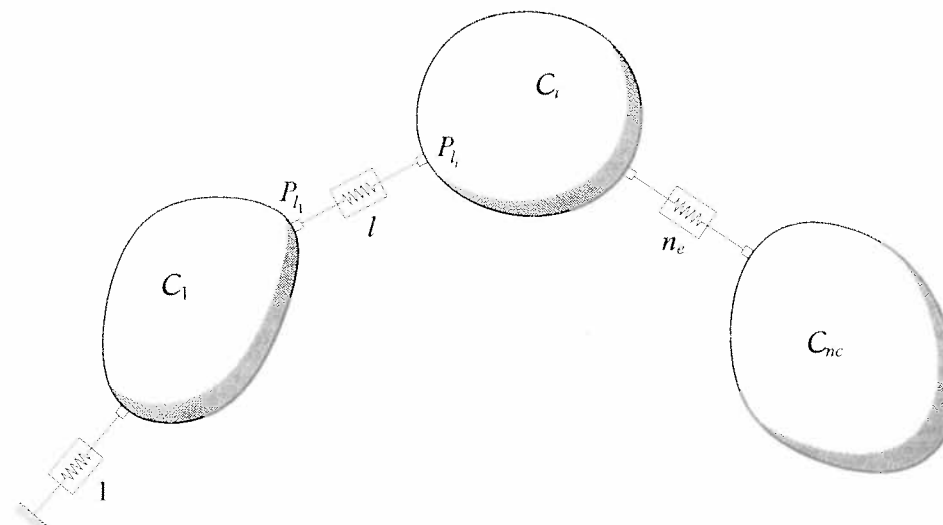


Fig. 1 Sistema elastico a deformabilità concentrata, non vincolato

Si assumano dapprima organi elastici generici, aventi ciascuno molteplicità elastica d_h ($h=1,2,\dots,n_e$) (si veda il punto 4.6.1). Si definisce molteplicità elastica globale del si-

stema la somma $d = d_1 + d_2 + \dots + d_{n_e}$, cioè il numero complessivo di componenti di deformazione o tensione. Peraltro, poiché ciascun organo di molteplicità elastica d_e è equivalente a d_h organi semplici (molle estensionali o flessionali), il complesso degli organi elastici equivale a d molle. Quindi, per semplicità, ci si riferirà di norma a sistemi costituiti da organi semplici, per i quali è $d = n_e$. Un cenno sui sistemi costituiti da organi molteplici verrà dato nel Par. 6; i sistemi di travi verranno analizzati nel Cap. 8. Nel seguito si studiano gli aspetti cinematici, statici ed il legame costitutivo del sistema (*analisi globale*), generalizzando l'analisi condotta nel capitolo precedente per il singolo organo deformabile (*analisi locale*). In particolare si pongono due problemi: (a) il problema cinematico; (b) il problema statico.

2. Cinematica : analisi globale della deformazione

2.1 Il problema cinematico

Con riferimento al sistema in Fig. 1 si studiano gli aspetti cinematici. Si definiscono le seguenti grandezze (Fig. 2):

- (a) *Campo di spostamenti del sistema.* È l'insieme degli spostamenti \mathbf{u}_{P_i} dei punti $P_i \in C_i$ ($i=1,2,\dots,n_c$). Attraverso la FGSR (1.23), scritta per ciascun corpo, questi sono esprimibili in funzione degli spostamenti generalizzati \mathbf{u}_0, θ_i ($i=1,2,\dots,n_c$), ovvero delle loro componenti in una data base $\mathbf{u}_i = \{u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$. La configurazione del sistema è quindi descritta dal vettore

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_c}\}^T \quad (1)$$

avente numero di componenti $n=6n_c$ (nello spazio) o $n=3n_c$ (nel piano).

- (b) *Stato di deformazione del sistema.* È l'insieme delle deformazioni dei singoli organi elastici. Detta ε_l la deformazione dell' l -esimo elemento ($l=1,2,\dots,d$), lo stato di deformazione è descritto dal vettore

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d\}^T \quad (2)$$

Lo stato di deformazione ed il campo degli spostamenti sono detti *congruenti* quando le equazioni di congruenza locale sono soddisfatte per tutti gli organi elastici.

Ciò premesso, si pone il seguente *problema cinematico*: assegnato lo stato di deformazione determinare, se esiste, il campo degli spostamenti congruente.

- **Osservazione 1.** Nel problema cinematico gli organi deformabili non sono necessariamente elastici, in quanto le proprietà costitutive non sono coinvolte nel problema geometrico. Si parlerà quindi semplicemente di organi deformabili.
- **Osservazione 2.** Nel problema cinematico le deformazioni degli organi sono *assunte note*. Per fissare le idee, si può ad esempio pensare che esse siano dovute a variazioni termiche, oppure a qualche altro tipo di distorsione.

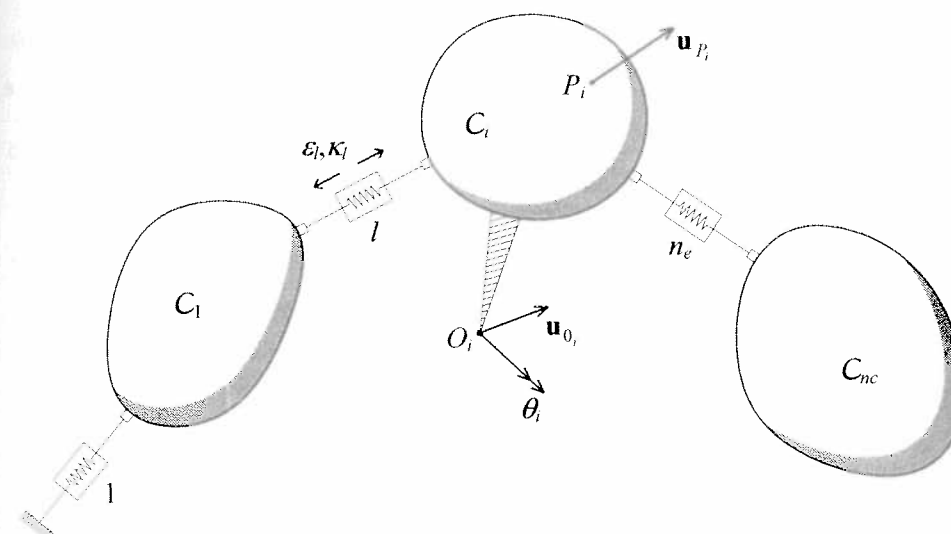


Fig. 2 Il problema cinematico per i sistemi a deformabilità concentrata

2.2 La matrice di congruenza globale

Per formulare il problema cinematico occorre scrivere le equazioni di congruenza di ciascun organo in termini degli spostamenti generalizzati. Con riferimento al generico organo interno l che collega i punti $P_i \in C_i$ e $P_j \in C_j$ (Fig. 3a), si distinguono due passi logici:

- Si scrivono le equazioni di congruenza in termini degli spostamenti dei punti materiali collegati (congruenza organo-corpo).
- Si esprimono gli spostamenti dei punti in funzione degli spostamenti generalizzati (congruenza interna ai corpi).

Se l'organo semplice è una molla estensionale orientata secondo \mathbf{e}_l si ha (passo I):

$$\varepsilon_l = (\mathbf{u}_{P_j} - \mathbf{u}_{P_i}) \cdot \mathbf{e}_l \quad (3)$$

Se è una molla flessionale di normale \mathbf{e}_{z_l} (Fig. 3b) si ha:

$$\kappa_l = (\theta_j - \theta_i) \cdot \mathbf{e}_{z_l} \quad (4)$$

Tenuto conto che (passo II, FGSR, Eq. 1.23)

$$\mathbf{u}_{P_i} = \mathbf{u}_{O_i} + \theta_i \times \mathbf{O}_i P_i, \quad \mathbf{u}_{P_j} = \mathbf{u}_{O_j} + \theta_j \times \mathbf{O}_j P_j \quad (5)$$

le deformazioni ε_l, κ_l sono *funzioni lineari* degli spostamenti generalizzati dei corpi C_i e C_j .

Se l'organo l è esterno, riguardando ad esempio C_i come il suolo è $\mathbf{u}_{P_i} \equiv \mathbf{0}$, per cui la deformazione è funzione lineare dei soli spostamenti generalizzati del corpo C_j collegato al suolo.

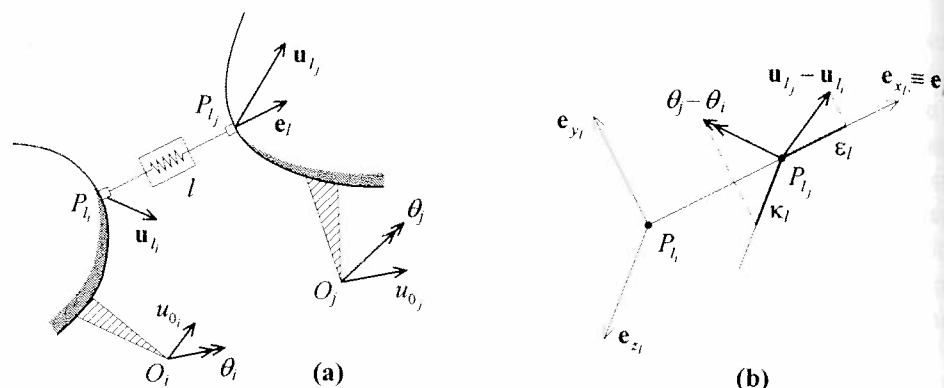


Fig. 3 Cinematica dell'organo deformabile interno

- **Osservazione 3.** Si noti che le convenzioni di segno relative alle deformazioni (3) e (4) sono concordi a quelle del Cap. 4. Infatti, introdotta una base locale ($\mathbf{e}_{x_i} \equiv \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{y_i}, \mathbf{e}_{z_i}$) (Fig. 3b), si individua un nodo iniziale P_i ed un nodo finale $P_{i'}$. Ora, la deformazione ϵ_i , che rappresenta lo spostamento relativo di $P_{i'}$ rispetto a P_i in direzione \mathbf{e}_i , è positiva quando questo spostamento è concorde all'asse \mathbf{e}_i . Similmente, la deformazione κ_i , che rappresenta la componente secondo \mathbf{e}_{z_i} della rotazione relativa di $P_{i'}$ rispetto a P_i , è positiva quando questa rotazione è concorde all'asse \mathbf{e}_{z_i} . Si può anche dire che $\epsilon_i > 0$ quando l'organo si allunga e $\kappa_i > 0$ quando la molla volge la concavità nel verso di \mathbf{e}_{y_i} . È utile introdurre una volta per tutte una convenzione per stabilire il verso di \mathbf{e}_i : numerati i corpi, se l'organo è interno, si conviene di orientare \mathbf{e}_i da C_i a C_j , con $i < j$; se l'organo è esterno, scelto $C_i \equiv C_0$ come suolo, l'asse \mathbf{e}_i è entrante nel corpo. Se il sistema è piano, questa convenzione fissa in modo univoco la base locale (levogira) ($\mathbf{e}_{x_i} \equiv \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{y_i}$), e conseguentemente i segni delle deformazioni.

Raccogliendo le deformazioni di tutti gli organi nel vettore $\boldsymbol{\varepsilon}$ (Eq. 2), si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (6)$$

Le (6) sono dette *equazioni di congruenza del sistema*, o anche equazioni implicite di congruenza. In essa $\boldsymbol{\varepsilon}$, di dimensioni $d \times 1$, è il vettore deformazione; \mathbf{u} , di dimensioni $n \times 1$ (Eq. 1), è il vettore degli spostamenti generalizzati; \mathbf{D} , di dimensioni $d \times n$, è la *matrice di congruenza globale*.

- **Osservazione 4.** La (6) è formalmente analoga alla (4.7), che è invece riferita al singolo organo (equazione di congruenza *locale*). In esse, comunque, il simbolo \mathbf{u} assume un diverso significato.
- **Osservazione 5.** Il problema (6) è formalmente analogo al problema cinematico

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{s}$$

valido per un sistema di corpi rigidi vincolato. Per quest'ultimo, infatti, sostituendo ai vincoli molteplici delle bielle e/o dei bipendoli, le equazioni di vincolo si

scrivono:

$$(\mathbf{u}_{i'} - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{e}_i = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m_1)$$

oppure:

$$(\theta_j - \theta_i) \cdot \mathbf{e}_i = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m_2)$$

con $m_1 + m_2 = m$ molteplicità globale dei vincoli, ed \mathbf{e}_i versore dell' i -esima biella o normale al bipendolo. Dal confronto delle precedenti con le (3) e (4) emerge che se bielle e molle estensionali (ovvero bipendoli e molle flessionali) sono in egual numero ($m=d$) ed egualmente disposte, si ha:

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{A}$$

ed inoltre:

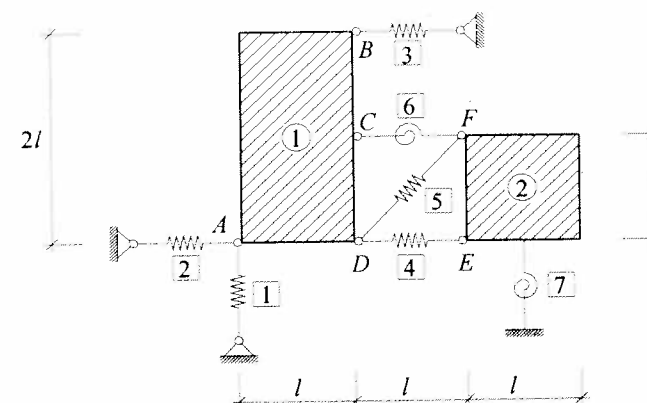
$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{s}$$

In altre parole, dal momento che le deformazioni degli organi nel problema cinematico sono assegnate, gli organi si comportano come vincoli i cui cedimenti sono uguali alle deformazioni date.

2.3 Classificazione cinematica

Il problema cinematico è governato dalle (6). Esso ammette soluzione unica solo se \mathbf{D} è quadrata ($d=n$) ed ha rango massimo. Il problema è cinematicamente indeterminato se $d < n$ ed impossibile se $d > n$. Corrispondentemente il sistema è detto *cinematicamente determinato, indeterminato o impossibile*. In particolare, se il sistema è cinematicamente determinato, assegnate ad arbitrio le deformazioni degli organi, esiste sempre un'unica configurazione in cui la congruenza è soddisfatta. Se il sistema è cinematicamente indeterminato (labile) queste configurazioni sono infinite. Se il sistema è cinematicamente impossibile non esiste alcuna configurazione congruente in cui le deformazioni assumono i valori assegnati.

Esercizio 1: Si formuli il problema cinematico per il sistema a deformabilità concentrata illustrato in figura.



Il sistema è costituito da due corpi nel piano ($n_c=2$, $n=6$) e sette organi deformabili semplici ($d=7$). È quindi cinematicamente impossibile. Si scrivono dapprima le deformazioni in termini degli spostamenti dei nodi degli organi deformabili (Eq. 3 e 4):

$$\varepsilon_1 = v_A, \quad \varepsilon_2 = u_A, \quad \varepsilon_3 = -u_B, \quad \varepsilon_4 = u_E - u_D, \\ \varepsilon_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_F + v_F - u_D - v_D), \quad \kappa_6 = \theta_2 - \theta_1, \quad \kappa_7 = \theta_2$$

avendo orientato gli assi locali e_i in accordo all'Osservazione 3 (cioè dal corpo 1 al corpo 2 per gli organi interni, e in direzione entrante nei corpi per quelli esterni).
Scelto $A \equiv O_1$ ed $E \equiv O_2$ come poli di riduzione degli spostamenti si ha:

$$u_{P_i} = u_{O_i} - \theta_i y_i \\ v_{P_i} = v_{O_i} + \theta_i x_i \quad (i=1,2)$$

da cui le equazioni di congruenza si scrivono, in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \kappa_6 \\ \kappa_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . & . \\ -1 & . & 2l & . & . & . & . \\ -1 & . & . & 1 & . & . & . \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -l\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -l\frac{\sqrt{2}}{2} & . \\ . & . & -1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{O_1} \\ v_{O_1} \\ \theta_1 \\ u_{O_2} \\ v_{O_2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di congruenza \mathbf{D} .

2.4 Sistemi cinematicamente impossibili: le equazioni di compatibilità cinematica

Si è detto che quando la molteplicità elastica globale d è maggiore del numero dei g.d.l. dei corpi n , il problema cinematico (6) è impossibile, con grado di sovradeterminazione $r=d-n$. Tuttavia è noto dal teorema di Rouché-Capelli che se il vettore ε è opportuno, il problema ammette egualmente soluzione. Le condizioni che devono essere soddisfatte dalle deformazioni ε perché il problema cinematicamente impossibile ammetta egualmente soluzione sono note come equazioni di compatibilità cinematica, o equazioni esplicite di congruenza. Può anche dirsi che le equazioni di compatibilità cinematica rappresentano le condizioni di solvibilità delle equazioni di congruenza.

Per ricavare queste condizioni può procedersi come segue (si veda anche l'Appendice A.2). Nell'ipotesi che \mathbf{D} abbia rango massimo n , si partiziona il sistema (6) in modo da isolare un minore principale non nullo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}, \quad \det \mathbf{D}_1 \neq 0 \quad (7)$$

Risolvendo le prime n equazioni si ottiene $\mathbf{u} = \mathbf{D}_1^{-1} \varepsilon_1$, che sostituita nelle rimanenti

$r=d-n$ equazioni fornisce:

$$\varepsilon_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^{-1} \varepsilon_1 = \mathbf{0} \quad (8)$$

Le (8) sono le cercate condizioni di solvibilità. Esse possono porsi nella forma

$$\mathbf{Q} \varepsilon = \mathbf{0} \quad (9)$$

dove

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (10)$$

è la matrice di compatibilità cinematica, di dimensioni $r \times d$ (si noti l'analogia tra la (9) e la (1.45), valida per i sistemi rigidi, dove si è utilizzato il medesimo simbolo \mathbf{Q}).

- **Osservazione 6.** Il procedimento illustrato ha un'immediata interpretazione meccanica. Si pensi dapprima di sopprimere gli organi deformabili la cui deformazione è ε_2 . Il sistema che ne risulta, detto *sistema principale*, è cinematicamente determinato; trova quindi una nuova configurazione congruente descritta dal campo di spostamenti $\mathbf{u} = \mathbf{D}_1^{-1} \varepsilon_1$. In corrispondenza dei punti di applicazione degli organi soppressi si verificano degli spostamenti, assoluti o relativi, pari a $\mathbf{D}_2 \mathbf{u} = \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1^{-1} \varepsilon_1$. Perché questi siano congruenti con le effettive deformazioni assegnate alle molle inizialmente sopresse deve essere $\mathbf{D}_2 \mathbf{u} = \varepsilon_2$, da cui la (8).

Esercizio 2: Si scrivano le equazioni di compatibilità cinematica per il sistema dell'esercizio 1. Poiché $r=d-n=1$ si ha un'unica equazione di congruenza. Il minore principale corrispondente alle prime sei righe e colonne della matrice \mathbf{D} è certamente non nullo. Infatti, se si sopprime la molla numero 7, il sistema è cinematicamente determinato (il corpo 2 è mutuamente incastrato al corpo 1 che è appoggiato al suolo). Risolvendo le prime sei equazioni si ottiene

$$u_{O_1} = \varepsilon_2, \quad v_{O_1} = \varepsilon_1, \quad \theta_1 = \frac{1}{2l}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ u_{O_2} = \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \quad v_{O_2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \kappa_6 l + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \sqrt{2}\varepsilon_5, \quad \theta_2 = \frac{1}{2l}(\varepsilon_2 + 2\kappa_6 l + \varepsilon_3)$$

che sostituite nell'ultima equazione forniscono la condizione cercata:

$$\frac{1}{2l}(\varepsilon_2 + 2\kappa_6 l + \varepsilon_3) = \kappa_7$$

Questa esprime l'eguaglianza della rotazione del corpo 2, dovuta alle deformazioni $\varepsilon_1 \div \varepsilon_6$, alla rotazione assegnata κ_7 .

2.5 Sistemi cinematicamente indeterminati: i modi rigidi

Se la molteplicità elastica globale d è minore del numero dei g.d.l. dei corpi n , il problema cinematico è indeterminato, con grado di indeterminazione $l=d-n$. Effettuando la partizione (si veda anche l'Appendice A.1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}, \quad \det \mathbf{D}_1 \neq 0 \quad (11)$$

la soluzione può scriversi nella forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{U}\mathbf{q} \quad (12)$$

dove

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \varepsilon, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (13)$$

con \mathbf{q} arbitrario. Il vettore $\mathbf{u}_q := \mathbf{U}\mathbf{q}$ rappresenta il generico *spostamento rigido* del sistema, a cui è associato uno stato di deformazione nullo. La (12) è in analogia con la (1.42), valida per i sistemi rigidi. La soluzione (12) è somma di due termini: il primo, \mathbf{u}_ε , è una soluzione particolare del problema non omogeneo ($\varepsilon \neq 0$); il secondo, $\mathbf{u}_q := \mathbf{U}\mathbf{q}$, è la soluzione generale del problema omogeneo ($\varepsilon = 0$). Le colonne di \mathbf{U} descrivono i modi rigidi del sistema labile, cioè particolari soluzioni del problema cinematico omogeneo.

3. Statica: analisi globale della tensione

3.1 Il problema statico

Con riferimento al sistema in Fig. 1 si studiano gli aspetti statici (Fig. 4). Si consideri un sistema di forze attive \mathbf{F}_k applicate in punti $P_k \in C_i$ ($i=1,2,\dots,n_c$), le cui forze generalizzate sono $\mathbf{f}_i = \{X_{0_i}, Y_{0_i}, Z_{0_i}, M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i}\}^T$ (Eq. 2.17). Il sistema di forze è quindi equivalente al vettore delle forze generalizzate

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n_c}\}^T \quad (14)$$

di lunghezza $n=6n_c$, ovvero $n=3n_c$. Si definisce la seguente grandezza:

(c) *Stato di tensione del sistema.* È l'insieme delle tensioni agenti nei singoli organi elastici. Detta σ_l la tensione nell' l -esimo elemento ($l=1,2,\dots,d$), supposto di molteplicità 1, lo stato di tensione è descritto dal vettore

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d\}^T \quad (15)$$

Lo stato di tensione è detto equilibrato con il dato sistema di forze attive se le equazioni cardinali della statica sono soddisfatte per tutti i corpi rigidi.

Ciò premesso si pone il seguente *problema statico*: assegnato un sistema di forze attive applicate ai corpi, determinare, se esiste, lo stato di tensione equilibrato.

- **Osservazione 7.** In accordo all'Osservazione 4.4 le condizioni di equilibrio dei corpi vengono imposte nella *configurazione indeformata del sistema*. In realtà, perché le forze elastiche possano svilupparsi, gli organi elastici devono deformarsi e, conseguentemente, la geometria del sistema deve cambiare. Tuttavia, se si ammette che le deformazioni degli organi siano piccole in rapporto alle dimensioni dei corpi, si può confondere la configurazione deformata (incognita) con quella indeformata (nota), ed imporre l'equilibrio in quest'ultima.

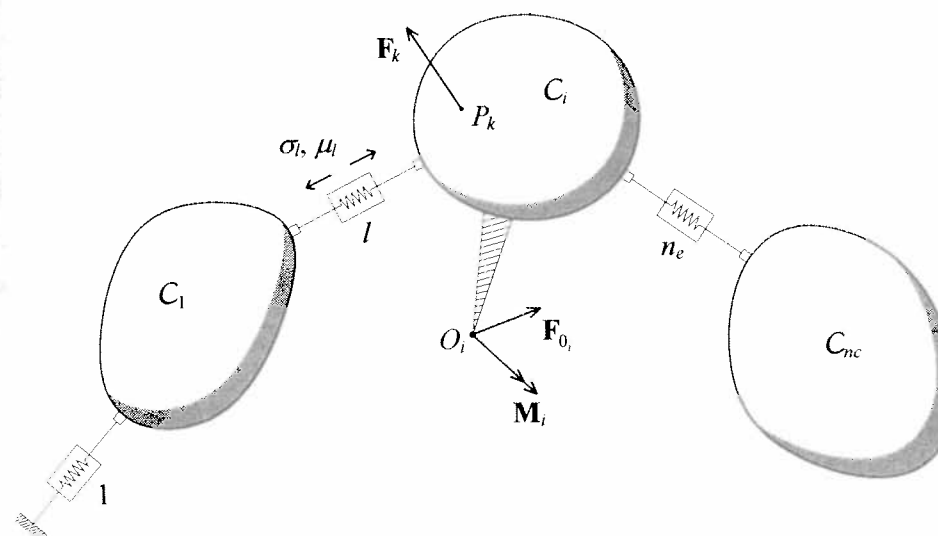


Fig. 4 Il problema statico per i sistemi a deformabilità concentrata

- **Osservazione 8.** In base all'osservazione precedente, nel problema statico gli organi deformabili scambiano con i corpi azioni di contatto, ma non si deformano (più precisamente, subiscono deformazioni trascurabili). Quindi, non sono necessariamente elastici, in quanto le loro proprietà costitutive non sono coinvolte nel problema dell'equilibrio. Si parlerà quindi semplicemente di organi deformabili.

3.2 La matrice di equilibrio globale

Per definire il problema statico occorre scrivere le equazioni cardinali della statica di ciascun corpo in termini delle tensioni che sollecitano gli organi deformabili. Si distinguono due passi logici:

I. Per ciascun corpo si scrivono le equazioni cardinali della statica, tenuto conto delle forze interne applicate da tutti gli organi collegati al corpo (equilibrio del corpo).

II. Si esprimono le forze interne in funzione delle tensioni (equilibrio degli organi).

Sia l il generico organo interno che collega i punti $P_l \in C_i$ e $P_l \in C_j$ (Fig. 5a). L'organo è sollecitato alle estremità da forze \mathbf{t}_l , \mathbf{t}_l e coppie \mathbf{m}_l , \mathbf{m}_l che rappresentano l'azione di contatto esercitata dai corpi C_i e C_j (Fig. 5b); esse costituiscono le forze interne al sistema. Per il principio di azione e reazione l'organo esercita sui corpi le forze $-\mathbf{t}_l$, $-\mathbf{t}_l$ e le coppie $-\mathbf{m}_l$, $-\mathbf{m}_l$. Per l'equilibrio del corpo C_i devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica (passo I)

$$\begin{aligned} -\sum_l \mathbf{t}_l + \mathbf{F}_{0_i} &= \mathbf{0} \\ -\sum_l \mathbf{O}_i \mathbf{P}_l \times \mathbf{t}_l - \sum_l \mathbf{m}_l + \mathbf{M}_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (16)$$

dove le sommatorie sono estese a tutti gli organi l applicati a C_i . Per l'equilibrio degli

organi (passo II), se questi sono molle estensionali, è (Fig. 5c):

$$\mathbf{t}_{l_i} = -\sigma_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{t}_{l_j} = \sigma_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{m}_{l_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_{l_j} = \mathbf{0} \quad (17)$$

mentre, se sono molle flessionali di asse \mathbf{e}_{z_i} , è:

$$\mathbf{t}_{l_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}_{l_j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_{l_i} = -\mu_l \mathbf{e}_{z_i}, \quad \mathbf{m}_{l_j} = \mu_l \mathbf{e}_{z_i} \quad (18)$$

dove σ è lo sforzo normale della molla e μ è il momento flettente. Sostituendo le (17) e (18) nelle (16) si ottengono, in definitiva, equazioni di equilibrio lineari nelle tensioni.

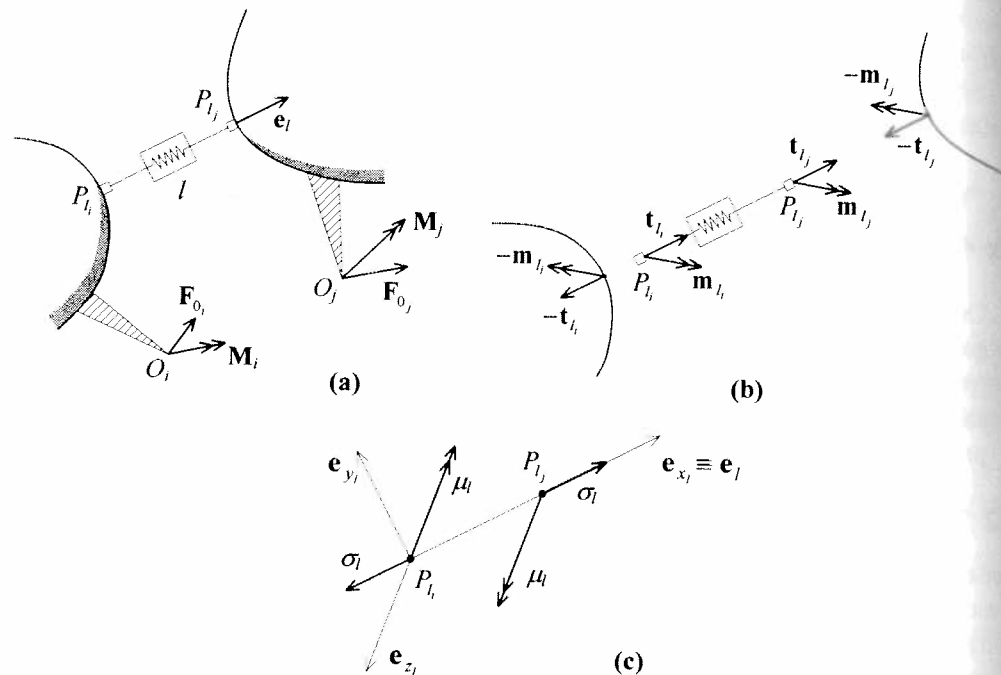


Fig. 5 Statica dell'organo deformabile interno

- **Osservazione 9.** Si noti che le convenzioni di segno relative alle tensioni (17) e (18) sono concordi a quelle del Cap. 4. Infatti, introdotta una base locale ($\mathbf{e}_{x_i} \equiv \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_{y_i}, \mathbf{e}_{z_i}$) (Fig. 5c) e conseguentemente un nodo iniziale P_{l_i} ed un nodo finale P_{l_j} , le tensioni σ_l e μ_l sono positive quando le forze interne agenti sul nodo finale sono concordi con gli assi. Si può anche dire che $\sigma_l > 0$ quando la tensione è di trazione e che $\mu_l > 0$ quando inflette la molla in modo che rivolga la concavità nel verso positivo di \mathbf{e}_{y_i} .

Proiettando le equazioni di equilibrio in una data base e raccogliendo le tensioni di tutti gli organi nel vettore σ (Eq. 15), si ottiene:

$$\mathbf{E}\sigma = \mathbf{f} \quad (19)$$

Le (19) sono le equazioni di equilibrio del sistema. In esse σ , di dimensioni $d \times 1$ è il

vettore tensione; \mathbf{f} , di dimensioni $n \times 1$ (Eq. 14), è il vettore forze attive generalizzate; \mathbf{E} , di dimensioni $n \times d$ è la matrice di equilibrio del sistema.

- **Osservazione 10.** La (19) è formalmente analoga alla (4.18), che rappresenta l'equilibrio del singolo organo. Nella (19), comunque, compaiono le forze attive generalizzate \mathbf{f} , mentre nella (4.18) sono presenti le forze interne al sistema \mathbf{t} , in quanto forze esterne all'organo.

- **Osservazione 11.** Il sistema (19) è formalmente analogo al problema statico

$$\mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

valido per un sistema di corpi rigido vincolato. Per quest'ultimo, sostituendo i vincoli molteplici con bielle e/o dei bipendoli, le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{aligned} \sum_l \mathbf{R}_{l_i} + \mathbf{F}_{0_i} &= \mathbf{0} \\ \sum_l \mathbf{O}_i \mathbf{P}_{l_i} \times \mathbf{R}_{l_i} + \sum_l \mathbf{M}_{l_i} + \mathbf{M}_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n_c)$$

dove le sommatorie sono estese a tutti i vincoli applicati a C_i . Inoltre, in forza della caratterizzazione statica dei vincoli, per le bielle si ha:

$$\mathbf{R}_{l_i} = -R_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{R}_{l_j} = R_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{M}_{l_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{l_j} = \mathbf{0}$$

e per i bipendoli di asse \mathbf{e}_l si ha

$$\mathbf{R}_{l_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{l_j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{l_i} = -\mu_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{M}_{l_j} = \mu_l \mathbf{e}_l$$

Dal confronto delle precedenti con le (16÷18) emerge che, se bielle e molle estensionali (ovvero bipendoli e molle flessionali) sono in egual numero ($m=d$) ed egualmente disposte, si ha:

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{B}$$

ed inoltre

$$\sigma \equiv -\mathbf{r}$$

In altre parole, dal momento che non si tiene conto della deformazione nella scrittura dell'equilibrio, gli organi deformabili si comportano come vincoli, le cui tensioni sono, a meno del segno, uguali alle reazioni vincolari.

- **Osservazione 12.** La ragione del segno negativo che appare nell'uguaglianza tra tensioni e reazioni si spiega come segue. Con riferimento ad una biella interna (Fig. 6a), assunto il cedimento vincolare s positivo di allontanamento tra i corpi (o allontanamento dal suolo, se si tratta di un vincolo esterno), è conveniente assumere positiva la reazione vincolare R che compie in esso *lavoro virtuale vincolare positivo*, $L_v = Rs > 0$, in modo da preservare la dualità (cfr. Cap. 3). Con riferimento ad una molla interna (Fig. 6b), assunta positiva la deformazione ε di allungamento, è conveniente assumere positiva la tensione σ che compie in essa *lavoro virtuale interno positivo*, $L_i = \sigma\varepsilon > 0$; la tensione che agisce sul corpo è quella uguale e contraria. Dal confronto si vede che, mentre R è positiva quando è *entrante* nel corpo, σ è positiva quando è *uscente*, così spiegando la differenza di segno. In altre parole, mentre per i sistemi vincolati si privilegia il *lavoro esterno*, compiuto dalle *reazioni agenti sui corpi* nello spostamento relativo, per i sistemi a deformabilità concentrata si privilegia il *lavoro interno*, compiuto dalle *tensioni agenti sugli organi*, piuttosto che dalle tensioni agenti sui corpi. Un analogo ragionamento può farsi per le molle flessionali e, più in generale, per gli organi composti.

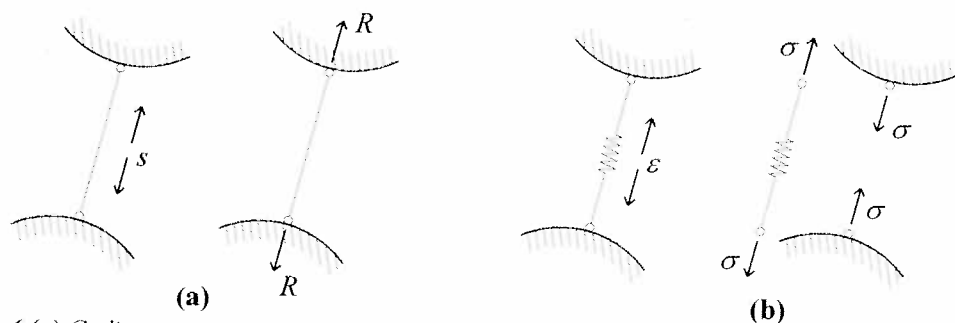


Fig. 6 (a) Cedimenti e reazioni vincolari positivi; (b) deformazioni e tensioni positive

3.3 Classificazione statica

Il problema statico è governato dalle (19). Esso ammette soluzione unica solo se \mathbf{E} è quadrata ($d=n$) ed ha rango massimo. Il problema è staticamente indeterminato se $d>n$ ed impossibile se $d<n$. Corrispondentemente il sistema è detto *staticamente determinato*, *indeterminato* (iperstatico) o *impossibile*. In particolare, se il sistema è staticamente determinato, assegnate ad arbitrio le forze attive, esiste sempre un unico stato di tensione equilibrato. Se il sistema è staticamente indeterminato gli stati di tensione equilibrati sono infiniti. Se il sistema è staticamente impossibile, in generale non esiste alcuno stato di tensione che possa equilibrare le forze assegnate.

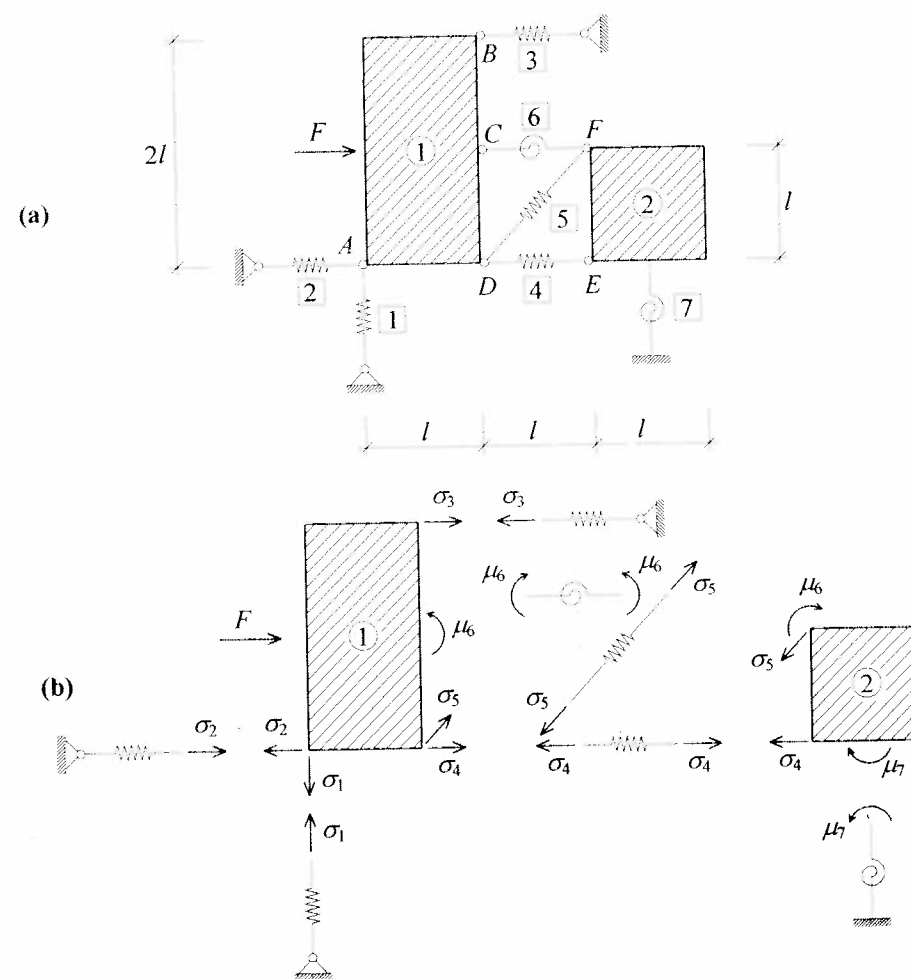
Esercizio 3: Si formuli il problema statico per il sistema a deformabilità concentrata illustrato in Fig. (a).

Si tratta dello stesso sistema dell'esercizio 1. Poiché $d=7$, $n=6$, il sistema è staticamente indeterminato. Le forze scambiate tra organi e corpi sono illustrate in Fig. (b) con il loro segno positivo, avendo orientato gli assi locali dal corpo 1 al corpo 2, ovvero entranti nei corpi (Osservazione 9). Scelti $A \equiv O_1$ ed $E \equiv O_2$ come poli di riduzione delle forze, le equazioni cardi-

nali della statica dei due corpi si scrivono, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} & 1 & -1 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ 1 & & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & & 2l & & -l\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \\ & & & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & \\ & & & & -l\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ \\ \\ -Fl \\ \\ \\ \end{Bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di equilibrio \mathbf{E} .



3.4 Sistemi staticamente indeterminati: le incognite iperstatiche

Si è detto che se la molteplicità elastica globale è maggiore del numero delle equazioni cardinali della statica ($d > n$), il problema statico (19) è indeterminato (sistema *iperstatico di grado* $r = d - n$). Esistono cioè ∞^r stati di tensione equilibrati; per determinarli può procedersi come segue. Nell'ipotesi che \mathbf{E} abbia rango massimo n , si partiziona il sistema (19) in modo da isolare un minore principale non nullo (si veda anche l'Appendice A.1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \quad \det \mathbf{E}_1 \neq 0 \quad (20)$$

Le (20) possono essere risolte attribuendo alle r incognite eccedenti valori arbitrari, $\sigma_2 := \chi$. Si ottiene:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f} + \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \chi \quad (21)$$

La (21) può porsi nella forma compatta:

$$\sigma = \sigma_0 + \mathbf{S} \chi \quad (22)$$

avendo posto

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Il vettore χ , di dimensioni $r \times 1$, è detto *vettore delle incognite iperstatiche*; la matrice \mathbf{S} , di dimensioni $d \times r$, è detta *matrice delle autotensioni*. La (22) è in analogia con la (2.31), valida per i sistemi rigidi. Si noti che \mathbf{S} non dipende da \mathbf{f} , ma solo dalle proprietà del sistema. La (22) mostra che lo stato di tensione equilibrato σ è somma di due contributi:

- (a) una soluzione particolare del problema non omogeneo, σ_0 , (in quanto associata ad una particolare scelta del minore principale \mathbf{E}_1);
- (b) la soluzione generale del problema omogeneo

$$\sigma_\chi := \mathbf{S} \chi \quad (24)$$

che rappresenta il più generico stato di tensione autoequilibrato (cioè in equilibrio con forze attive nulle). Le σ_χ sono dette *autotensioni*.

- **Osservazione 13.** La matrice \mathbf{S} è suscettibile della seguente interpretazione. Ponendo l' i -esima incognita iperstatica uguale ad 1 e tutte le altre uguali a zero, l' i -esima colonna di \mathbf{S} si identifica con il vettore σ_χ . Quindi, posto $\chi = \{\chi_i\}$ e partizionando \mathbf{S} per colonne si ha:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_2 & \dots & \sigma'_r \end{bmatrix}$$

dove σ'_i è un particolare stato di autotensione, in cui $\chi_i = 1$ e $\chi_j = 0$ per $j \neq i$. Il più

generico stato di autotensione (24) è espresso come combinazione lineare a coefficienti arbitrari χ_i degli r stati di autotensioni particolari σ'_i ,

$$\sigma_\chi = \sum_{i=1}^r \chi_i \sigma'_i$$

Tenuto conto delle forze attive si ha, in definitiva

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^r \chi_i \sigma'_i$$

- **Osservazione 14.** Il procedimento illustrato ha un'immediata interpretazione meccanica. Si pensi dapprima di sopprimere gli organi la cui tensione è σ_2 e di sostituire ad essi delle forze attive note $\sigma_2 = \chi$. Il sistema che ne risulta, detto *sistema principale*, è staticamente determinato; esso è sollecitato dalle forze attive proprie \mathbf{f} e dalle incognite iperstatiche χ che, ridotte agli stessi poli delle forze attive, forniscono un contributo $-\mathbf{E}_2 \chi$ alle forze generalizzate. Poiché il sistema principale è staticamente determinato, esiste un unico stato di tensione σ_1 equilibrato. Procedendo per sovrapposizione degli effetti, $\sigma_{10} = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{f}$ è lo stato equilibrato con le forze attive, e $\sigma_{1\chi} = -\mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_2 \chi$ è lo stato equilibrato con le incognite iperstatiche.

Esercizio 4: Si determinino gli stati di tensione equilibrati del sistema dell'esercizio 3.

Poiché $r = d - n = 1$ si ha un'unica incognita iperstatica. Il minore principale 6×6 corrispondente alle prime sei righe e colonne della matrice \mathbf{E} è certamente non nullo. Infatti, se si sopprime la molla numero 7, il sistema è staticamente determinato. Portando a secondo membro la settima colonna di \mathbf{E} moltiplicata per μ_7 , le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{bmatrix} . & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{2}/2 & . \\ 1 & . & . & . & -\sqrt{2}/2 & . \\ . & . & 2l & . & -l\sqrt{2}/2 & -1 \\ . & . & . & 1 & \sqrt{2}/2 & . \\ . & . & . & . & \sqrt{2}/2 & . \\ . & . & . & . & -l\sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ . \\ -Fl \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} - \chi \begin{Bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \chi := \mu_7 \quad (a)$$

Risolviendo il sistema in corrispondenza delle sole forze attive ($\chi = 0$) si trova:

$$\sigma_{10} = 0, \quad \sigma_{20} = \frac{1}{2} F, \quad \sigma_{30} = -\frac{1}{2} F, \quad \sigma_{40} = 0, \quad \sigma_{50} = 0, \quad \mu_{60} = 0 \quad (b)$$

Lo stato rappresenta uno degli infiniti stati equilibrati con le forze attive, in particolare quello corrispondente a $\mu_7 = 0$. Risolvendo il sistema in corrispondenza dell'incognita iperstatica (forze attive nulle) si trova:

$$\sigma_{1\chi} = 0, \quad \sigma_{2\chi} = -\frac{1}{2l} \chi, \quad \sigma_{3\chi} = -\frac{1}{2l} \chi, \quad \sigma_{4\chi} = 0, \quad \sigma_{5\chi} = 0, \quad \mu_{6\chi} = -\chi \quad (c)$$

Le precedenti rappresentano il più generale stato di tensione autoequilibrato (autotensioni).

Da esse si ricava la matrice delle autotensioni (23₂):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (d)$$

Sovrapponendo i due effetti (b) e (c) si ottiene il più generale stato di tensione equilibrato con le forze attive date.

3.5 Sistemi staticamente impossibili: le equazioni di compatibilità statica

Se la molteplicità elastica d è minore del numero delle equazioni cardinali della statica, il problema dell'equilibrio (19) è impossibile, con grado di sovradeterminazione $l=n-d$. Tuttavia il problema ammette egualmente soluzione se il vettore delle forze generalizzate soddisfa le equazioni di *compatibilità statica*. Effettuata la partizione (si veda anche l'Appendice A.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{E}_1 \neq 0 \quad (25)$$

risolvendo le prime d equazioni e sostituendo nelle restanti $l=n-d$ si ottiene

$$\mathbf{V}\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (26)$$

con

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Le (26) sono le cercate condizioni di solvibilità (si noti l'analogia con le (2.34), relative ai sistemi rigidi, dove si è utilizzato il medesimo simbolo \mathbf{V}).

4. La dualità. Il teorema dei lavori virtuali

4.1 Le proprietà di dualità

Si è già osservato (Osservazioni 5 e 11) che i problemi cinematico e statico dei sistemi a deformabilità concentrata sono formalmente analoghi agli stessi problemi formulati per i sistemi rigidi. In particolare, la matrice di congruenza \mathbf{D} e la matrice di equilibrio \mathbf{E} possono essere identificate rispettivamente con la matrice di congruenza \mathbf{A} e di equilibrio \mathbf{B} di un sistema vincolato, ottenuto sostituendo agli organi deformabili i vincoli corrispondenti:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \quad (28)$$

Quindi, tutto quanto osservato nel Cap. 3 circa la dualità tra il problema cinematico e il problema statico dei sistemi rigidi continua a valere per i sistemi a deformabilità concentrata. In particolare si ha (*prima proprietà di dualità*)

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^T \quad (29)$$

se sono soddisfatte tutte le condizioni precisate nel Cap. 3 circa le scelte dei poli di

riduzione, delle basi, e della numerazione di corpi ed organi. La proprietà (29) può essere verificata dal confronto delle matrici \mathbf{D} ed \mathbf{E} ottenute rispettivamente negli esercizi 1 e 3.

Una seconda proprietà di dualità sussiste per i sistemi cinematicamente impossibili/staticamente indeterminati. Essa lega la matrice di compatibilità cinematica \mathbf{Q} (Eq. 10) alla matrice delle autotensioni \mathbf{S} (Eq. 23₂). Tenuto conto che per i sistemi iperstatici è:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

con \mathbf{D}_1 ed \mathbf{E}_1 quadrate e (per ipotesi) non singolari, dalle (29) segue che:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1^T, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{D}_2^T \quad (31)$$

Quindi, poiché nella (23₂) è $\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2 = (\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^{-1})^T$, si ha (*seconda proprietà di dualità o dei sistemi iperstatici*):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^T \quad (32)$$

cioè, la matrice di compatibilità cinematica è la trasposta della matrice delle autotensioni. La proprietà (32) può essere verificata dal confronto delle matrici \mathbf{Q} ed \mathbf{S} ottenute rispettivamente negli esercizi 2 e 4.

Una terza proprietà di dualità sussiste per i sistemi cinematicamente indeterminati/staticamente impossibili. Essa lega la matrice dei modi rigidi \mathbf{U} (Eq. 13₂) alla matrice di compatibilità statica \mathbf{V} (Eq. 27). Tenuto conto che per i sistemi labili è:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

e procedendo come sopra, si verifica che (*terza proprietà di dualità, o dei sistemi labili*):

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^T \quad (34)$$

cioè, la matrice di compatibilità statica \mathbf{V} è la trasposta della matrice dei modi rigidi \mathbf{U} . Le relazioni precedenti possono essere sintetizzate nel seguente quadro, analogo a quello del Par. 3.1.4 relativo ai sistemi rigidi.

	Cinematica $\mathbf{D}\mathbf{u}=\varepsilon$	Statica $\mathbf{D}^T\sigma=\mathbf{f}$
Sistemi indeterminati	$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{U}\mathbf{q}$	$\sigma = \sigma_0 + \mathbf{S}\chi$
Sistemi impossibili	$\mathbf{S}^T\varepsilon=\mathbf{0}$	$\mathbf{U}^T\mathbf{f}=\mathbf{0}$

4.2 Il teorema dei lavori virtuali

Un altro aspetto della dualità è il *teorema dei lavori virtuali (TLV)*. Si consideri un campo di spostamenti e uno stato di deformazione congruenti, per i quali cioè siano soddisfatte le equazioni di congruenza:

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (35)$$

Si consideri poi un sistema di forze ed uno stato di tensione equilibrati, per i quali siano soddisfatte le equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (36)$$

Tra i due stati non esiste in generale alcun nesso di causa ed effetto, nel senso che le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ non sono legate alle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ da alcuna legge costitutiva e corrispondentemente gli spostamenti \mathbf{u} non conseguono all'applicazione delle forze \mathbf{f} .

- **Osservazione 15.** Si vedrà in seguito che alle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ del problema (35) corrispondono delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_I$, e che alle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_{II}$ del problema (36) corrispondono delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_{II}$. Qui però si ignorano le tensioni $\boldsymbol{\sigma}_I$ e le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_{II}$, e si fa riferimento soltanto alle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ e alle tensioni $\boldsymbol{\sigma}_{II}$.

Si calcola quindi il *lavoro virtuale esterno* compiuto dalle forze attive generalizzate \mathbf{f} negli spostamenti generalizzati \mathbf{u} (uguale, per quanto visto nel Cap. 3, al lavoro compiuto dalle singole forze negli spostamenti dei corrispondenti punti di applicazione). Si ha, utilizzando nell'ordine le (36), (29) e (35):

$$L_e = \mathbf{f}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = L_i \quad (37)$$

avendo ricordato la definizione di *lavoro virtuale interno* (Eq. 4.26).

Il TLV si enuncia come segue: *il lavoro virtuale esterno compiuto da un sistema di forze in un campo di spostamenti, eguaglia il lavoro virtuale interno compiuto dallo stato di tensione equilibrato con le forze nello stato di deformazione congruente con gli spostamenti*. In simboli:

$$L_e = L_i \quad (38)$$

ovvero (equazione dei lavori virtuali, ELV):

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (39)$$

- **Osservazione 16.** Si osservino analogie e differenze tra la (38) e l'ELV (3.28) valida per sistemi vincolati, $L_e = L_a + L_v = 0$. Nel caso in esame il lavoro esterno è costituito dal solo lavoro attivo, in quanto non sono presenti vincoli. Tuttavia esso non è uguale a zero, ma è uguale al lavoro virtuale interno, che è invece assente nei sistemi vincolati. Quindi lo stesso lavoro esterno attivo $L_e = L_a = \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ è uguagliato in un caso da $L_i = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$, e nell'altro da $-L_v = -\mathbf{r}^T \mathbf{s}$. Ora, se si assimilano gli organi deformabili a vincoli, come si è visto nelle Osservazioni 5 e 11 è $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{s}$ e $\boldsymbol{\sigma} \equiv -\mathbf{r}$, cosicché L_i e $-L_v$ sono uguali. Detto in altre parole, lo stesso lavoro, nel caso dei sistemi vincolati è compiuto dalle reazioni (lavoro esterno), e nel caso dei sistemi a deformabilità concentrata è compiuto dalle tensioni (lavoro interno), e quindi appare di segno opposto, come emerge chiaramente dalla Fig. 6.

- **Osservazione 17.** In accordo all'Osservazione 3.11, stante la dualità (29), il problema cinematico (6) e il problema statico (19) sono *problemi aggiunti*. Il TLV (39) rappresenta l'*identità bilineare del problema*.

4.3 I corollari del teorema dei lavori virtuali

In analogia a quanto visto per i sistemi vincolati (cfr. Par. 3.2.5), sussistono due corollari del TLV:

1° corollario (degli spostamenti e deformazioni virtuali): Dato un sistema di forze attive e tensioni $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\sigma})$, ed un campo arbitrario di spostamenti e deformazioni virtuali congruenti $(\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\varepsilon})$, se le forze attive compiono negli spostamenti virtuali lavoro esterno uguale al lavoro interno compiuto dalle tensioni nelle deformazioni virtuali, il sistema di forze e tensioni è equilibrato.

2° corollario (delle forze e tensioni virtuali): Dato un campo di spostamenti e deformazioni $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ed un sistema arbitrario di forze attive e tensioni virtuali equilibrate $(\delta\mathbf{f}, \delta\boldsymbol{\sigma})$, se le forze attive virtuali compiono negli spostamenti lavoro esterno uguale al lavoro interno compiuto dalle tensioni virtuali nelle deformazioni, il campo di spostamenti e deformazioni è congruente.

I corollari si dimostrano come segue.

Nelle ipotesi del 1° corollario è:

$$\mathbf{f}^T \delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \mathbf{D}\delta\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (40)$$

Sostituendo a $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ la sua espressione e ricordando che $\mathbf{D} = \mathbf{E}^T$, si ha:

$$(\mathbf{f} - \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma})^T \delta\mathbf{u} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (41)$$

da cui, stante l'arbitrarietà di $\delta\mathbf{u}$, deve valere la (19), cioè \mathbf{f} e $\boldsymbol{\sigma}$ sono equilibrati.

Nelle ipotesi del 2° corollario è:

$$\delta\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall (\delta\mathbf{f}, \delta\boldsymbol{\sigma}) \quad \mathbf{E}\delta\boldsymbol{\sigma} = \delta\mathbf{f} \quad (42)$$

Sostituendo a $\delta\mathbf{f}$ la sua espressione e ricordando che $\mathbf{E}^T = \mathbf{D}$, si ha:

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\sigma} \quad (43)$$

da cui, stante l'arbitrarietà di $\delta\boldsymbol{\sigma}$, deve valere la (6), cioè $\boldsymbol{\varepsilon}$ ed \mathbf{u} sono congruenti.

- **Osservazione 18.** Tenuto conto del TLV e dei suoi corollari può affermarsi che: CNES per l'equilibrio è che forze e tensioni compiano il medesimo lavoro virtuale rispettivamente in un campo arbitrario di spostamenti e deformazioni congruenti; CNES per la congruenza di un campo di spostamenti e deformazioni è che un sistema arbitrario di forze e tensioni equilibrato compia in essi, rispettivamente, il medesimo lavoro virtuale.

- **Osservazione 19.** I due corollari rappresentano strumenti operativi che permettono di trasformare un problema cinematico in un problema statico e viceversa. Valgono a tal proposito le osservazioni già fatte per i sistemi rigidi (Osservazioni 3.13 e 3.14). In particolare, il primo corollario costituisce la *formulazione integrale dell'equilibrio*, e il secondo corollario la *formulazione integrale della congruenza*.¹

4.4 La formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili

Una conseguenza notevole del TLV è la *formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili (FGSD)*. Essa permette di calcolare una componente di spostamento di un punto materiale P secondo una data retta r (Fig. 7a), assegnato uno stato di deformazione ε congruente. A tal fine si procede come segue.

- (a) Si considera come problema virtuale il problema statico rappresentato da un'unica forza attiva di intensità unitaria $F'=1$, che compie lavoro virtuale nella componente di spostamento η incognita (Fig. 7b);
- (b) Si determina (se esiste) un qualunque sistema di tensioni σ' equilibrato con la forza unitaria (Fig. 7b).
- (c) Poiché lo stato di deformazione è per ipotesi congruente e le forze e tensioni equilibrate, vale l'ELV; poiché $L_e = 1 \cdot \eta$, $L_i = \sigma'^T \varepsilon$, essa si scrive:

$$\eta = \sigma'^T \varepsilon \quad (44)$$

La (44) rappresenta la cercata FGSD.

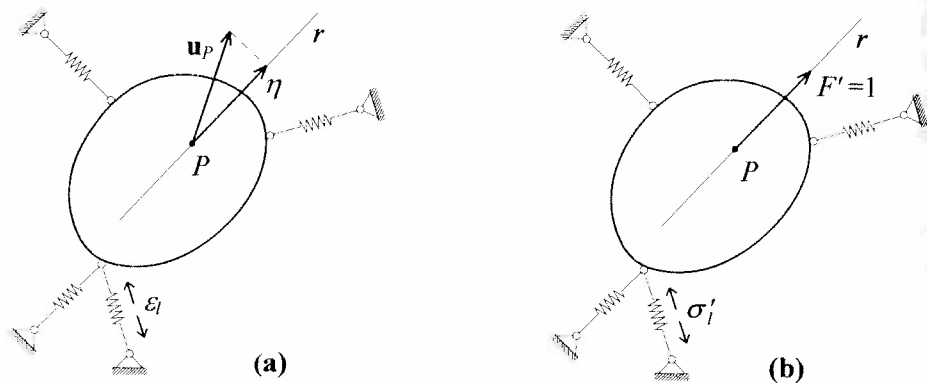
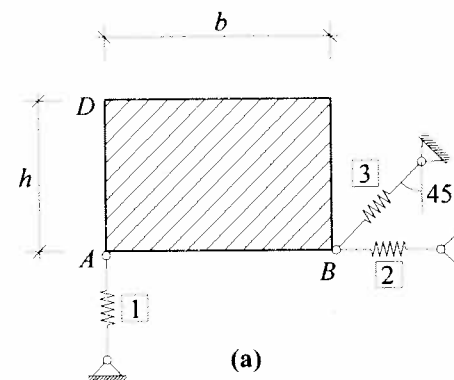


Fig. 7 Formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili; (a) sistema reale: ε_1 note, η incognito; (b) sistema virtuale

Esercizio 5: Utilizzando la FGSD si determini lo spostamento del punto D del sistema in Fig. (a) conseguente alle deformazioni ε_1 ed ε_2 , delle molle 1 e 2.



Accanto al sistema reale di Fig. (a) si considerano quelli virtuali di Fig. (b) e (c) dove si assegnano nell'ordine le forze unitarie atte a determinare le componenti u e v dello spostamento del punto D . Con riferimento alle notazioni delle Fig. (d) ed (e), le equazioni di equilibrio del corpo forniscono nell'ordine

$$\sigma'_1 = \frac{h}{b}, \quad \sigma'_2 = -\left(1 + \frac{h}{b}\right), \quad \sigma'_3 = \frac{h}{b}\sqrt{2}; \quad (a)$$

$$\sigma'_1 = 1, \quad \sigma'_2 = \sigma'_3 = 0$$

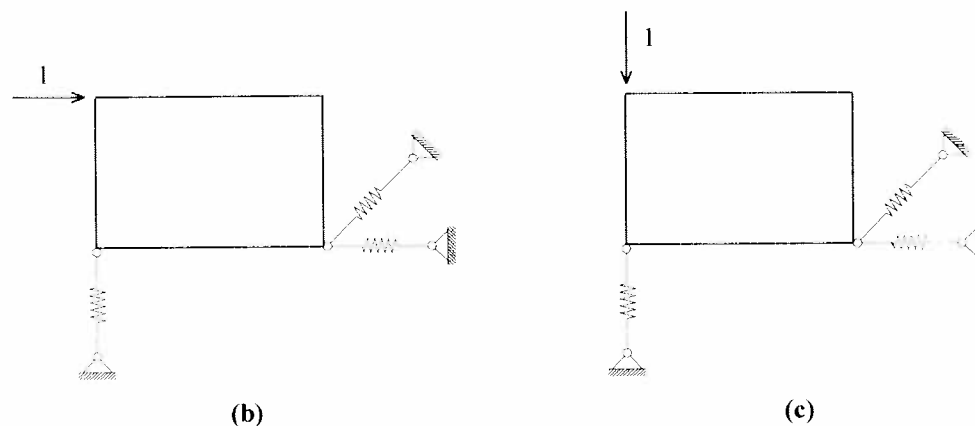
L'ELV si scrive, nei due casi:

$$1 \cdot u_D = \sigma'_1 \varepsilon_1 + \sigma'_2 \varepsilon_2 \quad (b)$$

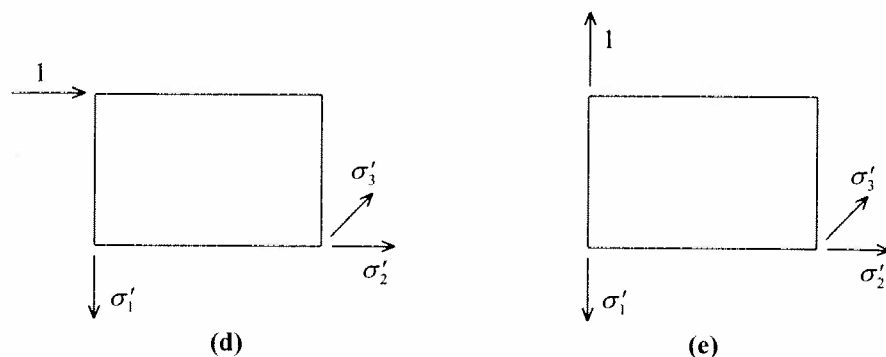
$$1 \cdot v_D = \sigma'_1 \varepsilon_1 + \sigma'_2 \varepsilon_2$$

Sostituendo a σ'_1 e σ'_2 i valori trovati, si ha:

$$u_D = \frac{h}{b} \varepsilon_1 - \left(1 + \frac{h}{b}\right) \varepsilon_2; \quad v_D = \varepsilon_1 \quad (c)$$



¹ Nel problema algebrico qui trattato non compaiono ovviamente degli integrali, che invece sono presenti quando si analizzano dei sistemi continui. Tuttavia, sia pure impropriamente, ma per uniformità di linguaggio, si adotterà questa dizione anche per i sistemi discreti.



- **Osservazione 20.** Se il sistema reale è cinematicamente determinato esiste un unico stato di tensione σ' equilibrato con le forze virtuali.

Se è cinematicamente impossibile, ma le deformazioni sono congruenti, cioè rispettano la (3), esistono infiniti stati di tensione σ' equilibrati. La FGSD richiede che si consideri *uno qualunque* di essi, in quanto il risultato non dipende dalla scelta. Infatti, perché il TLV possa essere applicato, lo stato σ' deve soddisfare il solo requisito dell'equilibrio (una dimostrazione più diretta di questa proprietà, che a prima vista potrebbe apparire sorprendente, è data nell'Osservazione 21). Da un punto di vista operativo, è conveniente porre uguali a zero r componenti di tensione σ' arbitrariamente prese, e determinare le rimanenti n (purché linearmente indipendenti) dalle equazioni di equilibrio. Ciò equivale a scegliere come stato equilibrato lo stato che si verifica in un sistema principale associato a quello reale (cfr. Osservazione 14, e poi l'Esercizio 6).

Se infine il sistema è cinematicamente indeterminato, la FGSD non è applicabile, in quanto non esiste alcuno stato σ' equilibrato.

- **Osservazione 21.** Si consideri un sistema cinematicamente impossibile, a cui vengono assegnate deformazioni ε congruenti; risultano quindi soddisfatte le equazioni di compatibilità cinematica (9), $\mathbf{Q}\varepsilon=0$. Si considerino poi due differenti stati di tensione equilibrati con la forza unitaria $F'=1$; per la (22) essi sono del tipo:

$$\sigma'_1 = \sigma'_0 + \mathbf{S}\chi_1, \quad \sigma'_2 = \sigma'_0 + \mathbf{S}\chi_2, \quad \chi_1 \neq \chi_2$$

avendo scelto la stessa soluzione particolare σ'_0 . Utilizzando separatamente i due stati equilibrati nella FGSD si ottiene:

$$\eta_1 = \sigma'^T_1 \varepsilon, \quad \eta_2 = \sigma'^T_2 \varepsilon$$

che, sottratte membro a membro forniscono:

$$\eta_1 - \eta_2 = (\sigma'_1 - \sigma'_2)^T \varepsilon = (\chi_1 - \chi_2)^T \mathbf{S}^T \varepsilon = (\chi_1 - \chi_2)^T \mathbf{Q}\varepsilon = 0$$

avendo sfruttato la seconda proprietà di dualità (32) e l'ipotesi di congruenza. È perciò $\eta_1 = \eta_2$, cioè lo spostamento incognito non dipende dalla scelta dello stato di tensione virtuale equilibrato.

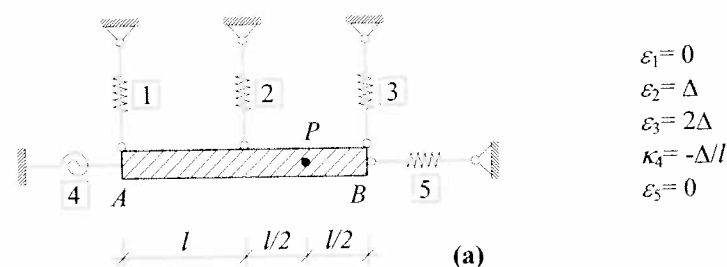
- **Osservazione 22.** La proprietà dimostrata nell'Osservazione 21 è una conseguenza del seguente teorema: in un sistema iperstatico, il lavoro virtuale compiuto dalle autotensioni in uno stato di deformazione congruente è nullo; in simboli:

$$\sigma'^T_x \varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon | \mathbf{Q}\varepsilon = 0$$

La dimostrazione è immediata. Stante la definizione (24) e la seconda proprietà di dualità (32):

$$\sigma'^T_x \varepsilon = (\mathbf{S}\chi)^T \varepsilon = \chi^T \mathbf{S}^T \varepsilon = \chi^T \mathbf{Q}\varepsilon = 0$$

Esercizio 6: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si calcoli la componente di spostamento v del punto P .



È facile verificare che le deformazioni assegnate alle molle sono rispettose delle equazioni di compatibilità cinematica (9); ad esse infatti corrisponde la configurazione congruente di Fig. (b) da cui è facile verificare che $v_P = -3\Delta/2$.

Volendo calcolare v_P mediante la FGSD, assunto quale sistema principale quello derivante dalla soppressione degli organi elastici 2 e 4 (Osservazione 20, Fig. c) ed applicata la forza unitaria in P (Fig. d), l'equilibrio del corpo AB fornisce:

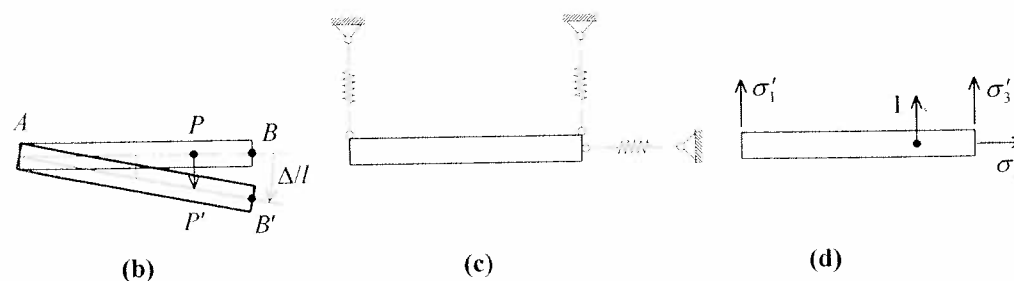
$$\sigma'_1 = -\frac{1}{4}, \quad \sigma'_3 = -\frac{3}{4}, \quad \sigma'_5 = 0 \quad (a)$$

L'ELV si scrive:

$$1 \cdot v_P = \sigma'_3 \varepsilon_3 \quad (b)$$

da cui, sostituendo a σ'_3 il valore trovato, segue:

$$v_P = -\frac{3}{2} \Delta \quad (c)$$



4.5 Le condizioni di compatibilità statica e cinematica

Analogamente a quanto visto per i sistemi rigidi (Par. 3.3.3), esistono due particolari forme del *TLV* che forniscono le condizioni di compatibilità statica per un sistema labile e di compatibilità cinematica per un sistema iperstatico. Esse si ottengono dai due corollari del *TLV* (Par. 4.3) ponendo uguali a zero i termini noti del problema virtuale.

(a) Equazioni di compatibilità statica

Si assume un campo di spostamenti virtuale $\delta \mathbf{u}_q$ congruente con deformazioni nulle $\delta \varepsilon = \mathbf{0}$ (modi rigidi, cfr. Par. 2.5). Il primo corollario del *TLV* si scrive:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{u}_q = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_q | \mathbf{D} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0} \quad (45)$$

Poiché (Eq. 12) è $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}$, la (45) fornisce:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T \mathbf{f} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (46)$$

da cui seguono le equazioni di compatibilità statica $\mathbf{U}^T \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

(b) Equazioni di compatibilità cinematica

Si assume uno stato di tensione virtuale $\delta \sigma_\chi$ equilibrato con forze attive nulle $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$ (autotensioni, cfr. Par. 3.4). Il secondo corollario del *TLV* (detto anche *teorema dei lavori virtuali complementare, TLVC*) si scrive:

$$\delta \sigma_\chi^T \varepsilon = 0 \quad \forall \delta \sigma_\chi | \mathbf{E} \delta \sigma_\chi = \mathbf{0} \quad (47)$$

Poiché (Eq. 22) è $\delta \sigma_\chi = \mathbf{S} \delta \chi$, l'equazione dei lavori virtuali complementare (*ELVC*) fornisce:

$$\delta \chi^T \mathbf{S}^T \varepsilon = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (48)$$

da cui seguono le equazioni di compatibilità cinematica $\mathbf{S}^T \varepsilon = \mathbf{0}$.

- **Osservazione 23.** Il teorema enunciato nell'Osservazione 22 può anche essere visto come una conseguenza del *TLVC*.

Esercizio 7: Si riottienga l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 2 applicando il *TLVC*.

L'*ELVC* si scrive:

$$\sum_{i=1}^5 \delta \sigma_{ix} \varepsilon_i + \sum_{j=6}^7 \delta \mu_{jx} \kappa_j = 0 \quad \forall (\delta \sigma_{ix}, \delta \mu_{jx})$$

Lo stato di autotensione $(\delta \sigma_{ix}, \delta \mu_{jx})$ è dato dalle (c) dell'esercizio 4. Sostituendo nell'*ELVC* si ottiene:

$$\left(-\frac{1}{2l} \varepsilon_2 - \frac{1}{2l} \varepsilon_3 - \kappa_6 + \kappa_7 \right) \delta \chi = 0 \quad \forall \delta \chi$$

per cui il coefficiente di $\delta \chi$ deve annullarsi. Si ottiene così l'equazione di compatibilità cinematica.

5. Il legame elastico

5.1 La matrice elastica globale

Tensioni e deformazioni degli organi deformabili, sino ad ora trattate come grandezze indipendenti, sono in realtà legate da equazioni costitutive. Limitandosi a considerare organi ad elasticità lineare omogenea, la tensione σ_l agente nel generico organo semplice è proporzionale alla deformazione ε_l :

$$\sigma_l = c_l \varepsilon_l \quad (l=1,2,\dots,d) \quad (49)$$

dove $c_l > 0$ è la costante elastica dell'organo. Le (49) possono anche scriversi:

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon \quad (50)$$

dove

$$\mathbf{C} = \text{diag}\{c_l\} \quad (51)$$

è la *matrice elastica globale*, di dimensioni $d \times d$. La matrice \mathbf{C} è *simmetrica* ($\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$) ed è *definita positiva* ($\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$). È dunque anche invertibile, per cui

$$\varepsilon = \mathbf{H} \sigma \quad (52)$$

dove $\mathbf{H} = \mathbf{C}^{-1}$ è la matrice di deformabilità globale

$$\mathbf{H} = \text{diag}\{h_l\} \quad (53)$$

con $h_l = 1/c_l$.

- **Osservazione 24.** La (50) è formalmente analoga alla (4.28), valida per il singolo organo elastico molle. Così, le proprietà della matrice elastica del sistema sono identiche a quelle della matrice elastica locale. Esse sono qui banalmente verificate, stante la semplice struttura diagonale della (51), in quanto si sono considerati solo organi semplici. Comunque, anche nel caso più generale di n_e organi elastici, ciascuno di molteplicità d_1, d_2, \dots, d_{n_e} , esse continuano a valere. In tal caso infatti \mathbf{C} è diagonale a blocchi, per cui la simmetria e la definitezza in segno dei singoli blocchi sono preservate. Le stesse proprietà sono verificabili per la matrice di deformabilità globale \mathbf{H} .

Esercizio 8: Si determini la matrice elastica \mathbf{C} e la matrice di deformabilità \mathbf{H} per il sistema dell'Esercizio 1, assunte le molle elastiche lineari di rigidezza estensionale c_e e flessionale c_f . Risulta:

$$\mathbf{C} = \text{diag}\{c_e \quad c_e \quad c_e \quad c_e \quad c_e \quad c_f \quad c_f\}$$

$$\mathbf{H} = \text{diag}\{1/c_e \quad 1/c_e \quad 1/c_e \quad 1/c_e \quad 1/c_e \quad 1/c_f \quad 1/c_f\}$$

5.2 L'energia potenziale elastica e l'energia complementare elastica

L'energia potenziale elastica del sistema è uguale alla somma delle energie potenziali elastiche di ciascun organo (cfr. 4.5.2):

$$\Phi = \sum_{l=1}^d \Phi_l = \sum_{l=1}^d \frac{1}{2} \varepsilon_l^T \mathbf{C}_l \varepsilon_l \quad (54)$$

Stante le definizioni (2) e (51) può anche scriversi:

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon \quad (55)$$

formalmente analoga alla (4.37); inoltre è:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \quad (56)$$

analoga alla (4.34).

L'energia complementare elastica del sistema è uguale alla somma delle energie complementari elastiche di ciascun organo (si veda il Par. 4.5.3):

$$\Psi = \sum_{l=1}^d \Psi_l = \sum_{l=1}^d \frac{1}{2} \sigma_l^T \mathbf{H}_l \sigma_l \quad (57)$$

Stanti le definizioni (15) e (53) può anche scriversi:

$$\Psi = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma \quad (58)$$

formalmente analoga alle (4.41); inoltre è:

$$\varepsilon = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (59)$$

analoga alla (4.40).

Come per il singolo organo, $\Phi = \Phi(\varepsilon)$ e $\Psi = \Psi(\sigma)$ assumono, in un dato stato elastico (ε, σ) , il medesimo valore. È infatti:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma = \Psi(\sigma) \quad (60)$$

identica alla (4.42).

Analogamente a quanto detto nel Par. 4.5.4, se sono presenti deformazioni anelastiche $\bar{\varepsilon}$ il legame si modifica come segue:

$$\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad (61)$$

ovvero

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \mathbf{H} \sigma \quad (62)$$

Le energie potenziale e complementare elastica si scrivono:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^T \mathbf{C} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}); \quad \Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma + \sigma^T \bar{\varepsilon} \quad (63)$$

Esercizio 9: Scrivere l'energia potenziale elastica e complementare elastica per il sistema dell'Esercizio 1, assunto il legame costitutivo dell'Esercizio 8.

Applicando la (54) si ha:

$$\Phi = \frac{1}{2} c_e (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) + \frac{1}{2} c_f (\kappa_6^2 + \kappa_7^2)$$

Applicando la (57) si ottiene:

$$\Psi = \frac{1}{2c_e} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2) + \frac{1}{2c_f} (\mu_6^2 + \mu_7^2)$$

6. Sistemi con organi elastici molteplici

Si è detto, nel Par. 1, che organi molteplici possono essere sostituiti da più organi semplici, in numero pari alla molteplicità elastica; conseguentemente le analisi globali, deformativa e tensionale, sono state sviluppate con riferimento a questi ultimi. Tuttavia lo studio può essere condotto operando direttamente sugli organi molteplici, senza cioè sostituirli con organi equivalenti. In tal caso occorre procedere come segue.

(a) Problema cinematico

- I. Si scrivono le deformazioni degli organi in funzione degli spostamenti dei nodi espressi nella base locale (equazioni di congruenza implicite locali).
- II. Si effettua un cambiamento di base, esprimendo gli spostamenti nella base globale (che è conveniente, anche se non necessario, assumere unica per tutti i corpi).
- III. Si esprimono gli spostamenti dei nodi in funzione degli spostamenti generalizzati.

(b) Problema statico

- I. Si esprimono le forze di estremità degli organi (forze interne) in funzione delle tensioni (si ricordi ad esempio la Fig. 4.4), assicurando così l'equilibrio degli organi.
- II. Si applicano ai corpi le forze interne cambiate di segno e, considerate le forze attive, si impone l'equilibrio di ciascun corpo.

(c) Legame costitutivo

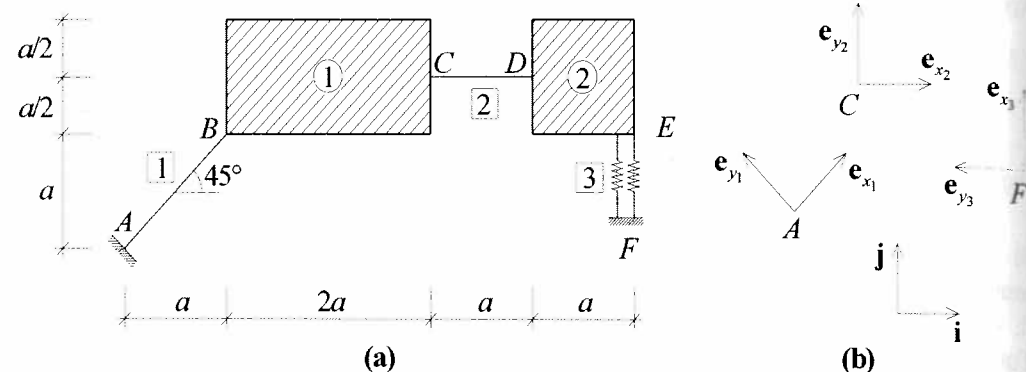
Si esprime il legame tensioni-deformazioni per ciascun organo.

L'esercizio che segue servirà a chiarire il procedimento.

Esercizio 10: Sia dato il sistema piano di Fig. (a), costituito da due corpi collegati da due travi ($d_1=d_2=3$) e da un glifo elastico ($d_3=2$). Si impostino i problemi cinematico e statico e si scrivano le equazioni costitutive, assunte le travi di rigidezze c_a, c_b, c_f e il glifo (simmetrico) di rigidezze c_a e c_f .

(a) Problema cinematico

Le equazioni di congruenza delle travi deformabili sono date dalle (4.12). Esse forniscono le deformazioni $\varepsilon_l, \gamma_l, \kappa_l$ ($l=1,2$) in funzione degli spostamenti nodali espressi nelle basi locali $(\mathbf{e}_{x_l}, \mathbf{e}_{y_l})$ ($l=1,2$) (Fig. b). (Si noti che la convenzione introdotta nell'Osservazione 3 è rispettata).



Tenuto conto che $u_A=0$, $\theta_A=0$, per la trave 1 si ha (passo I):

$$\varepsilon_1 = u_B^1, \quad \gamma_1 = v_B^1, \quad \kappa_1 = \theta_B^1 \quad (a)$$

e per la trave 2:

$$\varepsilon_2 = u_D^2 - u_C^2, \quad \gamma_2 = v_D^2 - v_C^2 - \theta_C^2 a, \quad \kappa_2 = \theta_D^2 - \theta_C^2 \quad (b)$$

dove gli indici 1 e 2 denotano la base locale. Analogamente, tenuto conto che $u_F=0$, $\theta_F=0$, le deformazioni ε_3 e κ_3 del glifo elastico nella base locale (e_3, e_4) sono

$$\varepsilon_3 = u_E^3, \quad \kappa_3 = \theta_E^3 \quad (c)$$

Esprimendo gli spostamenti dei punti B, C, D, E nella base (i, j) si ha (passo II):

$$\varepsilon_1 = (u_B + v_B) \sqrt{2}/2, \quad \gamma_1 = (v_B - u_B) \sqrt{2}/2, \quad \kappa_1 = \theta_B \quad (d)$$

$$\varepsilon_2 = u_D - u_C, \quad \gamma_2 = v_D - v_C - \theta_C a, \quad \kappa_2 = \theta_D - \theta_C$$

$$\varepsilon_3 = v_E, \quad \kappa_3 = \theta_E$$

Scelti $B \equiv O_1$ ed $E \equiv O_2$ come poli di riduzione degli spostamenti, le (d) si scrivono (passo III):

$$\varepsilon_1 = (u_{01} + v_{01}) \sqrt{2}/2, \quad \gamma_1 = (v_{01} - u_{01}) \sqrt{2}/2, \quad \kappa_1 = \theta_1$$

$$\varepsilon_2 = \left(u_{02} - \theta_2 \frac{a}{2} \right) - \left(u_{01} - \theta_1 \frac{a}{2} \right) \quad (e)$$

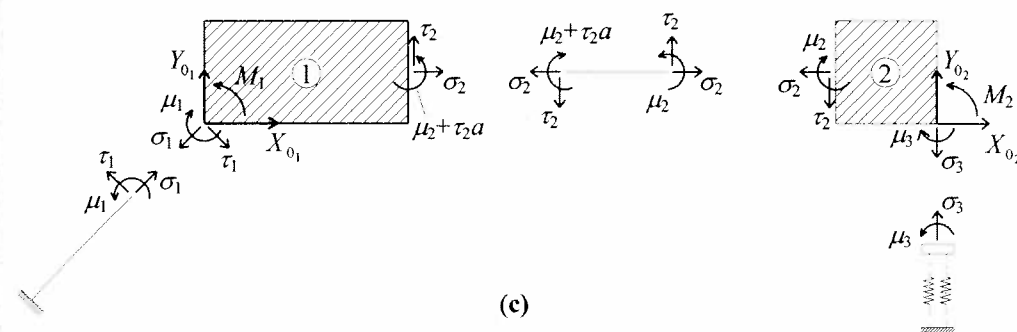
$$\gamma_2 = \left(v_{02} - \theta_2 a \right) - \left(v_{01} + 2\theta_1 a \right) - \theta_1 a, \quad \kappa_2 = \theta_2 - \theta_1$$

$$\varepsilon_3 = v_{02}, \quad \kappa_3 = \theta_2$$

Le (e) rappresentano le equazioni di congruenza globali.

(b) Problema statico

Si considerano generiche forze attive X_{0i}, Y_{0i}, M_i ($i=1,2$) ridotte ai poli $O_1 \equiv B$ ed $O_2 \equiv E$. Espresse le forze interne t_{Hx}, t_{Hy}, m_H ($H=B, C, D, E$) in funzione delle tensioni σ_i, τ_i, μ_i ($i=1,2,3$) (imposto cioè l'equilibrio degli organi, passo I), si ha la situazione illustrata in Fig. (c).



Le condizioni di equilibrio dei due corpi si scrivono (passo II)

Equilibrio corpo 1

Equilibrio corpo 2

$$X_{01} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_1 + \sigma_2 = 0, \quad X_{02} - \sigma_2 = 0, \quad (f)$$

$$Y_{01} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_1 + \tau_2 = 0, \quad Y_{02} - \tau_2 - \sigma_3 = 0,$$

$$M_1 - \mu_1 - \frac{a}{2} \sigma_2 + 3a \tau_2 + \mu_2 = 0, \quad M_2 + \frac{a}{2} \sigma_2 + a \tau_2 - \mu_2 - \mu_3 = 0,$$

Le (f) rappresentano le equazioni di equilibrio globali.

(c) Legame costitutivo

Ricordando le matrici elastiche della trave (Eq. 4.49) si ha:

$$\sigma_1 = c_a \varepsilon_1, \quad \tau_1 = c_t \gamma_1 - c_t \frac{\sqrt{2}}{2} a \kappa_1, \quad \mu_1 = -c_t \frac{\sqrt{2}}{2} a \gamma_1 + c_f \kappa_1, \quad (g)$$

$$\sigma_2 = c_a \varepsilon_2, \quad \tau_2 = c_t \gamma_2 - c_t \frac{1}{2} a \kappa_2, \quad \mu_2 = -c_t \frac{1}{2} a \gamma_2 + c_f \kappa_2,$$

Nella matrice elastica del glifo (Eq. 4.48), tenuto conto della simmetria ($c_1=c_2$), i termini fuori diagonale si annullano; dette c_a e c_f le costanti elastiche sulla diagonale si ha:

$$\sigma_3 = c_a \varepsilon_3, \quad \kappa_3 = c_f \mu_3 \quad (h)$$

Le (g) ed (h) costituiscono le equazioni del legame elastico globale.

Il problema elastico

1. Formulazione del problema elastico

1.1 Posizione del problema

Nel capitolo precedente si sono analizzati separatamente gli aspetti cinematici, statici e reologici della meccanica di un sistema rigido a deformabilità concentrata. In particolare i problemi cinematico e statico sono stati formulati in modo indipendente, ignorando che, a causa del legame costitutivo, alle deformazioni del problema cinematico corrispondono delle tensioni, e alle tensioni del problema statico corrispondono delle deformazioni (si ricordi a tal proposito l'Osservazione 5.15). In questo capitolo si vuole formulare e risolvere il problema nella sua globalità, tenendo conto dei tre aspetti del problema.

Con riferimento alla Fig. 1, si considera un sistema costituito da n_c corpi rigidi (avente quindi $n=6n_c$ g.d.l., oppure $n=3n_c$ g.d.l. nel piano) ed n_e organi elastici, di molteplicità globale $d = d_1 + d_2 + \dots + d_{n_e}$; come nel Cap. 5, di norma ci si riferirà ad $n_e=d$ organi semplici. Si considerano poi forze attive agenti esclusivamente sui corpi rigidi. Si assume che le forze raggiungano il loro valore finale crescendo gradualmente di intensità, e che questo processo di carico sia tanto lento da poter trascurare ogni effetto dinamico (connesso cioè all'insorgere di accelerazioni, e quindi di forze d'inerzia). Si parla in tal caso di *applicazione quasi-statica delle forze* e di problema elasto-statico. Al crescere delle forze dallo zero, il sistema elastico muta la propria configurazione, passando dallo stato naturale a quello finale attraverso una successione di *stati congruenti* (in quanto le deformazioni degli organi e gli spostamenti dei corpi sono geometricamente compatibili) *ed equilibrati* (in quanto le tensioni che si sviluppano a causa delle deformazioni sono in equilibrio con le forze esterne). Ignorando le fasi intermedie del processo di carico e facendo riferimento ai soli valori finali delle forze, degli spostamenti, delle deformazioni e delle tensioni, si pone il seguente problema.

Problema elastico: *assegnato un sistema di forze attive applicato ai corpi, determinare, se esistono: il campo degli spostamenti e lo stato di deformazione congruenti, nonché lo stato di tensione equilibrato.*

- **Osservazione 1.** Si noti che, a differenza del problema cinematico, lo stato di deformazione non è noto, ma è un'incognita del problema.

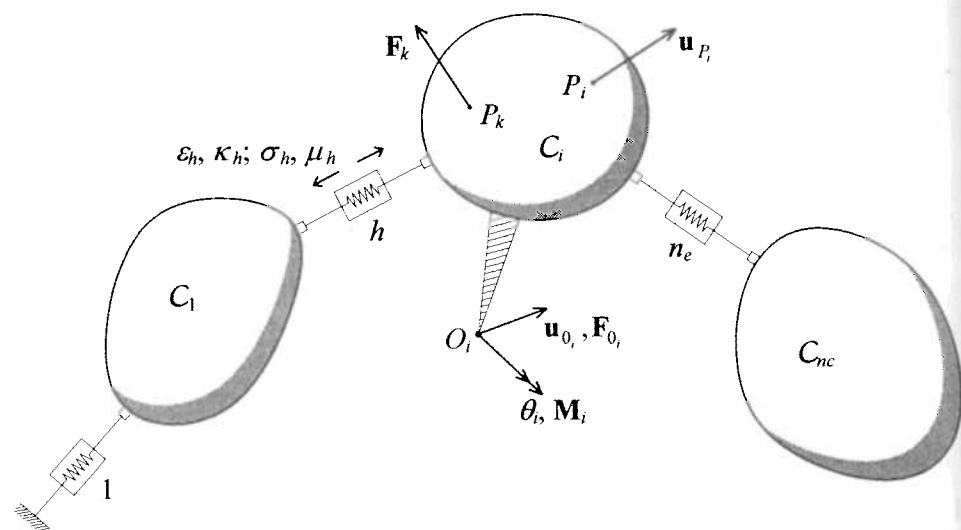


Fig. 1 Il problema elastico per i sistemi ad elasticità concentrata

1.2 Le equazioni del problema elastico

Il problema elastico è governato dalle seguenti tre equazioni vettoriali, ciascuna corrispondente ai tre diversi aspetti del problema.

- (a) **Equazioni di congruenza:** legano lo stato di deformazione ε degli organi elastici al campo di spostamenti \mathbf{u} dei corpi rigidi. Si scrivono (Eq. 5.6)

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

e costituiscono un sistema di d equazioni, in cui sia \mathbf{u} che ε sono incogniti; \mathbf{D} è la matrice di congruenza del sistema.

- (b) **Equazioni di equilibrio:** legano lo stato di tensione σ degli organi elastici alle forze attive \mathbf{f} applicate ai corpi. Si scrivono (Eq. 5.19)

$$\mathbf{D}^T \sigma = \mathbf{f} \quad (2)$$

avendo tenuto conto della proprietà di dualità (5.29). Le (2) costituiscono un sistema di n equazioni nelle d incognite σ , essendo \mathbf{f} noto; \mathbf{D}^T è la matrice di equilibrio del sistema.

- (c) **Equazioni costitutive (legame elastico):** legano lo stato di deformazione ε e lo stato di tensione σ negli organi elastici. Si scrivono (Eq. 5.49)

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon \quad (3)$$

e costituiscono un sistema di d equazioni in cui sia σ che ε sono incogniti. \mathbf{C} è la matrice elastica del sistema, avente come inversa la matrice di deformabilità $\mathbf{H} = \mathbf{C}^{-1}$.

Il problema elastico è quindi governato da d equazioni di congruenza, n di equilibrio e

d di legame; in totale $2d+n$ equazioni. Le incognite del problema sono le n componenti dello spostamento \mathbf{u} , le d componenti della deformazione ε e le d componenti della tensione σ ; in totale $2d+n$ incognite. Si ha quindi lo stesso numero di equazioni e di incognite.

Le equazioni (1)÷(3) possono essere raggruppate e riscritte nella forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varepsilon \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ovvero

$$\mathbf{L}\mathbf{e} = \mathbf{b} \quad (5)$$

dove

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varepsilon \\ \sigma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (6)$$

sono rispettivamente la *matrice del problema elastico* \mathbf{L} , il *vettore dello stato elastico* \mathbf{e} e il *vettore termini noti* \mathbf{b} . La struttura della matrice dei coefficienti \mathbf{L} è illustrata in Fig. 2 per i tre casi possibili.

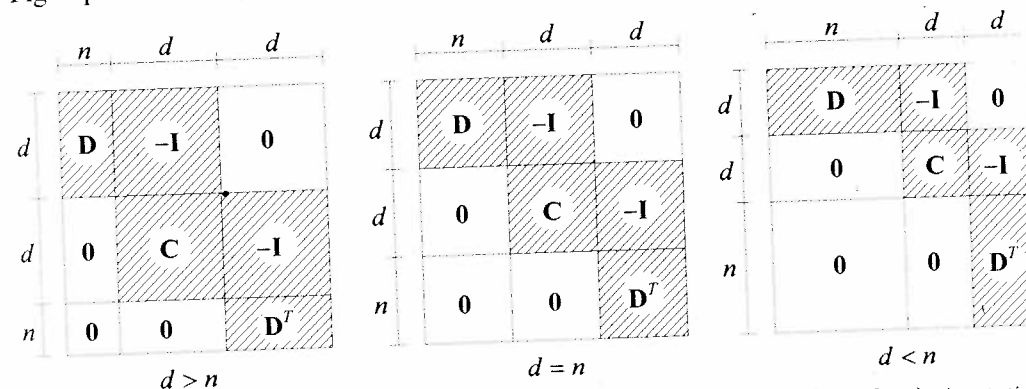
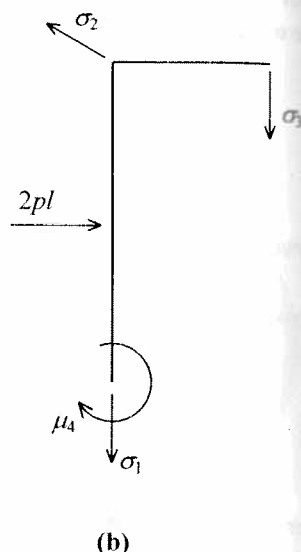
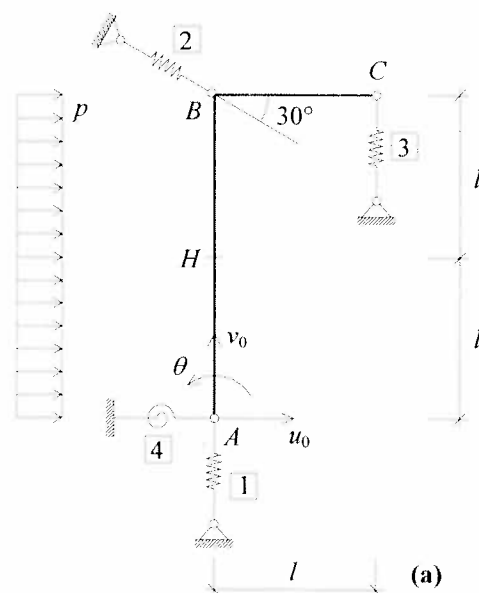


Fig. 2 Struttura della matrice del problema elastico \mathbf{L} : sistema iperstatico ($d > n$), isostatico ($d = n$), labile ($d < n$)

- **Osservazione 2.** Il fatto che il numero delle incognite del problema elastico sia uguale al numero delle equazioni, è strettamente legato alla prima proprietà di dualità $\mathbf{E} = \mathbf{D}^T$. Infatti, se ad esempio il problema cinematico è impossibile, quello statico è indeterminato, cosicché le equazioni eccedenti del primo problema sono bilanciate dalle incognite eccedenti del secondo problema. Così il problema dell'equilibrio, che ammette infinite soluzioni se si trascura la deformabilità degli organi (che quindi si assimilano a dei vincoli) ammette invece, come si vedrà, una soluzione unica quando gli organi sono elastici.

Esercizio 1: Si scrivano le equazioni del problema elastico per il sistema a deformabilità concentrata illustrato in Fig. (a). Si assuma $c_i=c$ ($i=1,2,3$), $c_4=c_f=cl^2$.



Il sistema è costituito da un unico corpo piano ($n=3$) e quattro organi elastici semplici ($d=4$): è perciò iperstatico di grado 1. Assunto $A \equiv O$ come polo di riduzione degli spostamenti e delle forze le equazioni del problema elastico sono:

• *Equazioni di congruenza*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_A & \Rightarrow \varepsilon_1 &= v_0 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} u_B - \frac{1}{2} v_B & \Rightarrow \varepsilon_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (u_0 - 2\theta l) - \frac{1}{2} v_0 \\ \varepsilon_3 &= v_C & \Rightarrow \varepsilon_3 &= v_0 + \theta l \\ \kappa_4 &= \theta & \Rightarrow \kappa_4 &= \theta \end{aligned} \quad (a)$$

• *Equazioni di equilibrio*

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_2 + 2pl &= 0 \\ -\sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 - \sigma_3 &= 0 \\ \sqrt{3} l \sigma_2 - l \sigma_3 - \mu_4 - 2pl^2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

• *Equazioni di legame*

$$\sigma_1 = c\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = c\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = c\varepsilon_3, \quad \mu_4 = cl^2\kappa_4 \quad (c)$$

Si hanno in definitiva 11 equazioni in 11 incognite (4 deformazioni, 4 tensioni, 3 spostamenti). Le equazioni possono essere riscritte nella forma (4):

$$\begin{bmatrix} . & 1 & . & -1 & . & . & . \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}l & . & -1 & . & . \\ . & 1 & l & . & . & -1 & . \\ . & . & 1 & . & . & . & -1 \\ . & . & . & c & . & . & -1 \\ . & . & . & . & c & . & -1 \\ . & . & . & . & . & c & -1 \\ . & . & . & . & . & cl^2 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_4 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 2pl \\ . \\ . \\ -2pl^2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

dove, in corrispondenza delle matrici nulle, non si è riportato alcun simbolo.

1.3 Teorema di esistenza ed unicità

Sussiste il seguente *Teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema elastico*. Nelle ipotesi che

- (a) $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$
 (b₁) $\mathbf{D} \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

il problema elastico ammette una ed una sola soluzione qualunque sia il vettore delle forze. Se invece, ferma restando l'ipotesi (a), è

- (b₂) $\mathbf{D} \mathbf{u}_q = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u}_q \in \mathcal{U}_q \subset \mathbb{R}^n$

il problema elastico ammette soluzione se e solo se

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u}_q = 0 \quad \forall \mathbf{u}_q \in \mathcal{U}_q \quad (7)$$

In tal caso la soluzione è unica in termini di tensioni e deformazioni, ma non in termini di spostamento.

- **Osservazione 3.** L'ipotesi (a) richiede che \mathbf{C} sia definita positiva. L'ipotesi (b₁) richiede che non esista alcun campo di spostamento a cui sia associata una deformazione nulla degli organi. Questa ipotesi è soddisfatta quando il sistema è cinematicamente impossibile ($d > n$, $\text{rango}(\mathbf{D}) = n$), oppure cinematicamente determinato. L'ipotesi (b₂) si riferisce a sistemi cinematicamente indeterminati (5.2.5), oppure degeneri per i quali esistono dei *campi di spostamento rigidi* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_q$ che non comportano deformazione degli organi elastici. In tal caso, in generale, il problema elastico non ammette soluzione, a meno che le forze non compiano lavoro virtuale nullo negli spostamenti rigidi. Se l'ipotesi è soddisfatta, esiste un unico stato di

tensione equilibrato ed un unico campo di deformazione congruente. Tuttavia gli spostamenti restano indeterminati, in quanto, trovata una soluzione, se al campo degli spostamenti si somma uno spostamento rigido, le deformazioni, e quindi le tensioni, non cambiano, cosicché la congruenza e l'equilibrio sono ancora soddisfatti.

Per dimostrare la prima parte del teorema occorre dimostrare che la matrice del problema elastico \mathbf{L} è non singolare. Facendo combinazioni lineari tra le righe è possibile riscrivere le (4) nella forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

in cui la seconda e la terza equazione sono rimaste immutate, mentre la prima è stata ottenuta dalla somma della (4₃), della (4₂) premoltiplicata per \mathbf{D}^T , e della (4₁) premoltiplicata per $\mathbf{D}^T \mathbf{C}$; alternativamente la (8₁) può essere ottenuta per sostituzioni successive. Dal momento che la matrice dei coefficienti dell'equazione (8) è triangolare a blocchi, e che i blocchi sulla diagonale sono quadrati, il suo determinante è uguale al prodotto dei determinanti dei blocchi sulla diagonale, cioè è $\det(\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D})$. Poiché, stanti le ipotesi (a) e (b₁), la forma quadratica $\mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) \mathbf{u} = (\mathbf{D} \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\mathbf{D} \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u}$, la matrice $\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}$ è definita positiva, cioè $\det(\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) > 0$. La matrice del problema elastico \mathbf{L} è quindi non singolare, cosicché il problema ha soluzione unica.

Per dimostrare la seconda parte del teorema si consideri la (8₁):

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (9)$$

Ora, stante l'ipotesi (b₂), la matrice $\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}$ è singolare, in quanto il problema omogeneo $(\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ ammette soluzioni non banali $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_q$, con $\mathbf{u}_q \in \mathcal{U}_q$. Il sistema (9) è quindi impossibile. Tuttavia, è noto dal teorema di Rouché-Capelli che esso ammette egualmente soluzione se il termine noto è ortogonale alle soluzioni del problema omogeneo trasposto (si veda l'Osservazione 1.15 e le Appendici A3 e A4). Siccome $\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}$ è simmetrica, la condizione di solvibilità è data dalla (7). Se questa è soddisfatta, la (9) ammette infinite soluzioni del tipo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\perp + \alpha \mathbf{u}_q \quad \mathbf{u}^\perp \in \mathcal{U}_q^\perp, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}_q \in \mathcal{U}_q \quad (10)$$

dove \mathbf{u}^\perp , appartenente al supplemento ortogonale di \mathcal{U}_q , è univocamente determinato. Sostituendo il campo di spostamenti (10) nelle (8₂), tenuto conto che $\mathbf{D} \mathbf{u}_q = \mathbf{0}$, si ottiene $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}^\perp$, e dalla (8₃) si ricava $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}^\perp$. Deformazioni e tensioni sono quindi determinate univocamente. Il teorema è così dimostrato.

- **Osservazione 4.** Generalmente nel seguito, si riterrà soddisfatta l'ipotesi (b₁) e si parlerà di soluzione unica. Infatti, se esistono spostamenti rigidi \mathbf{u}_q e le forze soddisfano le condizioni di solvibilità (7), *gli stessi spostamenti rigidi* (che restano indeterminati) *possono essere soppressi con opportuni vincoli addizionali* che eser-

citano reazioni nulle, e non alterano quindi lo stato di deformazione e tensione. La questione verrà chiarita nel prossimo capitolo (cfr. Esercizi 7.12, 7.14 e Osservazione 7.22).

1.4 Metodi di soluzione del problema elastico

La soluzione del problema elastico richiede l'inversione della matrice \mathbf{L} . Tuttavia le sue dimensioni, $(2d+n) \times (2d+n)$, sono piuttosto grandi anche per problemi semplici, come l'Esercizio 1 ha messo in evidenza. Risulta perciò più conveniente combinare le equazioni (4) in modo tale da pervenire ad un numero più piccolo di incognite. Una prima metodologia è offerta dalla forma (8) del problema elastico, ottenuta combinando direttamente le equazioni, e che qui si riscrive

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Questa è più vantaggiosa della forma originaria (4) in quanto, a differenza di quella, la matrice dei coefficienti possiede blocchi sulla diagonale che sono sempre quadrati (e non singolari), indipendentemente dal fatto che il sistema sia iperstatico, isostatico o labile (si ricordi la Fig. 2). È quindi possibile risolvere il problema in cascata, determinando prima \mathbf{u} dalla (11₁), poi $\boldsymbol{\varepsilon}$ dalla (11₂) e infine $\boldsymbol{\sigma}$ dalla (11₃). Il procedimento richiede quindi l'inversione della sola matrice $\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}$, di dimensioni $n \times n$. Questo metodo di soluzione prende il nome di *metodo degli spostamenti*, in quanto le incognite primarie del problema sono appunto gli spostamenti, che vengono determinati per primi.

Un secondo metodo privilegia invece le tensioni, e per questo è (impropriamente) detto *metodo delle forze*. Si fa riferimento alla forma originaria (4) del problema elastico, in cui però il legame costitutivo è invertito (Eq. 5.51):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Si vede che l'equazione (12₃) contiene le sole incognite $\boldsymbol{\sigma}$. Essa è però risolubile solo se \mathbf{D}^T è quadrata, cioè *solo se il sistema è isostatico*; in tal caso infatti le equazioni di equilibrio sono da sole sufficienti a determinare lo stato di tensione. Noto $\boldsymbol{\sigma}$, procedendo per sostituzioni successive, dalla (12₂) si ricava $\boldsymbol{\varepsilon}$, e dalla (12₁) \mathbf{u} . Il procedimento richiede quindi l'inversione della sola matrice \mathbf{D}^T (ovvero \mathbf{D}), di ordine $d=n$.

Spesso però i sistemi sono iperstatici, cosicché la (12₃) non è sufficiente a determinare in modo univoco lo stato di tensione. Occorre pertanto procedere come indicato nel Par. 5.3.4, partizionando cioè la matrice di equilibrio nella forma $\mathbf{D}^T = [\mathbf{D}_1^T \mid \mathbf{D}_2^T]$, con \mathbf{D}_1 matrice quadrata di ordine n non singolare. Effettuando un'analoga partizione delle

I due metodi illustrati, oltre che a presentare notevoli vantaggi computazionali, traducono due approcci al problema densi di significato meccanico, tanto che si parla spesso di "spirito" del metodo degli spostamenti e delle forze, volendo con ciò sottolineare una diversa filosofia di soluzione. Nel seguito i due metodi vengono descritti più approfonditamente, sottolineando il loro significato meccanico.

2. Il metodo degli spostamenti

2.1 Lo spirito del metodo

Le equazioni risolutive del problema elastico secondo il metodo degli spostamenti sono *equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamenti generalizzati*. Il metodo si basa sulla seguente logica. Esistono ∞^n configurazioni congruenti, ciascuna corrispondente ad una diversa scelta delle n variabili di spostamento \mathbf{u} . A ciascuna di queste configurazioni corrisponde, tramite le equazioni di congruenza, un diverso stato di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e, tramite il legame costitutivo, un diverso stato di tensione $\boldsymbol{\sigma}$. Assegnati ad arbitrio gli spostamenti generalizzati, lo stato di tensione ad essi associato *non è in generale equilibrato* con le forze attive; è cioè uno stato congruente, ma non equilibrato. Esiste infatti uno ed un solo stato che, oltre ad essere congruente, è anche equilibrato; in questo stato le variabili \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ risolvono le equazioni del problema elastico. Il metodo degli spostamenti consiste nel ricercare *tra tutte le configurazioni congruenti l'unica che è anche equilibrata*. La ricerca viene effettuata esprimendo prima le deformazioni e poi le tensioni in termini di spostamenti ed imponendo che queste ultime equilibrino le forze attive.

• **Osservazione 6.** Per comprendere più a fondo lo spirito del metodo degli spostamenti si pensi di effettuare la seguente, semplice, esperienza meccanica. Si applichino ad un sistema elastico delle forze attive, ad esempio i pesi propri dei corpi, ma si impediscano gli spostamenti dei corpi stessi mediante dei vincoli addizionali. Si deformi poi il sistema spostando i corpi in posizioni arbitrarie e si rilascino istantaneamente tutti i vincoli introdotti. In generale, nel sistema si ingenerano oscillazioni, in quanto, nella configurazione in cui il sistema è stato portato, le forze interne che gli organi elastici applicano ai corpi non sono in equilibrio con le forze attive. Si ripeta allora l'esperimento modificando la configurazione. In generale è necessario effettuare ∞^n tentativi, prima di determinare quell'unica configurazione in cui il sistema, liberato dai vincoli, resta in quiete nella posizione in cui è stato lasciato. Lo spirito del metodo consiste allora nell'*imporre* l'equilibrio in funzione degli spostamenti incogniti, piuttosto che *tentare* di soddisfare l'equilibrio, modificando gli spostamenti ad arbitrio.

• **Osservazione 7.** Non ci si lasci fuorviare dal fatto che, nella teoria lineare qui sviluppata, *l'equilibrio viene imposto nella configurazione indeformata*. Come già detto nelle osservazioni 4.4 e 5.7, si tratta solo di un'approssimazione di comodo, in quanto l'equilibrio si verifica sempre nella configurazione deformata. Nella teo-

ria lineare si tiene conto del cambiamento di configurazione nel calcolo delle forze interne elastiche (che altrimenti non si svilupperebbero) ma non se ne tiene conto nell'esprimere le condizioni di equilibrio.

2.2 Il metodo diretto

Per ottenere le equazioni di equilibrio in termini di spostamento bisogna procedere come indicato nel diagramma di flusso illustrato in Fig. 3, e precisamente:

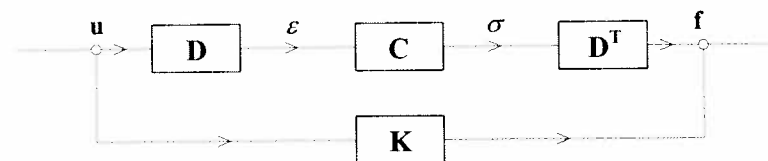


Fig. 3 Diagramma di flusso del metodo degli spostamenti

I. assegnati gli spostamenti, attraverso le equazioni di congruenza (1) si calcolano le deformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (15)$$

II. utilizzando il legame costitutivo (3) si determinano le tensioni associate ai dati spostamenti

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{u} \quad (16)$$

III. si impone che le tensioni, funzione degli spostamenti, siano equilibrate con le forze attive (Eq. 2). Si ottiene:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (17)$$

dove

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (18)$$

è la *matrice di rigidezza del sistema*, di dimensioni $n \times n$. Le (17) costituiscono le cercate equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamento.

La matrice di rigidezza gode di due importanti proprietà:

(a) \mathbf{K} è *simmetrica*: $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$

(b) \mathbf{K} è *definita positiva*: $\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$

La proprietà (a) segue dalla definizione (18) stessa e dal fatto che \mathbf{C} è simmetrica; la proprietà (b) è stata dimostrata nel teorema di esistenza e unicità (Par. 1.3), nell'ipotesi che non sussistano spostamenti rigidi (si veda anche l'Osservazione 4).

Dal momento che \mathbf{K} è non singolare è pure invertibile. La (17) ammette perciò la soluzione unica:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (19)$$

che individua la configurazione di equilibrio. Sostituendo la (19) prima nella (15) e poi nella (16) si ricavano deformazioni e tensioni, risolvendo così il problema elastico.

Esercizio 4: Si risolva il problema elastico dell'Esercizio 1 applicando il metodo degli spostamenti.

Il campo degli spostamenti è $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, \theta\}^T$; le (a) dell'Esercizio 1 forniscono le deformazioni associate (passo I). Utilizzando il legame costitutivo (c) si ha (passo II)

$$\sigma_1 = cv_0, \quad \sigma_2 = \frac{c}{2}[\sqrt{3}(u_0 - 2\theta l) - v_0], \quad \sigma_3 = c(v_0 + \theta l), \quad \mu_4 = cl^2\theta \quad (e)$$

Sostituendo le precedenti nelle equazioni di equilibrio (b) si ha (passo III)

$$\begin{aligned} \frac{c}{2}[\sqrt{3}(u_0 - 2\theta l) - v_0] \frac{\sqrt{3}}{2} &= 2pl; \quad cv_0 - \frac{c}{4}[\sqrt{3}(u_0 - 2\theta l) - v_0] + c(v_0 + \theta l) = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}cl[\sqrt{3}(u_0 - 2\theta l) - v_0] &+ cl(v_0 + \theta l) + c_f\theta = -2pl^2 \end{aligned} \quad (f)$$

ovvero, in forma matriciale

$$c \begin{bmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & (-3/2)l \\ -\sqrt{3}/4 & 9/4 & (\sqrt{3}/2 + 1)l \\ (-3/2)l & (\sqrt{3}/2 + 1)l & 5l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2pl \\ 0 \\ -2pl^2 \end{bmatrix} \quad (g)$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di rigidezza \mathbf{K} del sistema. Risolvendo, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{pl}{3c} \begin{bmatrix} 52/3 - 2\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{3} - 2 \\ (4 - 2/\sqrt{3})l^{-1} \end{bmatrix} \quad (h)$$

che sostituite nelle (a) forniscono lo stato di deformazione

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_4 \end{bmatrix} = \frac{2pl}{3c} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} + 1 \\ (2 - 1/\sqrt{3})l^{-1} \end{bmatrix} \quad (i)$$

e sostituite nelle (e) forniscono lo stato di tensione

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \frac{2pl}{3} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} + 1 \\ (2 - 1/\sqrt{3})l \end{bmatrix} \quad (l)$$

2.3 I coefficienti di rigidezza

I coefficienti della matrice di rigidezza sono suscettibili di una interessante interpretazione meccanica che può essere assunta quale definizione dei coefficienti stessi. Infatti la j -esima colonna della matrice \mathbf{K} coincide con il vettore dei termini noti \mathbf{f} se tutti gli elementi di \mathbf{u} sono nulli, tranne il j -esimo elemento, uguale ad 1. In simboli, posto $\mathbf{K} = [k_{ij}]$, $\mathbf{u} = \{u_i\}$, $\mathbf{f} = \{f_i\}$, è

$$k_{ij} = f_i \quad \text{se} \quad u_h = \begin{cases} 0 & h \neq j \\ 1 & h = j \end{cases} \quad (20)$$

Perciò la j -esima colonna di \mathbf{K} rappresenta il sistema di forze attive che bisogna applicare al sistema affinché questo subisca uno spostamento di componente j -esima uguale ad 1, e tutte le altre componenti uguali a zero. Più in particolare, k_{ij} rappresenta la forza attiva che è necessario applicare in i (cioè in i -esima posizione del vettore \mathbf{f}) affinché si abbia uno spostamento unitario in j (cioè in j -esima posizione del vettore \mathbf{u}) e tutti gli altri spostamenti nulli.

- **Osservazione 8.** La (17) può essere interpretata come sovrapposizione di effetti. Affinché si abbia uno spostamento \mathbf{u} è necessario sovrapporre n sistemi di forze (le colonne di \mathbf{K}), ognuno dei quali produce un diverso spostamento unitario, amplificando ciascun sistema dell'effettivo valore u_i che si vuole assegnare alle componenti di spostamento.

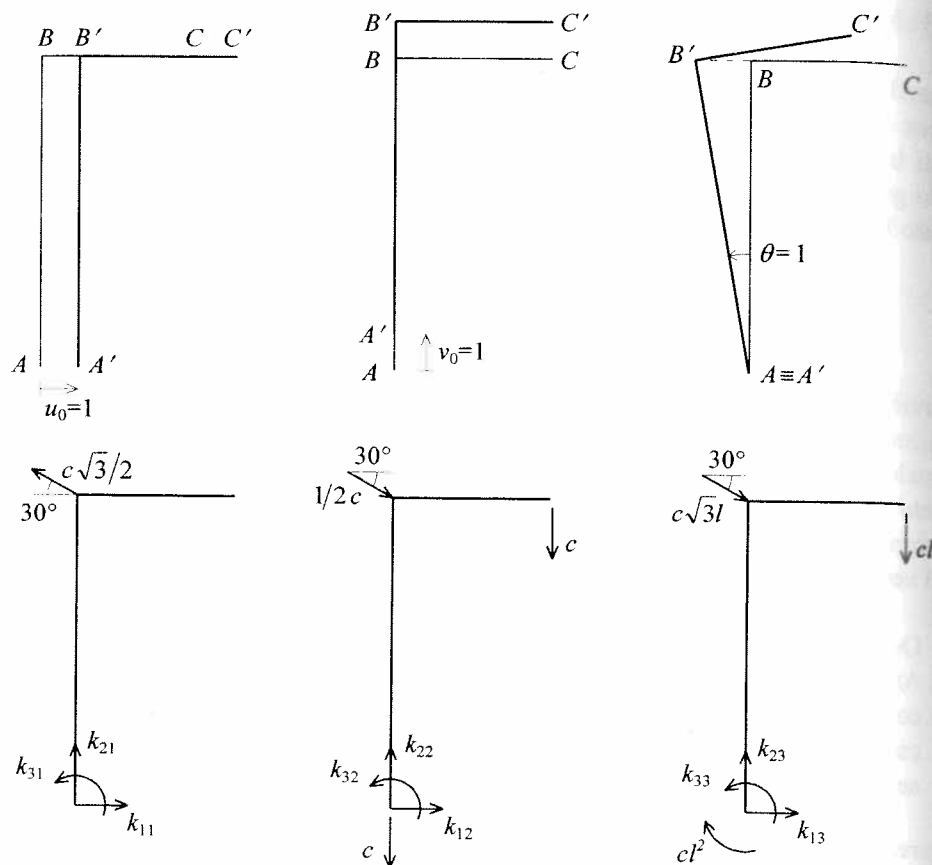
Esercizio 5: Si costruisca la matrice di rigidezza del sistema dell'Esercizio 1 applicando la definizione di coefficiente di rigidezza.

Si attiva solo una componente di spostamento per volta, assegnando alle altre valori nulli. Si ottengono i campi di spostamento in figura. Le forze generalizzate applicate in A sono i coefficienti di rigidezza rispettivamente delle prima, seconda e terza colonna di \mathbf{K} . Essi si calcolano imponendo l'equilibrio con le forze elastiche che si sviluppano a seguito degli stessi spostamenti, pure indicate in figura.

Si ha:

$$\begin{aligned} k_{11} - \frac{3}{4}c &= 0, \quad k_{21} + \frac{\sqrt{3}}{4}c = 0, \quad k_{31} + \frac{3}{2}cl = 0; \\ k_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}c &= 0, \quad k_{22} - \frac{9}{4}c = 0, \quad k_{32} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)cl = 0; \\ k_{13} + \frac{3}{2}cl &= 0, \quad k_{23} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)cl = 0, \quad k_{33} - 5cl^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui si ottengono i coefficienti già determinati nell'Esercizio 4. Si notino le proprietà di simmetria $k_{ij} = k_{ji}$ ed il loro significato meccanico.



2.4 Formulazione integrale: l'equazione dei lavori virtuali

La formulazione diretta richiede la scrittura delle equazioni di equilibrio. Questa può tuttavia essere evitata se si utilizza il primo corollario del TLV (cfr. 5.4.3) che, come si è detto, fornisce una condizione di equilibrio. Il corollario si scrive:

$$\delta \varepsilon^T \sigma = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad \forall (\delta \varepsilon, \delta \mathbf{u}) \mid \delta \varepsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \quad (21)$$

Esso richiede che l'ELV sia soddisfatta per ogni $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \varepsilon$ congruenti. Esprimendo le tensioni reali σ in termini di spostamenti reali \mathbf{u} attraverso la (16), e le deformazioni virtuali $\delta \varepsilon$ in termini di spostamenti virtuali $\delta \mathbf{u}$, la (21) si scrive

$$\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{f}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (22)$$

da cui si ottengono le equazioni di equilibrio (17) in termini di spostamenti. Il procedimento descritto costituisce la *formulazione integrale dell'equilibrio*. In definitiva, nelle applicazioni, occorre eseguire i seguenti passi:

- I. Si scrive l'ELV (21).
- II. Si studia la cinematica del sistema reale e si scrivono le equazioni di congruenza, $\varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{u}$.
- III. Si esprimono le tensioni in funzione degli spostamenti, $\sigma = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}$.

IV. Si studia la cinematica del sistema virtuale; poiché questa è *formalmente analoga a quella del sistema reale*, si scrive semplicemente $\delta \varepsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u}$; nello stesso modo, gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze si ottengono dalla FGSR.

V. Si sostituisce nell'ELV e si impone che questa valga per ogni $\delta \mathbf{u}$; i coefficienti dei singoli spostamenti virtuali, eguagliati a zero, costituiscono le cercate equazioni di equilibrio in termini di spostamenti reali.

• **Osservazione 9.** Non si confondano le grandezze cinematiche reali (\mathbf{u} , ε) con quelle virtuali ($\delta \mathbf{u}$, $\delta \varepsilon$). Anche se, formalmente, esse sono legate dalle stesse equazioni di congruenza, assumono un significato profondamente diverso. Infatti, le prime sono le grandezze (incognite) che descrivono la configurazione variata e lo stato di deformazione del sistema nello stato equilibrato; le seconde sono le grandezze (arbitrarie ma note) relative ad un problema cinematico virtuale, considerato al solo fine di eseguire un test sull'equilibrio, nello spirito del TLV. Se il test (cioè l'ELV) è soddisfatto, lo stato è equilibrato, altrimenti è solo congruente ma non equilibrato.

• **Osservazione 10.** I passi II e III del procedimento integrale sono identici a quelli (I e II) del metodo diretto. Il passo IV non richiede alcuno studio aggiuntivo, dovendosi solo applicare l'operatore δ alle equazioni di congruenza già ottenute. I due metodi differiscono solo nella scrittura delle condizioni di equilibrio che, in un caso sono ottenute in forma diretta, e nell'altro dall'ELV.

Esercizio 6: Considerando ancora il sistema dell'Esercizio 1, si ottengano le equazioni di equilibrio in termini di spostamento applicando la formulazione integrale.

L'ELV (21) si scrive (passo I):

$$\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_3 \delta \varepsilon_3 + \mu_4 \delta \kappa_4 = 2pl \delta u_H$$

avendo espresso il lavoro delle forze attive come il prodotto della risultante $2pl$ per lo spostamento δu_H del punto di applicazione. Le tensioni reali si esprimono in funzione degli spostamenti reali attraverso le (e) dell'Esercizio 4 (passi II e III, comuni al metodo diretto). Applicando poi formalmente l'operatore δ alle equazioni di congruenza (Eq. (a) dell'Esercizio 1) si ha immediatamente (passo IV)

$$\delta \varepsilon_1 = \delta v_0, \quad \delta \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\delta u_0 - 2l\delta\theta) - \frac{1}{2} \delta v_0, \quad \delta \varepsilon_3 = \delta v_0 + l\delta\theta, \quad \delta \kappa_4 = \delta\theta$$

Inoltre, dalla FGSR si ha:

$$\delta u_H = \delta u_0 - l\delta\theta$$

L'ELV si scrive dunque (passo V)

$$c \left\{ v_0 \delta v_0 + \frac{1}{4} \left[\sqrt{3} (u_0 - 2l\theta) - v_0 \right] \left[\sqrt{3} (\delta u_0 - 2l\delta\theta) - \delta v_0 \right] + (v_0 + l\theta) (\delta v_0 + l\delta\theta) \right\} + cl^2 \delta\theta - 2pl (\delta u_0 - l\delta\theta) = 0 \quad \forall (\delta u_0, \delta v_0, \delta\theta)$$

Raccogliendo si ottiene

$$\left(\frac{3}{4}cu_0 - \frac{\sqrt{3}}{4}cv_0 - \frac{3}{2}cl\theta - 2pl\right)\delta u_0 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}cu_0 + \frac{9}{4}cv_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)cl\theta\right)\delta v_0 + \left(-\frac{3}{2}clu_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)clv_0 + 5cl^2\theta + 2pl^2\right)\delta\theta = 0$$

da cui, eguagliando separatamente a zero i coefficienti di δu_0 , δv_0 e $\delta\theta$, si ottengono le equazioni cercate, identiche alle (g) dell'Esercizio 4.

- **Osservazione 11.** Questo procedimento, che qui può apparire più oneroso del metodo diretto, rappresenta invece il metodo più conveniente quando il sistema elastico è vincolato, come si vedrà nel capitolo successivo.

2.5 Formulazione variazionale: il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Un procedimento alternativo, sostanzialmente equivalente alla formulazione integrale, è offerto dalla *formulazione variazionale*. Per descriverlo occorre introdurre una nuova grandezza. Si definisce *energia potenziale totale (EPT)* la funzione

$$U(\varepsilon, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (23)$$

Nei due contributi dell'EPT si riconoscono: l'energia potenziale elastica Φ del sistema (cfr. 5.5.2) e il lavoro cambiato di segno compiuto dalle forze attive \mathbf{f} (assunte indipendenti da \mathbf{u}) negli spostamenti associati. Limitandosi a considerare *stati congruenti*, ε può essere espressa tramite le equazioni di congruenza (1) in termini di spostamenti. L'EPT diviene allora

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (24)$$

avendo introdotto la posizione (18).

- **Osservazione 12.** L'EPT è uno scalare, dipendente da \mathbf{u} , che associa ad ogni configurazione congruente un certo numero. Variando la configurazione si modifica il valore assunto dalla funzione U .

Vale il seguente, fondamentale teorema.

Teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale: CNES per l'equilibrio di un sistema elastico è che l'energia potenziale totale sia stazionaria nell'insieme delle configurazioni congruenti. Nello stato equilibrato l'energia potenziale totale assume un minimo isolato.

- **Osservazione 13.** Una funzione di n variabili è stazionaria in un punto se in esso si

annullano tutte le sue derivate parziali. Da un punto di vista geometrico ciò vuol dire che la funzione è "localmente piatta", nel senso che il suo piano tangente è orizzontale. Un punto di stazionarietà non è necessariamente un punto estremo (cioè di minimo o di massimo): si pensi ad esempio all'unico punto di stazionarietà di un paraboloide iperbolico (o a sella) dove la funzione cresce in una direzione e decresce nella direzione ortogonale.

- **Osservazione 14.** La prima parte del teorema afferma che, se si varia la configurazione congruente del sistema e si ricerca quella configurazione in cui U assume un valore stazionario si individua la configurazione equilibrata. Viceversa, se la configurazione, oltre ad essere congruente è anche equilibrata, l'EPT è ivi stazionaria. La seconda parte del teorema afferma che il punto di stazionarietà è anche punto estremo.

Il teorema si dimostra come segue. Se si considera uno stato $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ adiacente allo stato \mathbf{u} , in esso l'EPT è

$$U(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) + \delta U(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \delta^2 U(\mathbf{u}) \quad (25)$$

dove

$$\delta U(\mathbf{u}) = \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}), \quad \delta^2 U(\mathbf{u}) = \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K} \delta\mathbf{u} \quad (26)$$

sono rispettivamente la *variazione prima e seconda* della funzione $U(\mathbf{u})$. Esse rappresentano la parte del primo e del secondo ordine dello sviluppo in serie di Taylor di U nell'intorno di \mathbf{u} , è cioè

$$\delta U(\mathbf{u}) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i, \quad \delta^2 U(\mathbf{u}) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j \quad (27)$$

Ora, se lo stato, oltre ad essere congruente è anche equilibrato, vale la (17), e dunque $\delta U = 0 \forall \delta\mathbf{u}$, cioè U è stazionaria. Se viceversa U è stazionaria è $\delta U = 0 \forall \delta\mathbf{u}$, e quindi vale la (17), cioè lo stato è equilibrato. È così dimostrata la prima parte del teorema. Per dimostrare la seconda basta osservare che, poiché \mathbf{K} è definita positiva, è $\delta^2 U > 0 \forall \delta\mathbf{u}$, cioè il punto di stazionarietà è anche un punto di minimo.

Il teorema di stazionarietà dell'EPT costituisce uno strumento operativo alternativo all'ELV per ricavare, nello spirito del metodo degli spostamenti, le equazioni di equilibrio del sistema: esso costituisce la *formulazione variazionale dell'equilibrio*.

Nelle applicazioni occorre procedere come segue:

- Si scrive l'espressione dell'EPT, sommando le energie elastiche di tutti gli organi e sottraendo il lavoro delle forze attive.
- Si studia la cinematica del sistema e si esprimono le deformazioni degli organi in funzione degli spostamenti, $\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u}$, nonché gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze in funzione di \mathbf{u} .
- Si impone la stazionarietà di U ; le derivate parziali di U rispetto agli spostamenti generalizzati, eguagliate a zero, costituiscono le equazioni di equilibrio in termini di spostamento.

- **Osservazione 15.** Rispetto alla formulazione integrale, quella variazionale offre il vantaggio di un maggiore automatismo. Non è infatti necessario porre attenzione al segno dei vari contributi al lavoro virtuale interno, né distinguere il campo degli spostamenti reali da quello virtuale. Tuttavia, la variazione δU dell'EPT (Eq. 26₁), fornisce la stessa ELV (22) scritta direttamente con la formulazione integrale. Quindi la formulazione variazionale è equivalente a quella integrale, ma è più onerosa, perché richiede un'operazione di derivazione in più.

Esercizio 7: Si risolva il problema elastico relativo al sistema dell'Esercizio 1 applicando il teorema dell'EPT.

L'EPT del sistema è (passo I)

$$U = \frac{1}{2} c [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + l^2 \kappa_4^2] - 2pl u_H$$

dove u_H è lo spostamento del punto di applicazione della risultante delle forze distribuite. Le equazioni di congruenza (Eq. (a) dell'es. 1) e la FGSR permettono di esprimere U come funzione dei soli spostamenti generalizzati (passo II)

$$U = \frac{1}{2} c \left\{ v_0^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (u_0 - 2l\theta) - \frac{1}{2} v_0 \right]^2 + (v_0 + l\theta)^2 + l^2 \theta^2 \right\} - 2pl(u_0 - l\theta)$$

Imponendo la stazionarietà rispetto ad $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, \theta\}^T$ si ha:

$$\delta U = c \left\{ v_0 \delta v_0 + \frac{1}{4} \left[\sqrt{3} (u_0 - 2l\theta) - v_0 \right] \left[\sqrt{3} (\delta u_0 - 2l\delta\theta) - \delta v_0 \right] + (v_0 + l\theta) (\delta v_0 + l\delta\theta) \right\} + cl^2 \theta \delta\theta - 2pl(\delta u_0 - l\delta\theta) = 0 \quad \forall (\delta u_0, \delta v_0, \delta\theta)$$

Questa coincide con la condizione trovata nella formulazione integrale (Esercizio 6). Da qui in poi, dunque, il procedimento si sviluppa nello stesso modo.

3. Il metodo delle forze

3.1 Lo spirito del metodo

Le equazioni risolutive del problema elastico secondo il metodo delle forze sono equazioni di compatibilità cinematica espresse in termini delle incognite iperstatiche. Il metodo si basa sulla seguente logica. In un sistema iperstatico di grado $r=d-n$ esistono ∞^r stati di tensione equilibrati, ciascuno corrispondente ad una diversa scelta delle incognite iperstatiche χ . A ciascuno di questi stati corrisponde, tramite il legame costitutivo, un diverso stato di deformazione ε che non è in generale congruente, nel senso che le equazioni di congruenza non possono essere risolte per quel dato stato di deformazione. Esiste infatti uno ed un solo stato che, oltre ad essere equilibrato, è anche congruente. Il metodo delle forze consiste nel ricercare tra tutti gli stati di tensione equilibrati l'unico che è anche congruente. La ricerca viene effettuata esprimendo prima le tensioni e poi le deformazioni in termini delle incognite iperstatiche ed imponendo poi che queste soddisfino le equazioni di compatibilità cinematica (cioè le condizioni di solvibilità del problema cinematico).

- **Osservazione 16.** Per comprendere più a fondo lo spirito del metodo delle forze si pensi di effettuare la seguente, semplice, esperienza meccanica. Dato un sistema iperstatico ad elasticità concentrata, si taglino $r=d-n$ organi elastici in modo tale che, attraverso le sconnessioni operate, non possano più trasmettersi tensioni, rendendo quindi inefficaci gli organi. I rimanenti n organi siano tali da sopprimere gli spostamenti rigidi del sistema, che quindi è stato reso staticamente determinato (sistema principale, si ricordi l'Osservazione 5.14). Si applichino poi le forze attive. Queste sono equilibrate dagli sforzi delle n molle del sistema principale le quali, deformandosi, danno luogo ad un campo non nullo di spostamenti. In particolare, in corrispondenza delle sconnessioni operate, si verificano spostamenti relativi, di avvicinamento o allontanamento delle parti tagliate. Ora, applicando alle estremità degli organi tagliati delle forze arbitrarie (incognite iperstatiche) si cerchi di ripristinare la continuità originaria, producendo spostamenti relativi uguali e contrari a quelli prodotti dalle forze attive. In generale è necessario effettuare ∞^r tentativi, prima di determinare l'insieme delle incognite iperstatiche che ripristina la congruenza. Lo spirito del metodo consiste allora nell'imporre la congruenza in funzione delle incognite iperstatiche, piuttosto che tentare di soddisfare la congruenza, modificando le incognite ad arbitrio.

3.2 Il metodo diretto

Per ottenere le equazioni di compatibilità cinematica in termini di incognite iperstatiche bisogna procedere come indicato nel diagramma di flusso illustrato in Fig. 4, e precisamente:

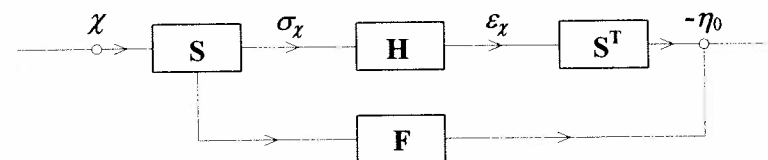


Fig. 4 Diagramma di flusso del metodo delle forze

- scelte le incognite iperstatiche, attraverso le equazioni di equilibrio si calcolano le tensioni (Eq. 5.22)

$$\sigma = \sigma_0 + S\chi \quad (28)$$

- invertendo il legame costitutivo (3) si determinano le deformazioni associate alle incognite iperstatiche

$$\varepsilon = H\sigma_0 + HS\chi \quad (29)$$

- si impone che le deformazioni, funzione delle incognite iperstatiche, soddisfino le equazioni (5.9) di compatibilità cinematica, $Q\varepsilon=0$. Ricordando che $Q=S^T$ (cfr. Eq. 5.32), si ottiene:

$$F\chi + \eta_0 = 0 \quad (30)$$

dove

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^T \mathbf{H} \mathbf{S}, \quad \eta_0 = \mathbf{S}^T \mathbf{H} \sigma_0 \quad (31)$$

\mathbf{F} , di dimensioni $r \times r$, è detta *matrice di flessibilità del sistema*; η_0 è il vettore dei termini noti, di dimensioni $r \times 1$. Le (30) costituiscono le cercate equazioni di compatibilità cinematica espresse in termini delle incognite iperstatiche.

- **Osservazione 17.** Ricordando che, dall'Osservazione 5.13, è

$$\mathbf{S} = [\sigma'_1 \quad \sigma'_2 \quad \dots \quad \sigma'_r]$$

dove σ'_i è lo stato di autotensione in cui $\chi_i = 1$ e $\chi_j = 0$ per $j \neq i$, posto

$$\mathbf{F} = [\eta_{ij}], \quad \eta_0 = \{\eta_{i0}\}$$

si ha

$$\eta_{ij} = \sigma'^T_i \mathbf{H} \sigma'_j, \quad \eta_{i0} = \sigma'^T_i \mathbf{H} \sigma_0 \quad (32)$$

Le espressioni (32) sono di grande utilità nelle applicazioni (si veda più avanti l'Osservazione 18 e l'Esercizio 9).

La matrice di flessibilità gode di due importanti proprietà:

(a) \mathbf{F} è *simmetrica*: $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$

(b) \mathbf{F} è *definita positiva*: $\chi^T \mathbf{F} \chi > 0, \forall \chi \neq 0, \chi \in \mathbb{R}^r$

La proprietà (a) segue dalla definizione (31) stessa e dal fatto che \mathbf{H} è simmetrica. La proprietà (b) segue dal fatto che, per la (31), è $\chi^T \mathbf{F} \chi = (\mathbf{S} \chi)^T \mathbf{H} (\mathbf{S} \chi)$. Ora, $\mathbf{S} \chi \equiv \sigma_\chi \neq 0 \forall \chi \neq 0$, in quanto σ_χ rappresenta uno stato di autotensione conseguente all'applicazione di incognite iperstatiche su un sistema principale isostatico. Poiché \mathbf{H} , come \mathbf{C} , è definita positiva, è $\chi^T \mathbf{F} \chi > 0 \forall \chi$, cioè anche \mathbf{F} è definita positiva. Invertendo la matrice non singolare \mathbf{F} , dalle (30) si ottiene la soluzione (unica)

$$\chi = -\mathbf{F}^{-1} \eta_0 \quad (33)$$

che individua lo stato congruente. Sostituendo le (33) prima nella (28) e poi nella (29) si determinano tensioni e deformazioni. Infine, per ricavare gli spostamenti generalizzati, occorre risolvere il problema cinematico (1), essendo le ε ormai note. Questo, pur essendo impossibile, ammette certamente soluzione, in quanto le deformazioni rispettano le equazioni di compatibilità cinematica $\mathbf{Q} \varepsilon = 0$. È quindi sufficiente isolare nelle (1) un minore non nullo di ordine n e risolvere le equazioni corrispondenti, ignorando le restanti r equazioni.

Esercizio 8: Si risolve il problema elastico dell'Esercizio 1 applicando il metodo delle forze. Il sistema è una volta iperstatico. Si assume σ_1 come incognita iperstatica, $\chi_1 := \sigma_1$. Le equazioni di equilibrio (b) dell'Esercizio 1 si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}l & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2pl \\ 0 \\ -2pl^2 \end{bmatrix} + \chi_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avendo portato a secondo membro l'incognita iperstatica e avendo lasciato a primo membro un minore non nullo. Ciò equivale a scegliere il sistema principale in Fig. (a), ottenuto da quello originario disconnettendo la molla 1. Il generico stato di tensione equilibrato è (passo I):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3}pl \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ (\sqrt{3}-1)l/3 \end{bmatrix} + \chi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ l \end{bmatrix}$$

i due contributi del quale sono rappresentati nelle Figg. (b) e (c), rispettivamente. Ad esso corrisponde lo stato di deformazione (passo II):

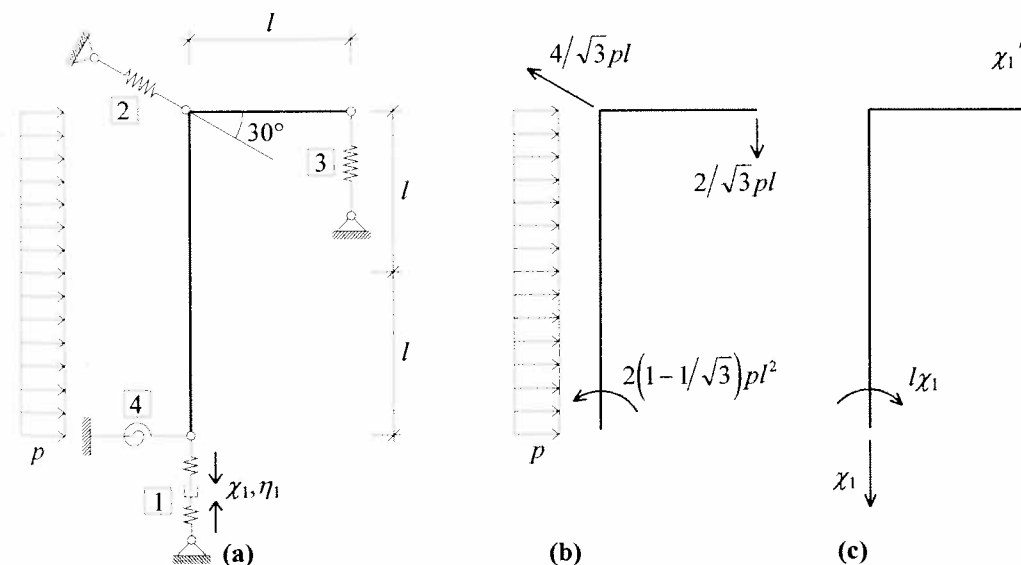
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_4 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3} \frac{pl}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ (\sqrt{3}-1)l^{-1}/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{c} \chi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ l^{-1} \end{bmatrix}$$

Per scrivere l'equazione di compatibilità cinematica si procede come nell'Esercizio 5.2. Risolvendo le ultime tre equazioni di congruenza (Eq. (a), es.1) si ricavano gli spostamenti in funzione delle deformazioni:

$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} [2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + (2\sqrt{3}-1)l\kappa_4], \quad v_0 = \varepsilon_3 - \kappa_4 l, \quad \theta = \kappa_4$$

Sostituendo gli spostamenti trovati nella prima equazione di congruenza si ottiene l'equazione di compatibilità cinematica:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + l\kappa_4 = 0$$



(Si noti che la dualità $\mathbf{Q}=(1\ 0\ -1\ 1)=\mathbf{S}^T$ è soddisfatta). Sostituendo alle deformazioni le loro espressioni in funzione dell'incognita iperstatica si ha (passo III)

$$3\chi_1 - \frac{2}{3}(2\sqrt{3}-3)pl = 0$$

Risolvendo si ricava l'incognita iperstatica

$$\chi_1 = \frac{2}{9}(2\sqrt{3}-3)pl$$

Conseguentemente deformazioni e tensioni valgono

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \kappa_4 \end{Bmatrix} = \frac{2pl}{3c} \begin{Bmatrix} 2/\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3}+1 \\ (2-1/\sqrt{3})l^{-1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \mu_4 \end{Bmatrix} = \frac{2pl}{3} \begin{Bmatrix} 2/\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3}+1 \\ (2-1/\sqrt{3})l \end{Bmatrix}$$

Note le deformazioni, dalle espressioni già trovate si determinano gli spostamenti:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{pl}{3c} \begin{Bmatrix} 52/3-2\sqrt{3} \\ 4/\sqrt{3}-2 \\ (4-2/\sqrt{3})l^{-1} \end{Bmatrix}$$

completando così la soluzione del problema, identica a quella dell'Esercizio 4.

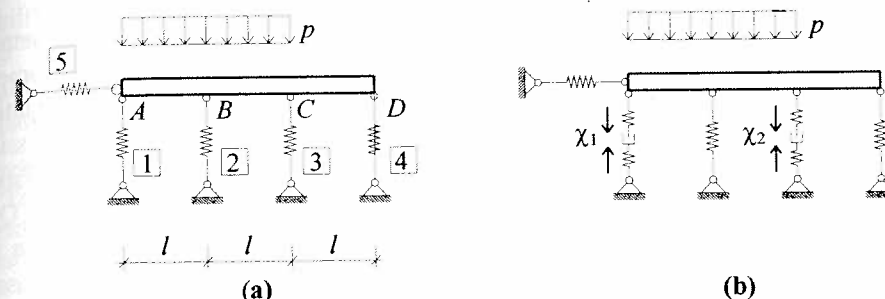
• **Osservazione 18.** L'interpretazione meccanica del metodo delle forze descritta nell'Osservazione 16, e l'espressione (32) dei coefficienti della matrice di flessibilità e dei termini noti, suggerisce di effettuare i calcoli come segue, al fine di automatizzare il procedimento.

- I. Si effettuano nel sistema $r=d-n$ sconnessioni di organi elastici e si individua il sistema principale associato.
- II. Si applicano separatamente al sistema principale $r+1$ sistemi di forze: il sistema 0 è costituito dalle sole forze attive; il sistema i ($i=1,2,\dots,r$) è costituito dalla i -esima incognita iperstatica posta uguale ad 1 e le altre incognite iperstatiche poste uguali a zero; si determinano corrispondentemente gli stati di tensione $\sigma_0, \sigma'_1, \dots, \sigma'_r$.
- III. Si applicano le (32) per costruire la matrice \mathbf{F} e il vettore η_0 .
- IV. Calcolate le incognite iperstatiche si determina lo stato di tensione sovrapponendo gli effetti (cfr. Osservazione 5.13)

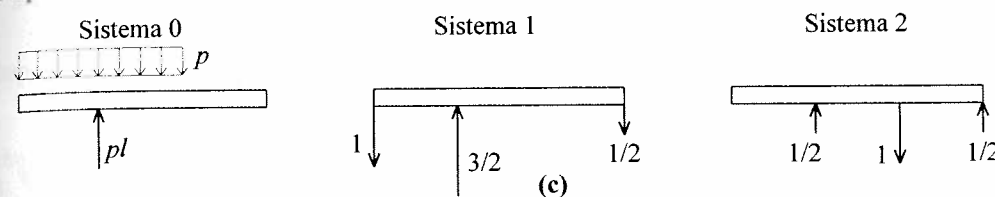
$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^r \chi_i \sigma'_i$$

L'esercizio che segue illustra il procedimento.

Esercizio 9: Si determini lo stato di tensione del sistema in Fig. (a) applicando il metodo delle forze. Sia c la rigidezza delle molle.



Poiché $n=3$, $d=5$, il sistema è due volte iperstatico. Si introducono due sconnessioni nelle molle 1 e 3 e si ottiene il sistema principale (Fig. b; passo I). Si applicano separatamente al sistema principale tre sistemi di forze: le forze attive (sistema 0), l'incognita iperstatica χ_1 posta uguale ad 1 (sistema 1), e l'incognita iperstatica χ_2 posta uguale ad 1 (sistema 2). Imponendo l'equilibrio si determinano gli stati di tensione illustrati nella Fig. (c).



È quindi (passo II):

$$\sigma_0 = \{0, -pl, 0, 0, 0\}^T, \quad \sigma'_1 = \left\{1, -\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right\}^T, \quad \sigma'_2 = \left\{0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right\}^T$$

Utilizzando le (32) si ha (passo III):

$$\eta_{11} = \frac{1}{c} \sigma'_1{}^T \sigma'_1 = \frac{7}{2c}, \quad \eta_{12} = \eta_{21} = \frac{1}{c} \sigma'_1{}^T \sigma'_2 = \frac{1}{2c}, \quad \eta_{22} = \frac{1}{c} \sigma'_2{}^T \sigma'_2 = \frac{3}{2c},$$

$$\eta_{10} = \frac{1}{c} \sigma'_1{}^T \sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{pl}{c}, \quad \eta_{20} = \frac{1}{c} \sigma'_2{}^T \sigma_0 = \frac{1}{2} \frac{pl}{c}$$

Le equazioni di compatibilità cinematica (30) si scrivono dunque

$$\frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} + \frac{pl}{2c} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo si ha:

$$\chi_1 = -\frac{2}{5} pl, \quad \chi_2 = -\frac{1}{5} pl$$

Lo stato di tensione si ottiene sovrapponendo gli effetti dei tre sistemi di forze (passo IV):

$$\sigma = \sigma_0 + \chi_1 \sigma'_1 + \chi_2 \sigma'_2$$

ovvero

$$\sigma = -\frac{pl}{5} \left\{ 2 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right\}^T$$

3.3 Il significato geometrico delle equazioni di compatibilità cinematica: la formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili

La formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili (Eq. 5.44) permette di dare alle equazioni di compatibilità cinematica (30) un notevole significato geometrico, in linea con l'interpretazione meccanica del metodo. Dato un sistema iperstatico, ed associato ad esso un sistema principale ottenuto effettuando delle sconnessioni (molle i e j nella Fig. 5a), si vogliono calcolare gli spostamenti relativi in corrispondenza dei tagli, note le deformazioni (29). A tal scopo è utile applicare la FGSD. Questa richiede il calcolo di uno stato di tensione virtuale equilibrato con una forza virtuale, d'intensità unitaria, che compie lavoro nello spostamento incognito. Nel caso in esame occorre considerare due forze (o coppie) unitarie, uguale e contrarie, agenti alle estremità dell'organo sezionato di cui si vuole calcolare lo spostamento relativo (Fig. 5b).

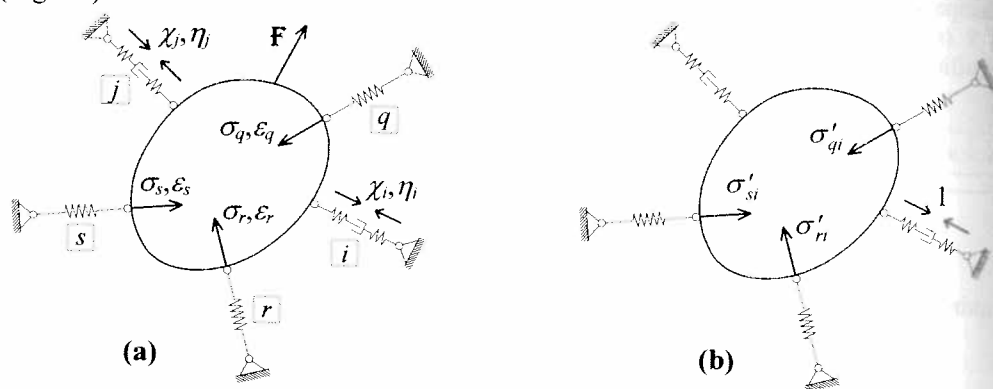


Fig. 5 (a) Sistema principale (reale), (b) sistema virtuale

Detto η_i lo spostamento relativo nell' i -esima sconnessione e detta χ_i l'incognita iperstatica associata, la FGSD si scrive

$$\eta_i = \sigma'_i{}^T \varepsilon \quad (i=1,2,\dots,d-n) \quad (34)$$

dove $\sigma'_i = \{\sigma'_{ri}\}$ è lo stato di autotensione in cui $\chi_i=1$ e $\chi_j=0$ per $j \neq i$. Ma, come notato precedentemente, σ'_i coincide con la i -esima colonna di S , per cui le (34) si scrivono anche

$$\eta = S^T \varepsilon \quad (35)$$

dove $\eta = \{\eta_i\}$. Sostituendo infine le (29) si ha:

$$\eta = F\chi + \eta_0 \quad (36)$$

La (36) attribuisce un notevole significato geometrico ai due addendi dell'equazione (30), $\eta_\chi := F\chi$ ed η_0 . Essi infatti rappresentano gli spostamenti relativi che si verificano in corrispondenza delle sconnessioni presenti nel sistema principale, rispettivamente dovuti alle incognite iperstatiche e alle forze attive. L'equazione (30) esprime appunto l'eguaglianza a zero della somma dei due contributi:

$$\eta_\chi + \eta_0 = 0 \quad (37)$$

• **Osservazione 19.** Questa interpretazione viene spesso utilizzata nelle applicazioni come metodo risolutivo. Invece cioè di fare riferimento all'equazione di compatibilità cinematica $S^T \varepsilon = 0$ come condizione di solvibilità del problema cinematico, si preferisce imporre la condizione (equivalente) $\eta=0$, attribuendo così all'equazione risolutiva del metodo delle forze un significato meno astratto e di più facile interpretazione meccanica.

Esercizio 10: Applicando la FGSD, si riottienga l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 8.

Si tratta di calcolare lo spostamento η_1 che si verifica nell'unica sconnessione presente nel sistema in Fig. (a) dell'Esercizio 8. Applicando due forze unitarie uguali e contrarie all'estremità della sconnessione si ingenera lo stato di tensione (virtuale)

$$\sigma'_1 = \{1 \quad 0 \quad -1 \quad l\}^T$$

uguale a quello della Fig. (c) dell'Esercizio 8, diviso per χ_1 . La FGSD si scrive

$$\begin{aligned} 1 \cdot \eta_1 &= \varepsilon_1 \sigma'_{11} + \varepsilon_2 \sigma'_{21} + \varepsilon_3 \sigma'_{31} + \kappa_4 \mu'_{41} \\ &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + l\kappa_4 \end{aligned}$$

Imponendo che sia $\eta_1=0$ si ha

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + l\kappa_4 = 0$$

che costituisce l'equazione di compatibilità cinematica, identica a quella trovata nell'Esercizio 8.

• **Osservazione 20.** L'esercizio precedente ha messo in rilievo che, nell'utilizzare la FGSD, lo stato di tensione virtuale equilibrato con la forza unitaria è proporzionale allo stato di tensione (reale) equilibrato con l'incognita iperstatica. Questa circostanza è ovviamente generale, e dipende dall'eguaglianza formale (ma non sostanziale) tra le incognite iperstatiche (reali) e le forze unitarie (virtuali).

3.4 I coefficienti di flessibilità

I coefficienti della matrice di flessibilità sono suscettibili di una interessante interpretazione meccanica. Si è detto che

$$\eta_\chi = F\chi \quad (38)$$

è il vettore degli spostamenti relativi che si verificano nei punti di sconnessione a causa delle incognite iperstatiche. Ora, se tutti gli elementi di χ sono nulli, ad eccezione del j -esimo elemento che è uguale ad 1, la j -esima colonna di F coincide con η_χ . In simboli, posto $F = [\eta_{ij}]$, $\eta_\chi = \{\eta_{ix}\}$, $\chi = \{\chi_i\}$, è

$$\eta_{ij} = \eta_{ix} \quad \text{se} \quad \chi_h = \begin{cases} 0 & h \neq j \\ 1 & h = j \end{cases} \quad (39)$$

Perciò la j -esima colonna di F rappresenta gli spostamenti dei punti di sconnessione quando sul sistema principale agisce la j -esima incognita iperstatica, posta uguale ad 1. Più in particolare, η_{ij} è lo spostamento in i (cioè in i -esima posizione nel vettore η_χ)

conseguente all'applicazione di una coppia di forze unitarie posta in j (cioè in j -esima posizione del vettore χ) e tutte le altre forze uguali a zero. La Fig. 6 illustra il significato dei coefficienti η_{ij} per un sistema due volte iperstatico. Si noti che, stante la simmetria di \mathbf{F} , è $\eta_{12} = \eta_{21}$.

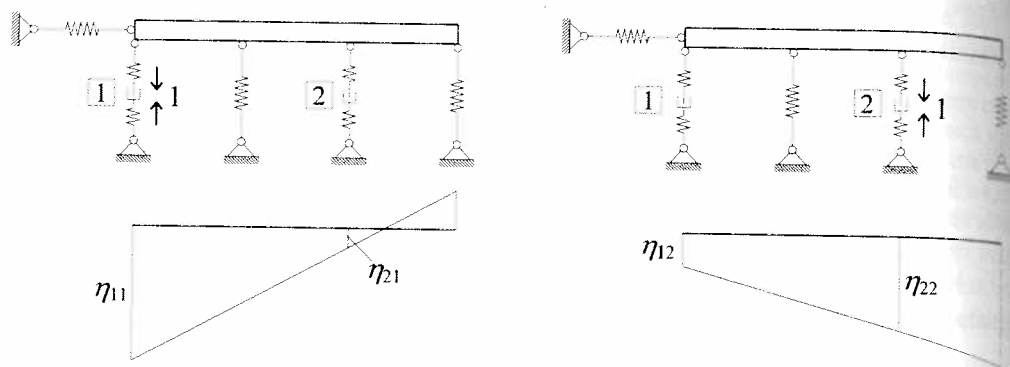


Fig. 6 Coefficienti di flessibilità

- **Osservazione 21.** I coefficienti di flessibilità sono anche detti *coefficienti di influenza*. Essi infatti rappresentano l'influenza esercitata dalle forze sugli spostamenti dei punti, cioè l'effetto (lo spostamento) che si risente in un dato punto quando la causa (la forza di intensità unitaria), è applicata in un altro punto. Conseguentemente la (38) può essere interpretata come sovrapposizione di effetti. Lo spostamento η_{ix} è la somma degli effetti η_{ij} dovuti alle forze unitarie, ciascuno amplificato dell'effettivo valore χ_j delle forze.
- **Osservazione 22.** Deve essere osservato che, in generale, la *matrice di flessibilità* \mathbf{F} e la *matrice di rigidezza* \mathbf{K} non sono l'inversa l'una dell'altra. Per convincersene basta pensare che mentre \mathbf{K} ha dimensioni $n \times n$, \mathbf{F} ha dimensioni $r \times r$. Infatti, mentre la matrice \mathbf{K} mette in relazione le forze attive e gli spostamenti generalizzati, la matrice \mathbf{F} mette in relazione le incognite iperstatiche agenti sul sistema principale e gli spostamenti corrispondenti. Data la matrice \mathbf{F} è sempre possibile determinare l'inversa \mathbf{F}^{-1} ; questa, fornendo χ in funzione di η_χ ha sì il significato di una *matrice di rigidezza*, però non è la *matrice di rigidezza* del sistema in quanto opera su variabili di spostamento che possono essere insufficienti oppure esuberanti rispetto a quelle strettamente necessarie ad individuare la configurazione variata del sistema. Si noti ancora che mentre \mathbf{F} è sempre invertibile (perché per definizione è legata ad un sistema principale isostatico) \mathbf{K} è invertibile solo se sono stati soppressi gli spostamenti rigidi.

3.5 Il calcolo degli spostamenti nei sistemi iperstatici mediante la FGSD

Quando si opera con il metodo delle forze, il calcolo degli spostamenti rappresenta l'ultimo passo del procedimento: dopo aver determinato prima le tensioni e poi le deformazioni occorre risolvere il problema cinematico. Tuttavia spesso non si è interes-

sati a determinare l'intero campo di spostamenti, ma solo le componenti di spostamento di pochi punti; in tal caso è opportuno rinunciare a risolvere il problema cinematico ed utilizzare invece la FGSD. Questa richiede il calcolo di uno stato di tensione virtuale equilibrato con un'unica forza attiva, di intensità unitaria, che compie lavoro nello spostamento incognito. Comunque, dal momento che il sistema è iperstatico, esistono *infiniti stati di tensione equilibrati* con la forza unitaria; la FGSD richiede di considerare *uno qualunque di essi*, dal momento che il risultato non dipende da questa scelta (si ricordino le osservazioni 5.20 e 5.21). Si possono quindi assegnare ad arbitrio valori noti, ad esempio nulli, a r tensioni arbitrariamente scelte (purché le rimanenti siano linearmente indipendenti) e ricavare dall'equilibrio le altre tensioni. In particolare può essere comodo (ma assolutamente non necessario) sviluppare i calcoli facendo riferimento allo stesso sistema principale che si è utilizzato per risolvere il sistema iperstatico. Detta η_P la componente di spostamento del punto P che si vuole calcolare, compatibile con la deformazione nota $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, e detto $\sigma^* = \{\sigma_i^*\}$ lo stato di tensione virtuale equilibrato con la forza unitaria \mathbf{F}^* (Fig. 7), la FGSD si scrive

$$1 \cdot \eta_P = \sigma^{*T} \varepsilon \quad (40)$$

sostituendo ad ε la sua espressione (29) e tenuto conto della (33) si ha:

$$\eta_P = \sigma^{*T} \mathbf{H}(\sigma_0 - \mathbf{S}\mathbf{F}^{-1}\eta_0) \quad (41)$$

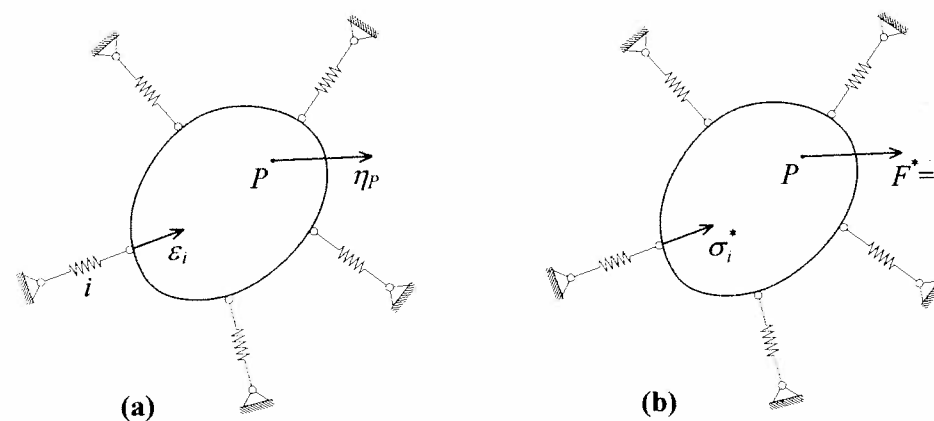


Fig. 7 Applicazione della FGSD: (a) stato di deformazione reale; (b) stato di tensione virtuale

I due addendi della (41) rappresentano rispettivamente il contributo allo spostamento η_P dovuto ai soli carichi e alle sole incognite iperstatiche.

Esercizio 11: Si calcoli con la FGSD lo spostamento orizzontale del punto H , del sistema dell'Esercizio 1, già risolto con il metodo delle forze nell'Esercizio 8.

Nell'Esercizio 8 si è determinato il seguente stato di deformazione, funzione dell'incognita iperstatica $\chi_1 := \sigma_1$.

$$\varepsilon_1 = \frac{\chi_1}{c}, \quad \varepsilon_2 = \frac{4pl}{\sqrt{3}c}, \quad \varepsilon_3 = \frac{2pl}{\sqrt{3}c} - \frac{\chi_1}{c}, \quad \kappa_4 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{p}{c} + \frac{1}{cl} \chi_1$$

Applicata una forza unitaria orizzontale nel punto H occorre determinare un qualunque stato di

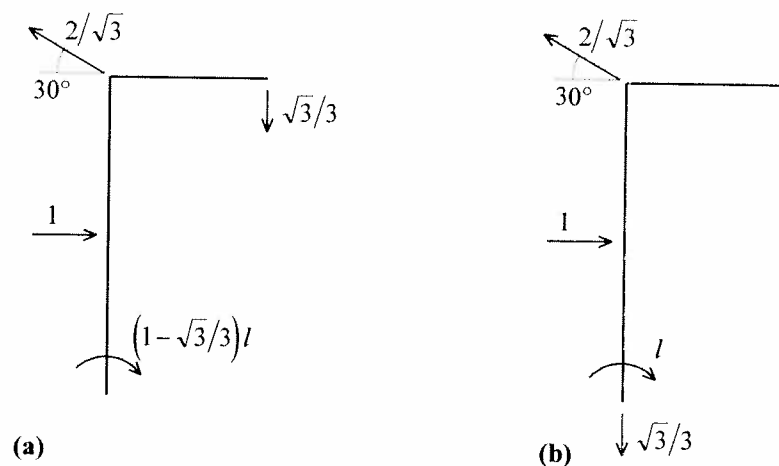
tensione equilibrato. Nella Fig. (a) è rappresentato lo stato

$$\sigma^* = \left\{ 0 \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)l \right\}$$

che si ottiene ponendo $\sigma_1^* = 0$ (cioè lo stato che si ha nel sistema principale utilizzato nell'Esercizio 8); nella Fig. (b) è rappresentato lo stato

$$\sigma^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad l \right\}$$

che si ottiene ponendo invece $\sigma_3^* = 0$.



La FGSD si scrive

$$u_H = \sigma_1^* \varepsilon_1 + \sigma_2^* \varepsilon_2 + \sigma_3^* \varepsilon_3 + \mu_4^* \kappa_4$$

da cui, come è facile verificare, indipendentemente dalla scelta dello stato equilibrato, segue per u_H la stessa espressione

$$u_H = \frac{4}{9} (10 - \sqrt{3}) \frac{pl}{c}$$

Questo è in accordo con i risultati dell'Esercizio 8, potendosi verificare che $u_H = u_0 - \theta l$.

3.6 Formulazione integrale: l'equazione dei lavori virtuali complementare

La formulazione diretta richiede la scrittura delle equazioni di compatibilità cinematica. Questa può tuttavia essere evitata se si utilizza il secondo corollario del TLV, nella forma complementare, già discussa nel Par. 5.4.5 che, come si è detto, fornisce l'equazione di compatibilità cinematica. Il corollario si scrive:

$$\delta \sigma_\chi^T \varepsilon = 0 \quad \forall \delta \sigma_\chi \mid \mathbf{E} \delta \sigma_\chi = \mathbf{0} \quad (42)$$

Esso richiede che l'ELVC sia soddisfatta per ogni $\delta \sigma_\chi$ autoequilibrato. Ora, poiché le tensioni $\delta \sigma_\chi$ non sono arbitrarie, dovendo soddisfare l'equilibrio, è conveniente esprimerle nella forma $\delta \sigma_\chi = \mathbf{S} \delta \chi$, dove $\delta \chi$ è un vettore di parametri arbitrari (incognite iperstatiche virtuali). Esprimendo inoltre le deformazioni reali ε in termini delle incognite iperstatiche χ attraverso le (29), la (42) si scrive

$$\delta \chi^T \mathbf{S}^T (\mathbf{H} \sigma_0 + \mathbf{H} \mathbf{S} \chi) = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (43)$$

da cui si ottengono le equazioni di congruenza (30) in termini delle incognite iperstatiche. Il procedimento descritto costituisce la *formulazione integrale della congruenza*. In definitiva, nelle applicazioni, occorre eseguire i seguenti passi:

- I. Si scrive l'ELVC (42).
- II. Si studia la statica del sistema reale e si ottiene il più generale stato di tensione, $\sigma = \sigma_0 + \mathbf{S} \chi$.
- III. Si esprimono le deformazioni in termini delle incognite iperstatiche, $\varepsilon = \mathbf{H} \sigma_0 + \mathbf{H} \mathbf{S} \chi$.
- IV. Si studia la statica del sistema virtuale; poiché questa è *formalmente analoga a quella del sistema reale*, si scrive semplicemente $\delta \sigma_\chi = \mathbf{S} \delta \chi$.
- V. Si sostituisce nell'ELVC e si impone che questa valga per ogni $\delta \chi$; i coefficienti dei singoli parametri arbitrari di tensione $\delta \chi$, eguagliati a zero, costituiscono le cercate equazioni di compatibilità cinematica in termini di incognite iperstatiche (reali).

• **Osservazione 23.** Non si confondano le incognite iperstatiche reali χ con quelle virtuali $\delta \chi$. Esse descrivono infatti due stati di autotensione formalmente analoghi ma dal diverso significato: le prime (incognite) si riferiscono allo stato reale congruente; le seconde (arbitrarie, ma note) si riferiscono ad uno stato virtuale, considerato al solo fine di eseguire un test sulla congruenza, nello spirito del metodo delle forze. Se il test (cioè l'ELVC) è soddisfatto, lo stato è congruente, altrimenti è solo equilibrato ma non è congruente.

• **Osservazione 24.** I passi II e III del procedimento integrale sono identici a quelli (I e II) del metodo diretto. Il passo IV non richiede alcuno studio aggiuntivo, dovendosi solo applicare l'operatore δ allo stato di autotensione già ottenuto. I due metodi differiscono solo nella scrittura delle condizioni di compatibilità cinematica che, in un caso sono ottenute in forma diretta, e nell'altro dall'ELVC.

- **Osservazione 25.** Si osservi che questo metodo è molto simile a quello che fa uso della FGSD (Par. 3.3; si confrontino in particolare le osservazioni 20 e 23). Tuttavia qui, a fronte dell'automatismo del procedimento, viene meno l'interpretazione meccanica della congruenza data in quella sede.

Esercizio 12: Considerando il sistema dell'Esercizio 9, si ottengano le equazioni di compatibilità cinematica in termini di incognite iperstatiche applicando la formulazione integrale.

L'ELVC (42) si scrive (passo I)

$$\sum_{i=1}^5 \delta \sigma_{ix} \varepsilon_i = 0$$

Il generico stato (reale) di tensione autoequilibrato è (passo II)

$$\sigma = \begin{Bmatrix} 0 \\ -pl \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \chi_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \chi_2$$

avendo scelto $\chi_1 := \sigma_1$, $\chi_2 := \sigma_3$, come nell'Esercizio 9. Corrispondentemente le deformazioni sono (passo III):

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} 0 \\ -pl \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \chi_1 + \frac{\chi_2}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lo stato di autotensione virtuale $\delta \sigma_\chi$ può ottenersi formalmente da σ ponendo i carichi uguali a zero ed applicando poi l'operatore δ . Si ottiene (passo IV)

$$\delta \sigma_\chi = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \chi_1 + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \chi_2$$

Sostituendo nell'ELVC e raccogliendo si ha (passo V)

$$(7\chi_1 + \chi_2 + 3pl)\delta\chi_1 + (\chi_1 + 3\chi_2 + pl)\delta\chi_2 = 0$$

Dovendo questa valere per $\delta\chi_1$, $\delta\chi_2$ arbitrari devono annullarsi separatamente i termini in parentesi. Si riottengono così le equazioni di compatibilità cinematica dell'Esercizio 9.

3.7 Formulazione variazionale: il teorema di stazionarietà dell'energia complementare elastica

Un procedimento alternativo, sostanzialmente equivalente alla formulazione integrale, è offerto dalla *formulazione variazionale*. Si ricordi che, nel Par. 5.5.2, si è introdotta la grandezza *energia complementare elastica* (ECE), definita come

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma \quad (44)$$

funzione dello stato di tensione. Limitandosi a considerare *stati equilibrati*, σ deve essere espressa, tramite la (28), in termini di incognite iperstatiche χ (che sono i parametri liberi dello stato tensionale equilibrato). L'ECE diviene allora funzione delle sole incognite iperstatiche

$$\begin{aligned} \Psi(\chi) &= \frac{1}{2} (\sigma_0 + \mathbf{S}\chi)^T \mathbf{H} (\sigma_0 + \mathbf{S}\chi) \\ &= \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{S}^T \mathbf{H} \mathbf{S} \chi + \chi^T \mathbf{S}^T \mathbf{H} \sigma_0 + \Psi(\mathbf{0}) \\ &= \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{F} \chi + \chi^T \eta_0 + \Psi(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (45)$$

dove si sono introdotte le posizioni (31); inoltre $\Psi(\mathbf{0}) = 1/2 \sigma_0^T \mathbf{H} \sigma_0$ rappresenta l'energia complementare elastica associata ad incognite iperstatiche nulle.

- **Osservazione 26.** L'ECE è uno scalare, dipendente da χ , che associa ad ogni stato di tensione equilibrato un certo numero. Variando lo stato di tensione si modifica il valore assunto dalla funzione Ψ .

Vale il seguente, fondamentale teorema.

Teorema di stazionarietà dell'energia complementare elastica: CNES per la congruenza di un sistema elastico è che l'energia complementare elastica sia stazionaria nell'insieme degli stati equilibrati. Nello stato congruente l'energia complementare elastica assume un minimo isolato.

- **Osservazione 27.** La prima parte del teorema afferma che, se si varia lo stato di tensione equilibrato del sistema e si ricerca quello stato in cui Ψ assume un valore stazionario si individua lo stato congruente. Viceversa, se lo stato, oltre ad essere equilibrato è anche congruente, l'ECE è ivi stazionaria. La seconda parte del teorema afferma che il punto di stazionarietà è anche punto estremale.

Il teorema si dimostra come segue. Se si considera uno stato $\chi + \delta\chi$ adiacente allo stato χ , in esso l'ECE è

$$\Psi(\chi + \delta\chi) = \Psi(\chi) + \delta\Psi(\chi) + \frac{1}{2} \delta^2 \Psi(\chi) \quad (46)$$

dove

$$\delta\Psi(\chi) = \delta\chi^T (\mathbf{F}\chi + \eta_0), \quad \delta^2 \Psi(\chi) = \delta\chi^T \mathbf{F} \delta\chi \quad (47)$$

sono rispettivamente la *variazione prima e seconda* della funzione $\Psi(\chi)$. Esse rappresentano la parte del primo e del secondo ordine dello sviluppo in serie di Taylor di Ψ nell'intorno di χ , è cioè

$$\delta\Psi(\chi) \equiv \sum_{i=1}^r \frac{\partial\Psi}{\partial\chi_i} \delta\chi_i, \quad \delta^2\Psi(\chi) \equiv \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi_i \partial\chi_j} \delta\chi_i \delta\chi_j \quad (48)$$

Ora, se lo stato, oltre ad essere equilibrato è anche congruente, vale la (30), e dunque $\delta\Psi=0 \forall \delta\chi$, cioè Ψ è stazionaria. Se viceversa Ψ è stazionaria è $\delta\Psi=0 \forall \delta\chi$, e quindi vale la (30), cioè lo stato è congruente. È così dimostrata la prima parte del teorema. Per dimostrare la seconda basta osservare che, poiché \mathbf{F} è definita positiva, è $\delta^2\Psi > 0 \forall \delta\chi$, cioè il punto di stazionarietà è anche un punto di minimo. Si noti che la costante $\Psi(\mathbf{0})$ è inessenziale, cosicché può porsi $\Psi(\mathbf{0})=0$.

Il teorema di stazionarietà dell'ECE costituisce uno strumento operativo alternativo all'ELVC per ricavare, nello spirito del metodo delle forze, le equazioni di compatibilità cinematica del sistema: esso costituisce la *formulazione variazionale della congruenza*.

Nelle applicazioni occorre procedere come segue:

- I. Si scrive l'espressione dell'ECE, sommando le energie complementari elastiche di tutti gli organi;
- II. Si studia l'equilibrio del sistema e si esprimono le tensioni degli organi in funzione delle incognite iperstatiche, $\sigma = \sigma_0 + \mathbf{S}\chi$;
- III. si impone la stazionarietà di Ψ . Le derivate parziali di Ψ rispetto alle incognite iperstatiche, eguagliate a zero, costituiscono le equazioni di compatibilità cinematica in termini di incognite iperstatiche.

- **Osservazione 28.** Rispetto alla formulazione integrale, quella variazionale offre il vantaggio di un maggiore automatismo. Non è infatti necessario porre attenzione al segno dei vari contributi al lavoro virtuale complementare, né distinguere il campo degli spostamenti reali da quello virtuale. Tuttavia, la *variazione $\delta\Psi$ dell'ECE* (Eq. 47₁), *fornisce la stessa ELVC (43) scritta direttamente con la formulazione integrale*. Quindi la formulazione variazionale è equivalente a quella integrale, ma è più onerosa, perché richiede un'operazione (di derivazione) in più.

Esercizio 13: Si risolva il problema elastico relativo al sistema dell'Esercizio 9 applicando il teorema dell'ECE.

L'ECE del sistema è (passo I)

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^5 \sigma_i^2$$

Il generico stato di tensione equilibrato è (passo II)

$$\sigma = \left\{ \chi_1 \quad -pl - \frac{3}{2}\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_2 \quad \chi_2 \quad \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi_2) \quad 0 \right\}^T$$

avendo scelto $\chi_1 := \sigma_1$, $\chi_2 := \sigma_3$, come negli esercizi 9 e 12. L'ECE si scrive dunque:

$$\Psi(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{2c} \left(\frac{7}{2}\chi_1^2 + p^2 l^2 + 3pl\chi_1 + pl\chi_2 + \chi_1\chi_2 + \frac{3}{2}\chi_2^2 \right)$$

Eguagliando a zero la variazione prima si ha:

$$\delta\Psi = \frac{1}{2c} \left[(7\chi_1 + \chi_2 + 3pl)\delta\chi_1 + (\chi_1 + 3\chi_2 + pl)\delta\chi_2 \right] = 0 \quad \forall (\delta\chi_1, \delta\chi_2)$$

Questa coincide con l'ELVC ottenuta nell'Esercizio 12, da cui seguono le equazioni di compatibilità cinematica dell'Esercizio 9. Si procede quindi come già illustrato.

4. Gli stati di coazione

4.1 Le equazioni del problema

Il problema elastico, formulato e risolto nei precedenti paragrafi, può essere esteso all'analisi degli effetti di deformazioni imposte di tipo anelastico, ad esempio dovute a variazioni termiche degli organi deformabili, a difetti di montaggio (si veda poi l'Osservazione 30), o ad altri tipi di distorsioni.

Sia $\bar{\varepsilon}$ il vettore delle deformazioni anelastiche imposte agli organi deformabili. Il legame costitutivo (3) si modifica come segue

$$\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad (49)$$

Infatti, come già si è detto nel Par. 4.5.4 a proposito del singolo organo, le tensioni sono proporzionali alle sole deformazioni elastiche $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$, cioè alle deformazioni totali ε depurate delle deformazioni anelastiche $\bar{\varepsilon}$. Le equazioni di congruenza (1) restano invariate

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (50)$$

in quanto nel problema cinematico sono coinvolte le deformazioni totali ε , indipendentemente dalla loro origine, elastica oppure no. Infine, le equazioni di equilibrio (2), in assenza di forze attive, diventano omogenee:

$$\mathbf{D}^T \sigma = 0 \quad (51)$$

Si consideri dapprima un sistema cinematicamente/staticamente determinato. Poiché la (51) ammette solo la soluzione banale $\sigma=0$, dalle (49) si ha $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, e infine dalle (50) $\mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\bar{\varepsilon}$. Si conclude che *deformazioni anelastiche agenti in sistemi cinematicamente/staticamente determinati producono solo effetti cinematici*. Si consideri ora un sistema staticamente indeterminato. Le equazioni di equilibrio (51) ammettono soluzioni non banali, cioè stati di tensione autoequilibrati. Tra questi uno è anche congruente (si veda poi l'Osservazione 29), ed è quindi soluzione del problema elastico (49)÷(51); questo stato di tensione è detto *stato di coazione*. Si conclude che *deformazioni anelastiche agenti in sistemi cinematicamente impossibili/staticamente indeterminati producono effetti sia statici che cinematici*.

Le equazioni (49)÷(51) reggono il *problema di coazione elastica*. Nel seguito, si risolve il problema sia nello spirito del metodo degli spostamenti che delle forze.

- **Osservazione 29.** Il teorema di esistenza ed unicità della soluzione, dimostrato nel Par. 1.3 nel caso di sole forze attive, si applica anche al problema di coazione elastica. Le (49)÷(51), infatti, differiscono dalle (1)÷(3) solo per i termini noti, che

non sono influenti ai fini del teorema. Anzi, anche nell'ipotesi (b_2) (sistemi labili o degeneri), la condizione di solvibilità (7) è sempre soddisfatta, essendo $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$.

- **Osservazione 30.** Un particolare tipo di deformazione anelastica è costituito dai cosiddetti *difetti di montaggio*. Questi consistono in piccole imperfezioni geometriche degli organi rispetto a quelli di progetto (ad esempio, eccesso o difetto di lunghezza $\bar{\varepsilon}$ delle molle estensionali, oppure curvatura iniziale $\bar{\kappa}$ delle molle flessionali). Da un punto di vista meccanico, all'atto del montaggio della struttura è necessario applicare delle forze che deformino gli organi annullando i difetti, consentendo così l'assemblaggio. Conseguentemente si ingenera nel sistema uno stato di coazione che in generale interessa tutti gli organi, anche quelli privi di difetti. Problemi di questo tipo possono essere trattati considerando gli organi come *idealmente perfetti* ma assegnando ad essi *deformazioni anelastiche uguali ai difetti di montaggio*. Così, ad esempio, se una molla estensionale ha lunghezza superiore a quella di progetto ($\bar{\varepsilon} > 0$) si imporrà alla molla perfetta una deformazione anelastica di allungamento. L'Esercizio 15 illustrerà il procedimento.

- **Osservazione 31.** Se sul sistema agiscono anche forze attive, stante la linearità del problema, può procedersi per sovrapposizione di effetti. La soluzione è perciò somma delle soluzioni corrispondenti alle forze attive e alle deformazioni anelastiche.

4.2 Il metodo degli spostamenti

Combinando le (49) e (50) si ottengono le tensioni in termini di spostamenti

$$\sigma = \mathbf{CDu} - \mathbf{C}\bar{\varepsilon} \quad (52)$$

Sostituendole nelle equazioni di equilibrio (51) si ha:

$$\mathbf{Ku} = \bar{\mathbf{f}} \quad (53)$$

dove \mathbf{K} è la matrice di rigidezza (18) e

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{D}^T \mathbf{C}\bar{\varepsilon} \quad (54)$$

è il *vettore delle forze di coazione*. Le deformazioni imposte, dunque, ai fini dell'equilibrio, equivalgono a forze fittizie (o equivalenti) $\bar{\mathbf{f}}$ (che si sommano a quelle attive, se presenti). Determinata la configurazione equilibrata $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{f}}$, dalla (50) si ottiene lo stato di deformazione ε , e dalla (49) lo stato di tensione σ .

- **Osservazione 32.** Le (52)÷(54) possono essere interpretate con un ragionamento di tipo meccanico, che ha il pregio di attribuire un significato notevole alle forze $\bar{\mathbf{f}}$. Il procedimento si sviluppa nello spirito del metodo di sovrapposizione degli effetti, come illustrato in Fig. 8. Si pensi innanzitutto di introdurre nel sistema dei vincoli aggiuntivi (un incastro per ciascun corpo) che impediscono tutti gli spostamenti e di fare quindi agire le deformazioni anelastiche $\bar{\varepsilon}$ (fase I, corpi bloccati). Poiché i corpi non possono spostarsi, la deformazione totale degli organi deve essere nulla, devono cioè aversi deformazioni elastiche uguali e contrarie a quelle anelastiche; si ingenera quindi negli organi uno stato di tensione $\sigma^* = -\mathbf{C}\bar{\varepsilon}$. Per

assicurare l'equilibrio dei corpi, i vincoli aggiuntivi devono esercitare reazioni staticamente equivalenti a $\mathbf{f}^* = \mathbf{D}^T \sigma^* = -\mathbf{D}^T \mathbf{C}\bar{\varepsilon}$. Queste reazioni, comunque, devono essere rimosse, in quanto non presenti nel sistema originario. Si eliminano quindi i vincoli e si applicano al sistema delle forze attive $\bar{\mathbf{f}}$ uguali e contrarie alle reazioni \mathbf{f}^* : $\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{f}^* = \mathbf{D}^T \mathbf{C}\bar{\varepsilon}$. La condizione di equilibrio del sistema (senza vincoli) soggetto alle forze $\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{f}^*$ è data dall'equazione (53); essa permette di determinare il campo degli spostamenti \mathbf{u} (che infatti è nullo nella fase I). Lo stato di tensione è dato dalla somma degli effetti relativi alle due fasi: $\sigma_I = \sigma^* = -\mathbf{C}\bar{\varepsilon}$ nella fase I, e $\sigma_{II} = \mathbf{CDu}$ nella fase II; l'equazione (52) esprime appunto questa somma.

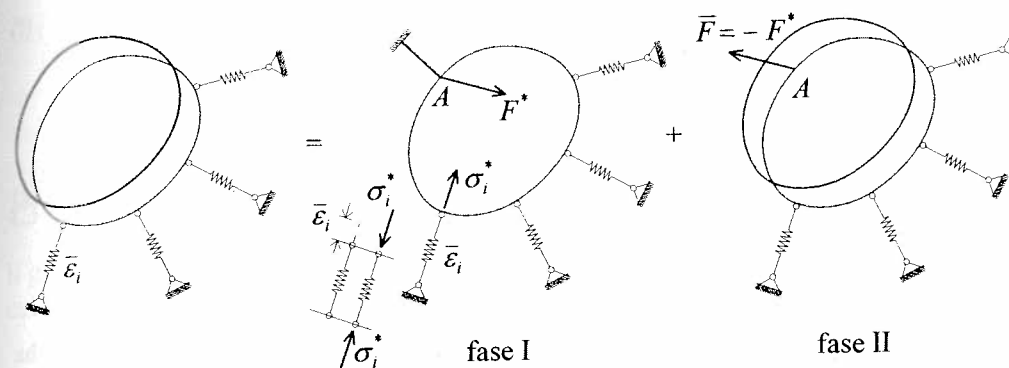
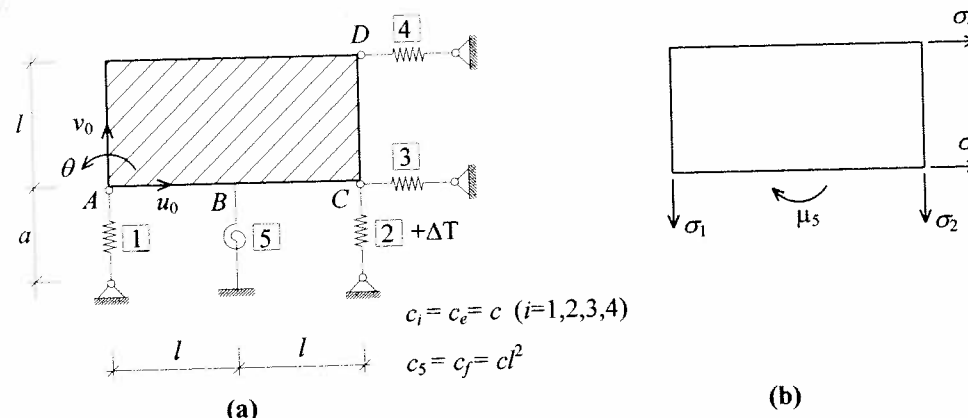


Fig. 8 Interpretazione meccanica delle equazioni (52)÷(54)

Esercizio 14: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si determini lo stato di coazione indotto da una variazione termica ΔT agente sulla molla 2.



Scelto $O \equiv A$, le equazioni di congruenza (50) si scrivono

$$\varepsilon_1 = v_0, \quad \varepsilon_2 = v_0 + 2l\theta, \quad \varepsilon_3 = -u_0, \quad \varepsilon_4 = -u_0 + l\theta, \quad \kappa_5 = \theta \quad (a)$$

Il legame costitutivo (49) è:

$$\sigma_1 = c\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = c(\varepsilon_2 - \alpha\Delta T), \quad \sigma_3 = c\varepsilon_3, \quad \sigma_4 = c\varepsilon_4, \quad \mu_5 = cl^2\kappa_5 \quad (b)$$

essendo $\bar{\varepsilon}_2 = \alpha\Delta T$, con α coefficiente di dilatazione termica della molla 2. Le equazioni di

equilibrio si scrivono (Fig. b):

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 0, \quad 2l\sigma_2 + l\sigma_4 + \mu_5 = 0 \quad (c)$$

Sostituendo le (a) nelle (b) si ha:

$$\sigma_1 = c v_0, \quad \sigma_2 = c(v_0 + 2l\theta - \alpha a \Delta T), \quad \sigma_3 = -c u_0, \quad \sigma_4 = c(-u_0 + l\theta), \quad \kappa_5 = c l^2 \theta \quad (d)$$

che, sostituite nelle (c) forniscono:

$$-2u_0 + \theta = 0, \quad 2v_0 + 2l\theta = \alpha a \Delta T, \quad -u_0 + 2v_0 + 6l\theta = 2\alpha a \Delta T \quad (e)$$

avendo diviso per c . Nelle (e), $c\alpha a \Delta T$ rappresenta la forza di coazione, applicata in C e diretta verso l'alto. Risolvendo:

$$u_0 = \frac{1}{7} \alpha a \Delta T, \quad v_0 = \frac{3}{14} \alpha a \Delta T, \quad \theta = \frac{2}{7} \frac{\alpha a \Delta T}{l} \quad (f)$$

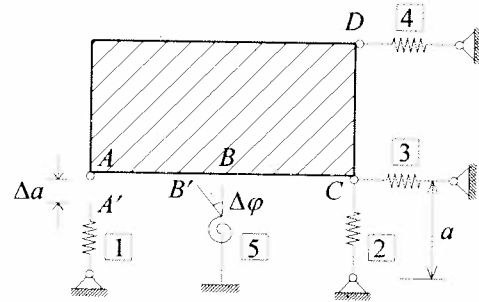
Le (a) e (b) corrispondentemente forniscono:

$$\varepsilon = \frac{\alpha a \Delta T}{7} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2l^{-1} \end{Bmatrix}^T$$

$$\sigma = \frac{c \alpha a \Delta T}{7} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2l \end{Bmatrix}^T \quad (g)$$

È facile interpretare la soluzione secondo il procedimento descritto nell'Osservazione 30.

Esercizio 15: Il sistema dell'Esercizio 14 è sede dei seguenti difetti di montaggio: la molla 1 ha lunghezza $a - \Delta a$ con $0 < \Delta a < a$; i bracci della molla 5 formano un angolo $\Delta \varphi < 1$ come in figura. Si determini lo stato di coazione indotto nel sistema dal montaggio forzato degli organi, ottenuto congiungendo A' ad A e B' a B .



Si considera il sistema privo di difetti (perfetto, o ideale) quale quello dell'Esercizio 14; si impone quindi che la molla 1 subisca una deformazione anelastica $\varepsilon_1 = -\Delta a < 0$ e la molla 5 una curvatura anelastica $\kappa_5 = \Delta \varphi > 0$ (si ricordi la convenzione adottata nell'Osservazione 5.3). Le equazioni di congruenza (a) e di equilibrio (b) restano invariate, mentre quelle di legame (c) si modificano come segue:

$$\sigma_1 = c(\varepsilon_1 + \Delta a), \quad \sigma_2 = c\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = c\varepsilon_3, \quad \sigma_4 = c\varepsilon_4, \quad \mu_5 = cl^2(\kappa_5 - \Delta \varphi)$$

(Si noti che i contributi alle tensioni $c\Delta a$ e $-cl^2\Delta \varphi$, nello spirito dell'Osservazione 32, corrispondono alle tensioni che bisogna applicare rispettivamente alle molle 1 e 5 per eliminare il difetto). Procedendo come nell'Esercizio 14 si trovano le seguenti equazioni di equilibrio in termini di spostamenti (divise per c):

$$-2u_0 + \theta = 0, \quad 2v_0 + 2l\theta = \Delta a, \quad -u_0 + 2v_0 + 4l\theta = -l\Delta \varphi$$

la cui soluzione è:

$$u_0 = \frac{1}{3}(\Delta a - l\Delta \varphi), \quad v_0 = \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2}\Delta a + 2l\Delta \varphi\right), \quad \theta = \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta a}{l} - \Delta \varphi\right)$$

Gli stati di deformazione e di tensione risultano essere:

$$\varepsilon_1 = -\frac{7}{6}\Delta a + \frac{2}{3}l\Delta \varphi, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{6}\Delta a - \frac{2}{3}l\Delta \varphi, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{3}(-\Delta a + l\Delta \varphi),$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{3}(\Delta a - l\Delta \varphi), \quad \kappa_5 = \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta a}{l} - \Delta \varphi\right)$$

$$\sigma_1 = c\left(-\frac{1}{6}\Delta a + \frac{2}{3}l\Delta \varphi\right), \quad \sigma_2 = c\left(\frac{1}{6}\Delta a - \frac{2}{3}l\Delta \varphi\right), \quad \sigma_3 = c\frac{1}{3}(-\Delta a + l\Delta \varphi),$$

$$\sigma_4 = c\frac{1}{3}(\Delta a - l\Delta \varphi), \quad \mu_5 = \frac{1}{3}cl(2\Delta a - 5l\Delta \varphi)$$

4.3 Il metodo delle forze

Il generico stato di tensione autoequilibrato, soluzione della (51), è dato dalla (28) in cui la soluzione particolare σ_0 è assente, in quanto il problema è omogeneo:

$$\sigma = S\chi \quad (55)$$

Invertendo il legame costitutivo (49) si ha

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + H\sigma \quad (56)$$

da cui, per la (55),

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + HS\chi \quad (57)$$

L'equazione di compatibilità cinematica $S^T \varepsilon = 0$, con la (57) si può esprimere in termini di incognite iperstatiche; si ottiene:

$$F\chi + \bar{\eta} = 0 \quad (58)$$

dove F è la matrice di flessibilità (31₁) ed

$$\bar{\eta} = S^T \bar{\varepsilon} \quad (59)$$

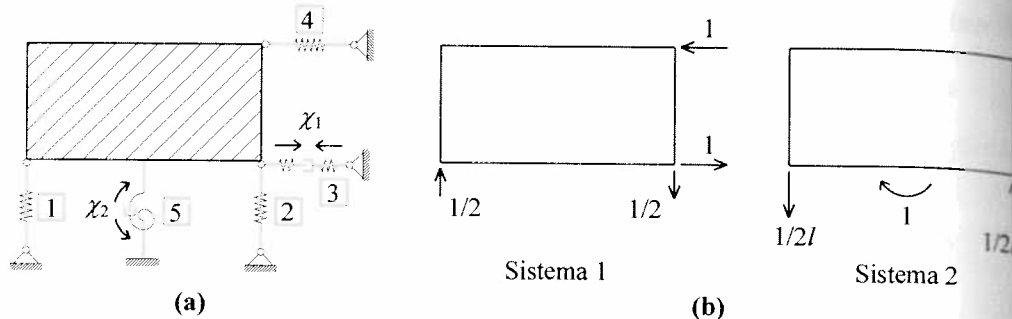
è il vettore degli spostamenti di coazione. Ricordando l'interpretazione geometrica del termine noto delle equazioni (30) data nel Par. 3.3 (cfr. Eq. 35), $\bar{\eta}$ rappresenta gli spostamenti che si verificano nelle sconnessioni del sistema principale dovuti alle deformazioni anelastiche.

• **Osservazione 33.** Procedendo come nell'Osservazione 17 si ha, in analogia alle (32):

$$\bar{\eta}_i = \sigma_i'^T \bar{\varepsilon} \quad (60)$$

Determinato lo stato congruente, $\chi = -F^{-1}\bar{\eta}$, le (55) e (57) forniscono rispettivamente le tensioni e deformazioni.

Esercizio 16: Si risolva il problema elastico dell'Esercizio 14 applicando il metodo delle forze.



Si procede come indicato nell'Osservazione 18. Si sceglie il sistema principale in Fig. (a), ottenuto disconnettendo le molle 3 e 5. Si pone $\chi_1 := \sigma_3$ e $\chi_2 := \mu_5$. Si determinano poi gli stati di tensione equilibrati con $\chi_1=1, \chi_2=0$ (sistema 1) e $\chi_1=0, \chi_2=1$ (sistema 2) (Fig. b); si ottiene:

$$\sigma'_1 = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1, 0 \right\}^T, \quad \sigma'_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right\}^T$$

Il più generico stato di autotensione $\sigma = \chi_1 \sigma'_1 + \chi_2 \sigma'_2$ è perciò:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_1), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi_2), \quad \sigma_3 = \chi_1, \quad \sigma_4 = -\chi_1, \quad \mu_5 = \chi_2$$

I coefficienti di flessibilità espressi dalle (32₁) si scrivono:

$$\eta_{11} = \sigma_1'^T \mathbf{H} \sigma_1' = \frac{5}{2c}, \quad \eta_{12} = \eta_{21} = \sigma_1'^T \mathbf{H} \sigma_2' = -\frac{1}{2cl}, \quad \eta_{22} = \sigma_2'^T \mathbf{H} \sigma_2' = \frac{3}{2cl^2}$$

Gli spostamenti si calcolano con la (60):

$$\bar{\eta}_1 = \sigma_1'^T \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \alpha \Delta T, \quad \bar{\eta}_2 = \sigma_2'^T \bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha \Delta T}{l}$$

Le equazioni (58) si scrivono:

$$\frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 5 & -l^{-1} \\ -l^{-1} & 3l^{-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} \frac{\alpha \Delta T}{2}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\chi_1 = -\frac{1}{7} c \alpha \Delta T, \quad \chi_2 = \frac{2}{7} c \alpha \Delta T l$$

Lo stato di tensione congruente è dunque:

$$\sigma = \frac{c \alpha \Delta T}{7} \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & 1 & 2l \end{Bmatrix}^T$$

e le deformazioni corrispondenti

$$\varepsilon = \frac{\alpha \Delta T}{7} \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -1 & 1 & 2l^{-1} \end{Bmatrix}^T$$

4.4 Le formulazioni integrali e variazionali

Il problema di coazione elastica (49)-(51) può anche essere formulato in termini integrali o variazionali, analogamente a quanto visto per le forze attive. Qui si dà un breve cenno sui procedimenti.

(a) Formulazioni integrali

L'ELV (21) (metodo degli spostamenti), essendo $\mathbf{f}=0$, si scrive

$$\delta \varepsilon^T \sigma = 0 \quad \forall (\delta \varepsilon, \delta \mathbf{u}) \mid \delta \varepsilon = \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \quad (61)$$

Facendo uso della (52) si ha:

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T (\mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{C} \bar{\varepsilon}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (62)$$

da cui segue la (53).

L'ELVC (42) (metodo delle forze) resta invariata:

$$\delta \sigma_\chi^T \varepsilon = 0 \quad \forall \delta \sigma_\chi \mid \mathbf{E} \delta \sigma_\chi = 0 \quad (63)$$

Facendo uso della (57), ed essendo $\delta \sigma_\chi = \mathbf{S} \delta \chi$ rispettoso dell'equilibrio, si ha:

$$\delta \chi^T \mathbf{S}^T (\mathbf{H} \mathbf{S} \chi + \bar{\varepsilon}) = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (64)$$

da cui segue la (58).

(b) Formulazioni variazionali

L'energia potenziale elastica (metodo degli spostamenti) è data dalla (5.63₁)

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^T \mathbf{C} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{C} \varepsilon - \varepsilon^T \mathbf{C} \bar{\varepsilon} + \text{cost} \end{aligned} \quad (65)$$

Poiché le forze attive sono nulle, l'EPT coincide con l'energia potenziale elastica, $U = \Phi$. Sostituendo la (50) si ha:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \bar{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (66)$$

avendo usato le posizioni (18) e (54). Imponendo che $\delta U = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$ si riottiene la (53).

L'energia complementare elastica (metodo delle forze) è data dalla (5.63₂)

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma + \sigma^T \bar{\varepsilon} \quad (67)$$

Sostituendo la (55) si ha:

$$\begin{aligned}\Psi(\chi) &= \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{S}^T \mathbf{H} \mathbf{S} \chi + \chi^T \mathbf{S}^T \bar{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \chi^T \mathbf{F} \chi + \chi^T \bar{\eta}\end{aligned}\quad (68)$$

avendo usato le posizioni (31₁) e (59). Imponendo che $\delta\Psi=0 \quad \forall \delta\chi$ si riottiene la (58).

Il problema elastico per i sistemi vincolati

1. Le grandezze lagrangiane

1.1 Premessa

Il problema elastico è stato sino ad ora formulato e risolto per i sistemi a deformabilità concentrata non vincolati. Spesso però nei sistemi sono presenti dei vincoli (interni e/o esterni) che assegnano spostamenti noti ed applicano reazioni vincolari incognite ai punti dei corpi cui sono collegati. Occorre pertanto modificare le equazioni del problema elastico per tenere conto dei vincoli. Qui viene preliminarmente discussa la problematica generale relativa ai problemi cinematico e statico; nei successivi paragrafi si procederà alla formulazione dei due problemi.

1.2 I parametri lagrangiani

Per un sistema a deformabilità concentrata, vincolato, può porsi il seguente problema cinematico: *assegnate le deformazioni degli organi ed i cedimenti dei vincoli, determinare la configurazione del sistema*. Detta d la molteplicità elastica, m la molteplicità dei vincoli ed n il numero dei g.d.l. dei corpi, il problema è determinato (o degenere) se $d+m=n$, indeterminato se $d+m<n$, e impossibile se $d+m>n$. Occorre dunque confrontare la somma delle molteplicità elastica e dei vincoli con il numero degli spostamenti generalizzati. Da questo punto di vista, come si è già detto nell'Osservazione 5.5, non c'è differenza tra deformazioni assegnate e cedimenti vincolari. Così ad esempio per il sistema in Fig. 1a si hanno $m=7$ vincoli, $d=3$ organi elastici semplici e $n=9$ spostamenti generalizzati; il problema è impossibile di grado 1.

Tuttavia, in vista della formulazione del problema elastico, è più conveniente distinguere le equazioni che esprimono la compatibilità tra organi e corpi (equazioni di

congruenza) dalle equazioni che esprimono la compatibilità tra corpi vincolati o tra corpi e suolo (equazioni di vincolo). Le prime sono assunte come equazioni governanti il problema (come accade per i sistemi non vincolati) mentre le seconde sono considerate come *relazioni di vincolo restrittive delle configurazioni compatibili* assumibili dal sistema. L'effetto dei vincoli è dunque quello di ridurre il numero delle variabili libere di configurazione, ovvero degli spostamenti generalizzati. Infatti, se il sistema possiede n spostamenti generalizzati e la molteplicità globale dei vincoli è pari ad $m < n$, le variabili libere di configurazione sono $l = n - m$, cioè sono in numero pari al *grado di labilità del sistema privato degli organi elastici* (che verrà detto in seguito *sistema rigido associato*). Esse assumono il significato di *parametri lagrangiani*, nel senso loro dato in Meccanica Analitica. Le equazioni di congruenza devono perciò mettere in relazione le d deformazioni degli organi elastici con gli l parametri lagrangiani. Il problema cinematico posto risulta essere determinato (o degenerare) se $d = l$, indeterminato se $d < l$, impossibile se $d > l$, in accordo con quanto prima trovato. Ad esempio, per il sistema in Fig. 1a, si hanno $n = 9$ spostamenti generalizzati che però devono soddisfare $m = 7$ relazioni di vincolo, per cui il numero dei parametri lagrangiani è $l = n - m = 2$, pari alla labilità del sistema quando si siano rimosse le tre molle. Occorrerà pertanto esprimere le tre deformazioni in funzione dei due parametri lagrangiani: il sistema è impossibile di grado 1.

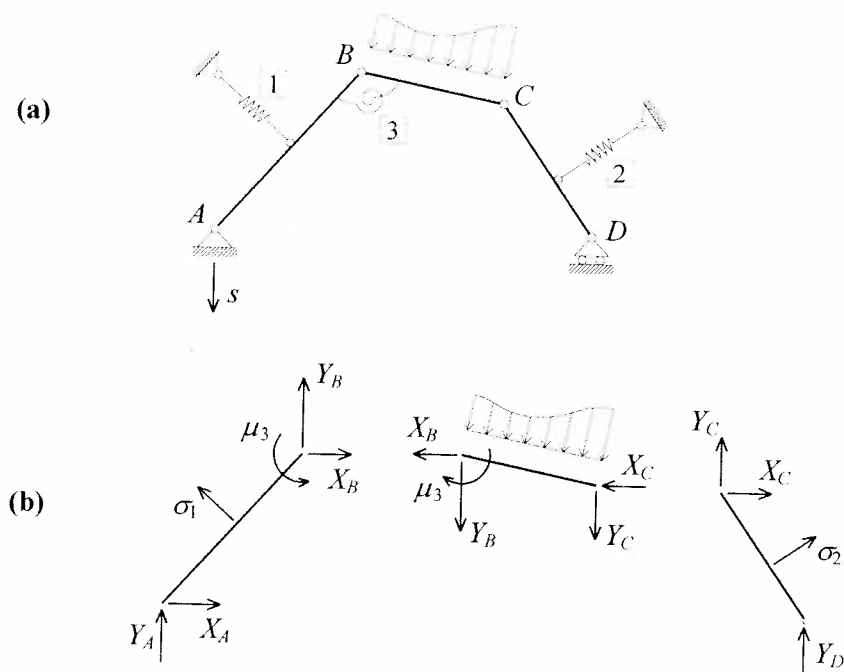


Fig. 1 Sistema ad elasticità concentrata, vincolato

- **Osservazione 1.** Nel caso in cui la molteplicità globale dei vincoli è maggiore del numero dei g.d.l., $m \geq n$, non restano al sistema rigido parametri liberi, cosicché,

assegnati i cedimenti vincolari, esiste al più un'unica configurazione con essi compatibile, che è però generalmente incompatibile con le deformazioni date. Più in generale, nell'ambito del problema elastico, casi di questo genere non hanno interesse perché deformazioni e tensioni non sono esprimibili in termini di spostamenti generalizzati. Il sistema si comporta perciò a tutti gli effetti come rigido, con tutti i limiti del modello discussi nel Par. 4.1.1. L'unico caso d'interesse è quello in cui $m < n$, che si verifica quando il *sistema rigido associato è labile*.

1.3 Le equazioni lagrangiane di equilibrio

Per il sistema in questione può porsi il seguente problema statico: *assegnate le forze attive determinare le tensioni negli organi deformabili e le reazioni dei vincoli*. Poiché le tensioni sono in numero pari alla molteplicità elastica d , le reazioni in numero pari alla molteplicità dei vincoli m , e le equazioni cardinali della statica sono n , il problema è determinato (o degenerare) se $d + m = n$, indeterminato se $d + m > n$, e impossibile se $d + m < n$. In accordo all'Osservazione 5.11, ai fini dell'equilibrio, non c'è differenza tra tensioni e reazioni vincolari. Ad esempio, per il sistema in Fig. 1b si hanno $d = 3$ tensioni, $m = 7$ reazioni vincolari e $n = 9$ equazioni di equilibrio; il problema è indeterminato (iperstatico) di grado 1. Tuttavia, in vista della formulazione del problema elastico, è più conveniente distinguere le incognite tensione dalle incognite reazioni vincolari. In particolare è opportuno riarrangiare le equazioni di equilibrio in modo tale da ottenere delle equazioni in cui compaiano solo le tensioni, come accade per i sistemi non vincolati. Infatti, mentre le tensioni sono associate alle deformazioni dal legame costitutivo, le reazioni vincolari sono indipendenti da qualunque grandezza cinematica, non essendo associate ad alcun legame costitutivo. L'operazione di eliminazione delle m reazioni vincolari (detta anche di *condensazione delle equazioni di equilibrio*) può essere compiuta, almeno in linea di principio, utilizzando m equazioni (ad esempio procedendo per sostituzione successive, oppure facendo opportune combinazioni lineari). Ci si riduce così a sole $l = n - m$ equazioni in d tensioni incognite; le l equazioni sono dette *equazioni lagrangiane di equilibrio*. Il problema statico posto risulta essere determinato (o degenerare) se $d = l$, indeterminato se $d > l$, impossibile se $d < l$, in accordo a quanto prima trovato. Ad esempio, per il sistema in Fig. 1b, si hanno $n = 9$ condizioni di equilibrio in $d + m = 10$ incognite; utilizzandone $m = 7$ per eliminare le sette reazioni vincolari restano $l = n - m = 2$ equazioni di equilibrio nelle $d = 3$ incognite di tensione: il sistema è indeterminato di grado 1.

- **Osservazione 2.** Nel caso $m \geq n$ (che si è già detto nell'Osservazione 1 essere privo di interesse) non è possibile formulare il problema dell'equilibrio in termini di sole tensioni in quanto non è possibile eliminare tutte le reazioni vincolari.
- **Osservazione 3.** Si notino le dimensioni dei due problemi: il problema cinematico è governato da d equazioni (di congruenza) in l incognite (parametri lagrangiani); il problema statico è governato da l equazioni (lagrangiane di equilibrio) in d incognite (tensioni).

2. Analisi della deformazione

2.1 Le equazioni di congruenza

Si consideri un sistema a deformabilità concentrata costituito da n_c corpi ed n_e organi elastici. Sia $n=6n_c$ (oppure $n=3n_c$) il numero dei g.d.l. dei corpi e d la molteplicità elastica globale degli organi (Fig. 2). Le equazioni di congruenza si scrivono (Eq. 6.1)

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1)$$

dove ε è il vettore $d \times 1$ delle deformazioni, \mathbf{u} è il vettore $n \times 1$ degli spostamenti generalizzati e \mathbf{D} è la matrice $d \times n$ di congruenza del sistema non vincolato.

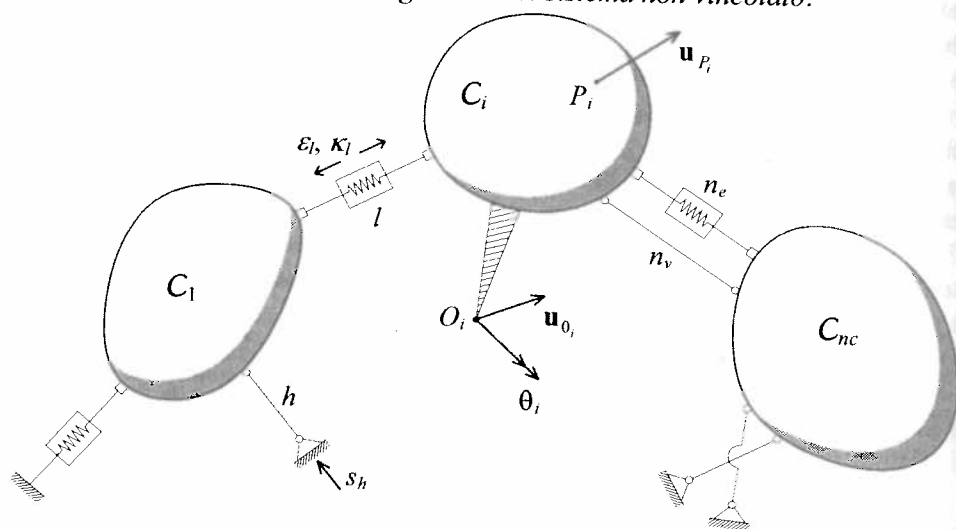


Fig. 2 Il problema cinematico per i sistemi a deformabilità concentrata vincolati

Nel sistema siano presenti n_v vincoli aventi molteplicità globale $m < n$. Le relative equazioni di vincolo si scrivono (Eq. 1.39)

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (2)$$

dove \mathbf{s} è il vettore $m \times 1$ dei cedimenti vincolari ed \mathbf{A} è la matrice $m \times n$ di congruenza del sistema rigido associato. Le equazioni (2), come si è detto precedentemente, possono essere considerate come relazioni di vincolo che restringono l'insieme delle configurazioni cinematicamente ammissibili del sistema. Esse stabiliscono m condizioni di legame tra gli n spostamenti generalizzati, cosicché solo $l=n-m$ di questi sono linearmente indipendenti. Per poterli esplicitare occorre risolvere le m equazioni di vincolo in funzione delle l variabili assunte quali parametri lagrangiani. Questa operazione può essere eseguita isolando in \mathbf{A} un minore non nullo \mathbf{A}_1 (assunto di ordine massimo m , sistema principale isocinematico, $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, cfr. Par. 1.3.3) e risolvendo le (2) rispetto alle incognite associate. Si ottiene (Eq. 1.42) la seguente espressione:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U}\mathbf{q} \quad (3)$$

dove $\mathbf{u}_s = \{\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{s}, \mathbf{0}\}^T$ è il campo degli spostamenti prodotto nel sistema principale dai

cedimenti vincolari; $\mathbf{U} = [-\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2, \mathbf{I}]^T$ è la matrice modale, di dimensioni $n \times l$; \mathbf{q} è il vettore dei parametri liberi, o lagrangiani, di dimensioni $l \times 1$.

• Osservazione 4. La (3) si scrive anche

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \sum_{i=1}^l q_i \mathbf{u}_i'$$

dove \mathbf{u}_i' , i -esima colonna di \mathbf{U} , rappresenta un modo cinematico del sistema rigido associato. L'espressione è in analogia con quella che descrive il più generale stato di tensione in un sistema iperstatico (cfr. Osservazione 5.13).

Sostituendo la (3) nelle (1) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} = \varepsilon - \varepsilon_s \quad (4)$$

dove

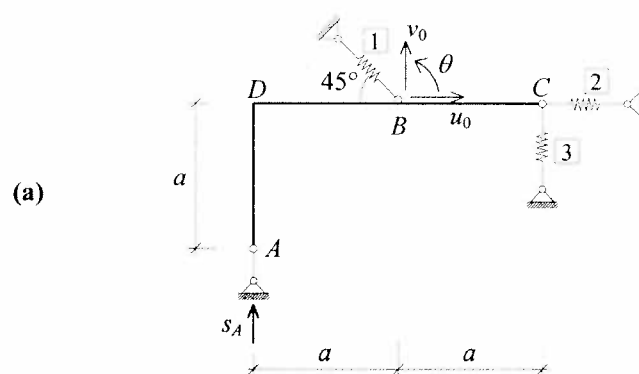
$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{U} \quad (5)$$

ed

$$\varepsilon_s = \mathbf{D}\mathbf{u}_s \quad (6)$$

Le (4) costituiscono le equazioni di congruenza del sistema vincolato; esse esprimono la deformazione ε come somma di due contributi: uno, ε_s , dovuto ai cedimenti vincolari, l'altro, $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q}$, funzione della configurazione. La matrice $\hat{\mathbf{D}}$, di dimensioni $d \times l$, è la matrice di congruenza del sistema vincolato; il vettore ε_s , di dimensioni $d \times 1$, rappresenta la deformazione che si verifica negli organi elastici quando nel sistema principale hanno luogo i cedimenti vincolari. Risolto (se possibile) il problema cinematico, e determinati i parametri lagrangiani, la (3) fornisce il campo degli spostamenti.

Esercizio 1: Si scrivano le equazioni di congruenza per il sistema vincolato in Fig. (a).



Si ha $n=3$, $m=1$, $d=3$. Il sistema è cinematicamente impossibile. Assunto $O \equiv B$, le equazioni di congruenza (1) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

L'equazione di vincolo relativa alla biella in A è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = s_A \quad (b)$$

Si assumono quali parametri lagrangiani $q_1 := u_0$, $q_2 := \theta$ e si risolve la (b) rispetto a v_0 :

$$v_0 = s_A + q_2 a \quad (c)$$

Si ottiene quindi, nella forma (3):

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s_A \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Gli spostamenti descritti dal vettore \mathbf{u}_s e dalle colonne della matrice \mathbf{U} (modi cinematici) sono illustrati nelle Fig. (b₁÷b₃). I due modi (Fig. b₂, b₃) rappresentano una traslazione orizzontale ed una rotazione intorno a D , entrambe di ampiezza unitaria. La generica configurazione compatibile è una combinazione lineare dei tre campi di spostamento illustrati in Fig. (b), con i due modi amplificati dai valori arbitrari q_1 e q_2 .

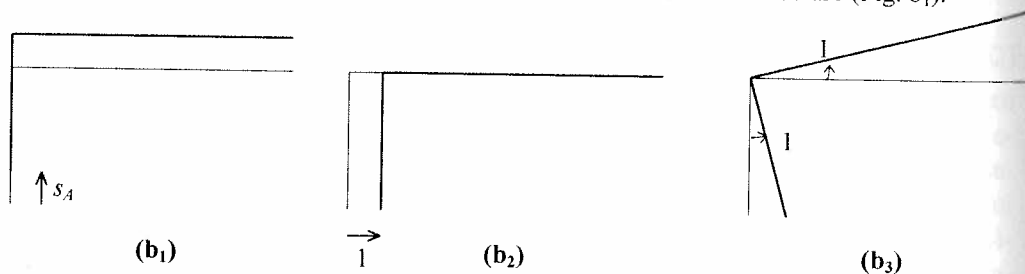
La matrice $\hat{\mathbf{D}}$ e il vettore ε_s si ottengono eseguendo i prodotti (5) e (6):

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -a\sqrt{2}/2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \quad \varepsilon_s = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} s_A \quad (e)$$

per cui le equazioni di congruenza (4) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -a\sqrt{2}/2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -s_A\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ s_A \end{Bmatrix} \quad (f)$$

Le colonne di $\hat{\mathbf{D}}$ rappresentano le deformazioni nelle molle associate ai due modi in Fig. (b_{2,3}) e il termine noto rappresenta le deformazioni associate al cedimento vincolare (Fig. b₁).



- **Osservazione 5.** Qualora si vogliano impiegare i metodi della cinematica grafica, ricordando il procedimento impiegato nella soluzione dell'Esercizio 1.12, e tenendo conto dei commenti dell'Esercizio 1, occorre procedere come segue.

I. Si sceglie un sistema principale isocinematico, ottenuto introducendo nel sistema rigido associato l vincoli aggiuntivi; si scelgono "i cedimenti" dei vincoli aggiuntivi quali parametri lagrangiani.

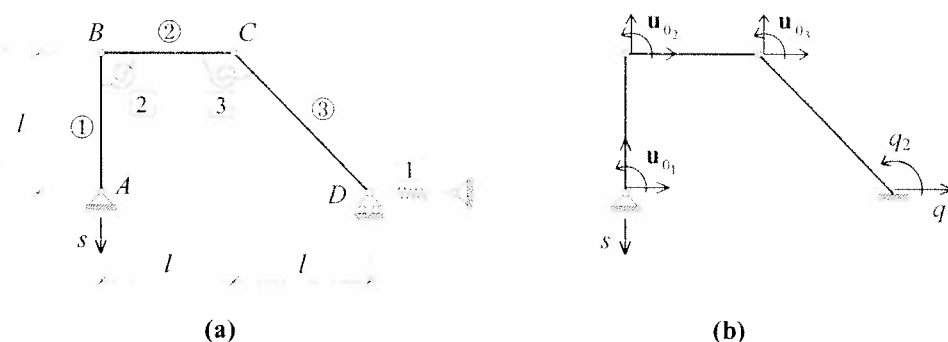
II. Si studiano $l+1$ cinematismi rigidi del sistema principale, conseguenti a:

- cinematismo 0: cedimenti vincolari assegnati (eventualmente sovrapponendo più effetti);
- cinematismo i : cedimento vincolare unitario associato al vincolo aggiuntivo i ($i=1,2,\dots,l$), con tutti gli altri vincoli aggiuntivi non cedevoli.

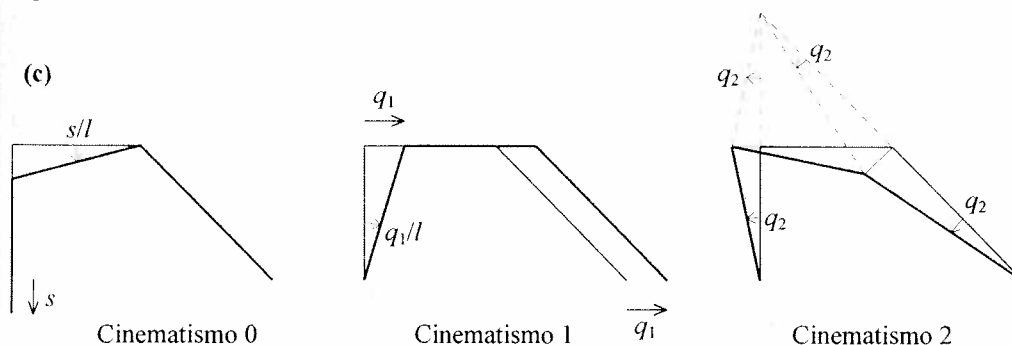
III. Per ciascuno degli $l+1$ cinematismi rigidi si calcolano le deformazioni degli organi e si sovrappongono gli effetti.

L'esercizio che segue esemplifica il procedimento.

Esercizio 2: (a) Si ottengano le equazioni di congruenza per il sistema in Fig. (a), applicando il metodo descritto nell'Osservazione 5. (b) Si determini la matrice modale.



(a) Si ha $n=9$, $m=7$, $d=3$. Il sistema è cinematicamente impossibile. Il sistema rigido associato ha grado di libertà $l=2$. Si introducono (passo I) $l=2$ vincoli aggiuntivi in D , trasformando il carrello in un incastro, e si rende il sistema isocinematico (Fig. b); si assumono quali parametri lagrangiani i cedimenti q_1 e q_2 dei vincoli aggiuntivi. Si studia la cinematica del sistema in Fig. (b) sovrapponendo gli effetti (passo II); si ottengono i campi di spostamento illustrati in Fig. (c).



Le equazioni di congruenza si scrivono:

$$\varepsilon_1 = -u_D, \quad \kappa_2 = \theta_2 - \theta_1, \quad \kappa_3 = \theta_3 - \theta_2 \quad (a)$$

Nel cinematismo 0 si ha:

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \kappa_2 = \frac{s}{l}, \quad \kappa_3 = -\frac{s}{l} \quad (b)$$

Nel cinematismo 1 si ha:

$$\varepsilon_1 = -q_1, \quad \kappa_2 = \frac{q_1}{l}, \quad \kappa_3 = 0 \quad (c)$$

Nel cinematismo 2 si ha:

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \kappa_2 = -2q_2, \quad \kappa_3 = 2q_2 \quad (d)$$

Sovrapponendo gli effetti (passo III):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s/l \\ -s/l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 1/l & -2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Le precedenti costituiscono le equazioni di congruenza del sistema.

(b) Per scrivere la matrice modale occorre scegliere gli spostamenti generalizzati dei singoli corpi; si sceglie $O_1 \equiv A$, $O_2 \equiv B$, $O_3 \equiv C$ (Fig. b). Le colonne di U elencano i valori assunti dai nove spostamenti generalizzati nei due modi di Fig. (c_{2,3}), con $q_1=1$ e $q_2=1$; si ha:

$$U^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/l & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l & 0 & -1 & -l & -l & 1 \end{bmatrix} \quad (f)$$

2.2 Sistemi cinematicamente impossibili: le equazioni di compatibilità cinematica

Se $d > l$ il sistema è cinematicamente impossibile di grado $r = d - l$. Perché il problema cinematico (4) ammetta soluzione, il vettore dei termini noti, $\varepsilon - \varepsilon_s$, deve soddisfare l'equazione di compatibilità cinematica (si veda l'Appendice A.2):

$$\hat{Q}(\varepsilon - \varepsilon_s) = 0 \quad (7)$$

dove

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} -\hat{D}_2 \hat{D}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (8)$$

è la *matrice di compatibilità cinematica del sistema vincolato*, di dimensioni $r \times d$, e \hat{D}_1 e \hat{D}_2 sono partizioni di \hat{D} , con $\det \hat{D}_1 \neq 0$.

- **Osservazione 6.** La (7) è analoga alla (5.9), valida per i sistemi non vincolati, salvo sostituire \hat{D} a D e, conseguentemente, \hat{Q} a Q . L'aspetto nuovo è rappresentato dall'effetto dei cedimenti vincolari. La (7) esprime il fatto che la condizione di solvibilità coinvolge le deformazioni totali ε depurate degli effetti ε_s dei cedimenti; queste ultime sono infatti sempre compatibili, perché legate a cedimenti del sistema principale isocinematico.

Esercizio 3: Scrivere l'equazione di compatibilità cinematica per il sistema dell'Esercizio 1. Risolvendo le ultime due equazioni (f) si ha:

$$q_1 = -\varepsilon_2, \quad q_2 = \frac{1}{2a}(\varepsilon_3 - s_A)$$

che sostituite nella prima forniscono l'equazione cercata:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \varepsilon_3 + \frac{s_A}{2} \right) = \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} s_A$$

Nella forma (7) si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 + s_A \sqrt{2}/2 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 - s_A \end{Bmatrix} = 0$$

Si determina così la matrice \hat{Q} (si noti che le colonne sono scambiate rispetto alle (8), in quanto non si sono riordinate le equazioni (f)).

2.3 Sistemi cinematicamente indeterminati: i modi rigidi

Se $d < l$ il sistema è cinematicamente indeterminato (cioè gli organi elastici sono in numero insufficiente a rimuovere la labilità del sistema rigido associato). Il problema cinematico (4) ammette ∞^{l-d} soluzioni del tipo 5.12 (si veda anche l'Appendice A.1):

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \hat{U}\rho \quad (9)$$

dove:

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} \hat{D}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_s), \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} -\hat{D}_1^{-1} \hat{D}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (10)$$

con $\rho \in \mathcal{R}^{l-d}$ arbitrario. Le colonne di \hat{U} sono i modi rigidi del sistema; $\mathbf{q}_\rho := \hat{U}\rho$ è il più generico spostamento rigido.

3. Analisi della tensione

3.1 Le equazioni di equilibrio

Per lo stesso sistema di Fig. 2 si pone il problema dell'equilibrio. Si considerino forze attive staticamente equivalenti al vettore $n \times 1$ delle forze attive generalizzate \mathbf{f} , ridotte ai poli O_i (Fig. 3). Esse sono equilibrate dalle reazioni vincolari R_h e dalle tensioni σ_i . Detto \mathbf{f} , il vettore $n \times 1$ delle forze generalizzate staticamente equivalenti alle reazioni vincolari, e detto \mathbf{f}_e il vettore $n \times 1$ delle forze generalizzate staticamente equivalenti alle forze elastiche, tutte ridotte agli stessi poli O_i , per l'equilibrio deve essere:

$$\mathbf{f}_v + \mathbf{f}_e + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Ricordando che, dalla statica dei sistemi rigidi, è (Osservazione 2.18)

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{B}\mathbf{r} \quad (12)$$

e che, dalla statica dei sistemi a deformabilità concentrata, è (Eq. 5.19)

$$\mathbf{f}_e = -\mathbf{E}\sigma \quad (13)$$

le equazioni di equilibrio (9) si scrivono:

$$\mathbf{B}\mathbf{r} - \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (14)$$

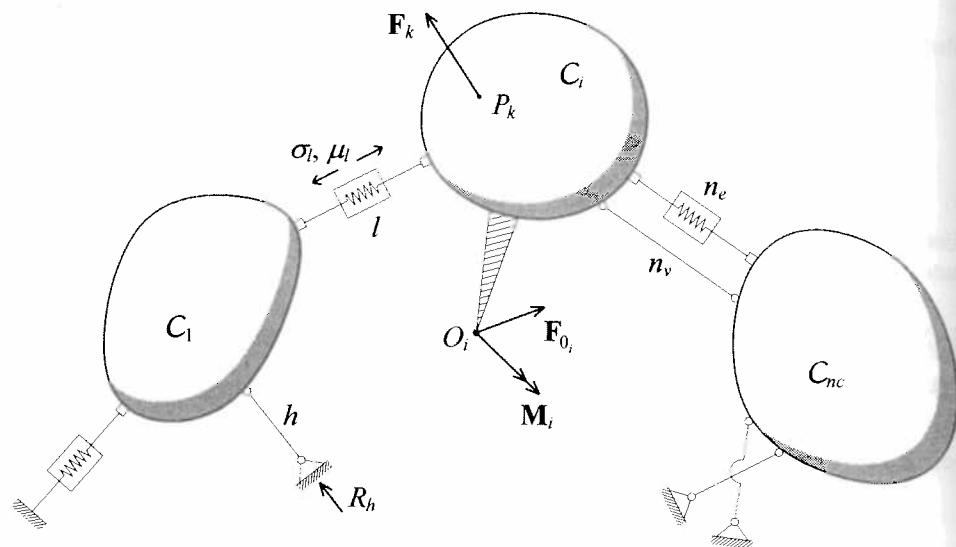


Fig. 3 Il problema statico per i sistemi a deformabilità concentrata vincolati

Esse costituiscono un sistema di n equazioni in $m+d$ incognite. Volendo ottenere, come si è detto nel Par. 1.3, un sistema di equazioni nelle sole incognite di tensione, è necessario condensare le Eq. (14), utilizzando m di esse per eliminare le m reazioni vincolari. Questa operazione, concettualmente semplice, è in pratica piuttosto onerosa, cosicché risulta conveniente seguire un altro metodo, che conduce allo stesso risultato. Si riscrivono le (14) nella forma

$$-\mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

considerando cioè le tensioni come “termini noti”, alla stregua delle forze attive \mathbf{f} . Le (15) hanno un significato meccanico notevole: esse rappresentano le equazioni di equilibrio del sistema rigido associato (privato cioè degli organi elastici) sottoposto all'azione di forze esterne, in parte attive e in parte trasmesse dagli organi deformabili. Ma il sistema rigido è per ipotesi labile, cosicché l'equilibrio può sussistere solo se le forze esterne soddisfano le condizioni di compatibilità statica (o condizioni di solvibilità, cfr. Eq. 2.34):

$$\mathbf{V}(\mathbf{f} - \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (16)$$

dove $\mathbf{V} = [-\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1^{-1} \quad \mathbf{I}] = \mathbf{U}^T$ ha dimensioni $l \times n$. La (16) si scrive anche:

$$\hat{\mathbf{E}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \quad (17)$$

avendo posto

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{U}^T \mathbf{E} \quad (18)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}^T \mathbf{f} \quad (19)$$

Le (17) costituiscono le equazioni di equilibrio condensate del sistema vincolato, in cui le reazioni \mathbf{r} sono state eliminate. $\hat{\mathbf{E}}$ è la matrice $l \times d$ di equilibrio del sistema vincolato e \mathbf{p} è il vettore $l \times 1$ delle forze lagrangiane, nel senso loro dato nella Meccanica Analitica. Infatti la i -esima componente di \mathbf{p} rappresenta il lavoro virtuale compiuto dalle forze attive \mathbf{f} nell' i -esimo modo del sistema rigido associato, conseguente cioè a $q_i=1$ e $q_j=0$ per $j \neq i$.

• **Osservazione 7.** Poiché $\mathbf{U}^T(\mathbf{f} - \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$, è anche $\mathbf{U}^T \mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{0}$, cosicché le (17) possono essere ottenute premoltiplicando tutti i termini della (14) per la matrice \mathbf{U}^T , in quanto il contributo delle reazioni vincolari è nullo. L'operazione di premoltiplicazione fornisce quindi direttamente una delle infinite combinazioni lineari sufficienti ad eliminare \mathbf{r} .

• **Osservazione 8.** L'espressione $\mathbf{U}^T \mathbf{B}\mathbf{r} = \mathbf{0}$ può anche scriversi $\mathbf{U}^T \mathbf{f}_v = \mathbf{0}$, che mette maggiormente in evidenza il suo profondo significato meccanico. Essa stabilisce che il lavoro virtuale compiuto dalle reazioni vincolari nei modi cinematici del sistema rigido associato è uguale a zero. Questi modi, infatti, rappresentano campi di spostamento compatibili con cedimenti vincolari nulli. La condizione esprime dunque in altra forma il postulato dei vincoli introdotto nel Cap. 2 (Osservazione 2.15).

• **Osservazione 9.** La costruzione diretta della matrice \mathbf{V} richiede l'imposizione delle condizioni di solvibilità di un problema impossibile (si veda l'Appendice A.2). Quando si operi in via analitica, l'onere computazionale è identico a quello necessario alla costruzione della matrice \mathbf{U} , che richiede la soluzione di un problema indeterminato. Tuttavia, nei casi in cui è agevole far uso della cinematica grafica, la costruzione di \mathbf{U} è molto più conveniente.

Risolto, se possibile, il sistema statico e determinate quindi le tensioni, le (15) forniscono, se di interesse, le reazioni vincolari \mathbf{r} . Le equazioni sono infatti certamente risolvibili, in quanto $\boldsymbol{\sigma}$ è stata determinata proprio dalla relativa condizione di solvibilità. Partizionando le (15) si ha:

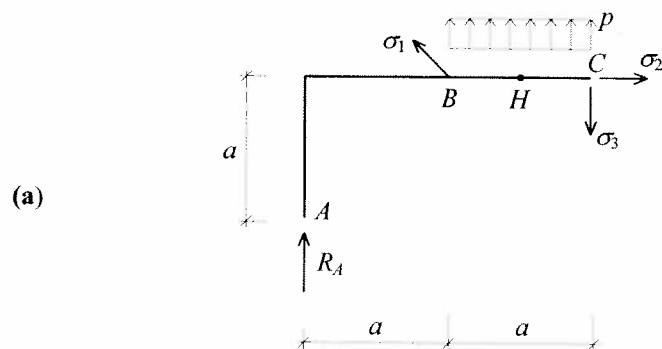
$$\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad \det \mathbf{B}_1 \neq 0 \quad (20)$$

da cui, ignorando la parte inferiore del sistema, si ottiene:

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{E}_1 \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}_1) \quad (21)$$

Esercizio 4: Scrivere le equazioni di equilibrio per il sistema dell'Esercizio 1, sottoposto ad un carico verticale ripartito sul tratto BC .

Le tensioni trasmesse dagli organi deformabili al corpo, la reazione del vincolo ed il carico sono indicati in Fig. (a).



Scelto $O \equiv B$ come polo di riduzione delle forze, le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$R_A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ pa \\ pa^2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Il sistema è staticamente indeterminato ($r=1$). Nel caso in esame è facile eliminare R_A operando per sostituzioni successive. Dalla seconda si ha:

$$R_A = -pa - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 + \sigma_3 \quad (b)$$

che sostituita nelle altre due fornisce

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ a\sqrt{2}/2 & 0 & -2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 3pa^2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

Le (c) sono le equazioni di equilibrio condensate. Alternativamente, poiché dall'Esercizio 1 è:

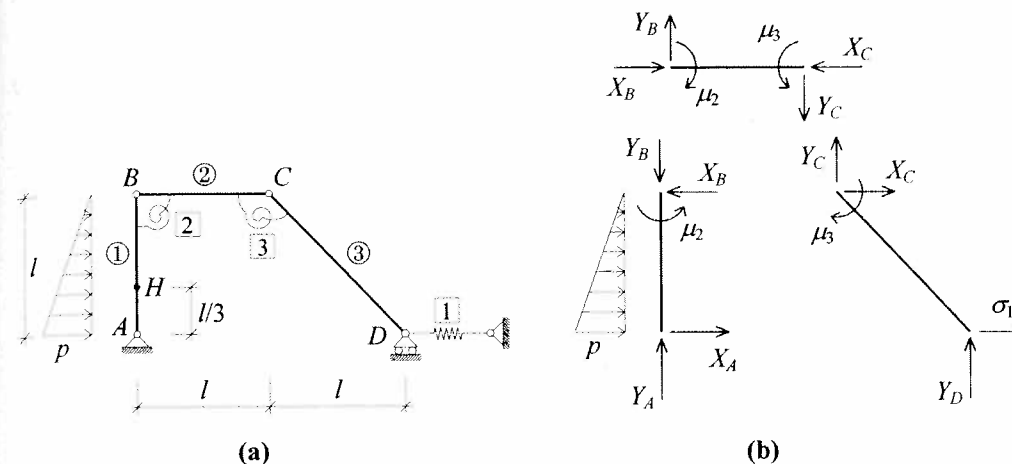
$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

premultiplicando le (a) per la matrice \mathbf{V} (cfr. Osservazione 7) si ottiene:

$$R_A \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1 & 0 \\ a\sqrt{2}/2 & 0 & -2a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 3pa^2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

cioè le (c).

Esercizio 5: Scrivere le equazioni lagrangiane di equilibrio dell'Esercizio 2, sottoposto ad un sistema di forze come in Fig. (a).



Le equazioni cardinali di equilibrio sono $n=9$. Esse coinvolgono le $d=3$ tensioni $\sigma = \{\sigma_1, \mu_2, \mu_3\}^T$ e le $m=7$ reazioni vincolari $\mathbf{r} = \{X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, Y_D\}^T$. Scelti i poli $O_1 \equiv A, O_2 \equiv B, O_3 \equiv C$ esse si scrivono:

$$\begin{aligned} X_A - X_B + pl/2 &= 0, & Y_A - Y_B &= 0, & X_B l + \mu_2 - pl^2/6 &= 0 \\ X_B - X_C &= 0, & Y_B - Y_C &= 0, & -Y_C l - \mu_2 + \mu_3 &= 0 \\ \sigma_1 + X_C &= 0, & Y_D + Y_C &= 0, & \sigma_1 l + Y_D l - \mu_3 &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

ovvero, nella forma (14):

$$\begin{bmatrix} -1 & . & 1 & . & . & . & . \\ . & -1 & . & 1 & . & . & . \\ . & . & -l & . & . & . & . \\ . & . & -1 & . & 1 & . & . \\ . & . & . & -1 & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & l & . \\ . & . & . & . & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \\ Y_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & -1 & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & 1 & -1 \\ -1 & . & . \\ . & . & . \\ -l & . & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/2 \\ 0 \\ -pl^2/6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

La matrice modale \mathbf{U} è già stata calcolata nell'Esercizio 2. Premoltiplicando le precedenti per \mathbf{U}^T , tenendo conto che $\mathbf{U}^T \mathbf{B} \mathbf{r} = \mathbf{0}$, si ha:

$$\begin{bmatrix} -1 & l/l & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pl/6 \\ -pl^2/6 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

che costituiscono le equazioni lagrangiane di equilibrio.

3.2 Sistemi staticamente indeterminati: stati di autotenso-reazione

Se $d > l$ il sistema è staticamente indeterminato di grado $r = d - l$. Il problema statico (17) ammette infinite soluzioni equilibrate del tipo (si veda l'Appendice A.1)

$$\sigma = \sigma_0 + \hat{S}\chi \quad (22)$$

dove σ_0 è una soluzione particolare del problema non omogeneo,

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{E}}_1^{-1}\hat{\mathbf{E}}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

è la *matrice delle autotensioni del problema vincolato*, di dimensioni $d \times r$, e χ è il vettore delle incognite iperstatiche, di dimensioni $r \times 1$. Nella (23), $\hat{\mathbf{E}}_1$ ed $\hat{\mathbf{E}}_2$ sono partizioni di $\hat{\mathbf{E}}$, con $\det \hat{\mathbf{E}}_1 \neq 0$. La (22) è analoga alla (5.22), con $\hat{\mathbf{S}}$ in luogo di \mathbf{S} . Note le tensioni, dalle (21) si calcolano le reazioni vincolari. Si ha:

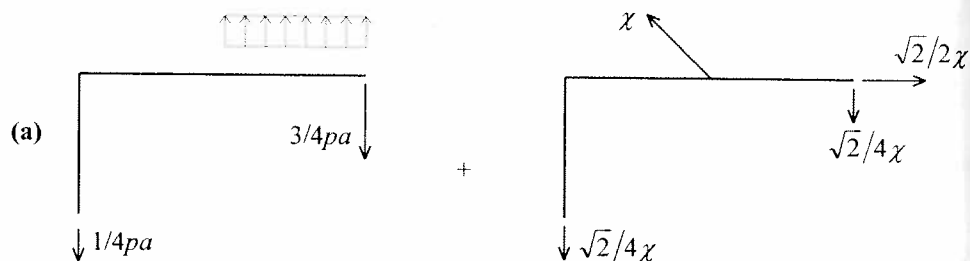
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{R}}\chi \quad (24)$$

in cui

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{E}_1\sigma_0 - \mathbf{f}_1), \quad \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{E}_1\hat{\mathbf{S}} \quad (25)$$

Le (24) esprimono le reazioni vincolari come somma di uno stato particolare \mathbf{r}_0 equilibrato con le tensioni σ_0 e con le forze attive \mathbf{f} , ed uno stato di reazione, $\mathbf{r}_\chi := \hat{\mathbf{R}}\chi$, equilibrato con quello di tensione $\sigma_\chi := \hat{\mathbf{S}}\chi$. Tensioni σ_χ e reazioni \mathbf{r}_χ costituiscono uno stato equilibrato di *tenso-reazione*, o stato di autotenso-reazione.

Esercizio 6: Determinare tensioni e reazioni equilibrate nel sistema dell'Esercizio 4. Illustrare lo stato di tenso-reazione.



Si risolvono le equazioni di equilibrio (c) assumendo $\chi_1 := \sigma_1$ come incognita iperstatica. Si ottiene:

$$\sigma_1 = \chi, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\chi, \quad \sigma_3 = \frac{3}{4}pa + \frac{\sqrt{2}}{4}\chi$$

ovvero, nella forma (22):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3pa/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4 \end{bmatrix} \chi$$

che individua σ_0 ed $\hat{\mathbf{S}}$ (si noti che le righe sono scambiate rispetto alle Eq. 23). Per determinare

la reazione vincolare R_A si può risolvere indifferentemente una delle (a₂), (a₃) oppure (b). Si ottiene:

$$R_A = -\frac{1}{4}pa - \frac{\sqrt{2}}{4}\chi$$

del tipo (24). Lo stato di tenso-reazione è rappresentato in Fig. (a) come sovrapposizione di uno stato particolare ($\chi_1 := \sigma_1 = 0$) e del più generale stato autoequilibrato.

3.3 Sistemi staticamente impossibili: le equazioni di compatibilità statica

Se $d < l$ il sistema è staticamente impossibile (cioè le tensioni applicate dagli organi elastici sono in numero insufficiente a garantire l'equilibrio del sistema rigido associato labile). Affinché il problema statico (17) ammetta egualmente soluzione, le forze devono soddisfare le equazioni di compatibilità statica, del tipo 5.26 (si veda anche l'Appendice A.2):

$$\hat{\mathbf{V}}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (26)$$

con:

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{E}}_2\hat{\mathbf{E}}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (27)$$

4. Dualità e teorema dei lavori virtuali

4.1 Le proprietà di dualità

Tra le matrici $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ dei sistemi vincolati valgono proprietà analoghe a quelle discusse nel Par. 5.4.1 a proposito dei sistemi non vincolati. In particolare è (prima proprietà di dualità):

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{D}}^T \quad (28)$$

in quanto, per le definizioni (5) e (18) è

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{U}^T \mathbf{E} = \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T = (\mathbf{D}\mathbf{U})^T = \hat{\mathbf{D}}^T \quad (29)$$

dal momento che $\mathbf{E} = \mathbf{D}^T$. Si confrontino le matrici degli esercizi 1 e 2 con quelle degli esercizi 4 e 5.

- **Osservazione 10.** La proprietà (28) non è assicurata quando si operi sulle equazioni di equilibrio mediante trasformazioni successive. Le equazioni cui si perviene sono generalmente combinazioni lineari di quelle che soddisfano la dualità.

La seconda proprietà di dualità si scrive

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{S}}^T \quad (30)$$

ed è conseguenza delle definizioni (8) e (23) e della proprietà (28). Si confrontino le matrici degli esercizi 3 e 6, facendo attenzione alle modalità con cui sono state ottenute.

Analogamente si verifica la terza proprietà di dualità,

$$\hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{U}}^T \quad (31)$$

come conseguenza delle definizioni (10) e (27) e della proprietà (28).
Le relazioni precedenti sono sintetizzate nel quadro che segue (cfr. Par. 3.1.4 e 5.4.1).

	Cinematica $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} = \varepsilon - \varepsilon_s$	Statica $\hat{\mathbf{D}}^T \sigma = \mathbf{p}$
Sistemi indeterminati	$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \hat{\mathbf{U}} \rho$	$\sigma = \sigma_0 + \hat{\mathbf{S}} \chi$
Sistemi impossibili	$\hat{\mathbf{S}}^T (\varepsilon - \varepsilon_s) = \mathbf{0}$	$\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{p} = \mathbf{0}$

4.2 Il teorema dei lavori virtuali nella forma estesa

Sia dato un sistema $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varepsilon)$, rispettivamente di spostamenti, cedimenti e deformazioni. Il sistema sia congruente, cioè le equazioni (1) e (2) siano soddisfatte; esse si scrivono nella forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (32)$$

Sia poi dato un sistema $(\mathbf{f}, \mathbf{r}, \sigma)$, rispettivamente di forze attive, reazioni vincolari e tensioni. Il sistema sia equilibrato, cioè le equazioni (14) siano soddisfatte; esse si riscrivono nella forma:

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{E}] \begin{bmatrix} -\mathbf{r} \\ \sigma \end{bmatrix} = \{\mathbf{f}\} \quad (33)$$

Poiché i due problemi (32) e (33) sono aggiunti (in quanto $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$ ed $\mathbf{E}=\mathbf{D}^T$, cfr. Appendice A.4) sussiste la seguente identità bilineare:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}^T & \sigma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (34)$$

ovvero:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u} + \mathbf{r}^T \mathbf{s} = \sigma^T \varepsilon \quad (35)$$

La (35) costituisce l'equazione dei lavori virtuali dei sistemi vincolati nella forma estesa. Essa può anche leggersi come

$$L_e = L_a + L_v = L_i \quad (36)$$

dove L_e è il lavoro virtuale delle forze esterne, somma di due contributi: il lavoro virtuale attivo $L_a = \mathbf{f}^T \mathbf{u}$ e il lavoro virtuale vincolare $L_v = \mathbf{r}^T \mathbf{s}$. Il lavoro virtuale esterno L_e uguaglia il lavoro virtuale interno $L_i = \sigma^T \varepsilon$. La (36) contiene come casi particolari l'ELV per i sistemi rigidi, $L_a + L_v = 0$, e l'ELV per i sistemi elastici non vincolati, $L_a = L_i$ (si ricordi anche l'Osservazione 5.16).

Del TLV sussistono i seguenti due corollari, analoghi a quelli visti nel Par. 5.4.3.

Primo corollario (degli spostamenti, cedimenti e deformazioni virtuali): Nell'ipotesi che valga l'ELV per ogni $(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{s}, \delta \varepsilon)$ congruenti, che sia cioè

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^T \delta \mathbf{s} = \sigma^T \delta \varepsilon \quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{s}, \delta \varepsilon) | \mathbf{A} \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{s}, \mathbf{D} \delta \mathbf{u} = \delta \varepsilon \quad (37)$$

il sistema $(\mathbf{f}, \mathbf{r}, \sigma)$ è equilibrato. Infatti, sostituendo a $\delta \mathbf{s}$ e $\delta \varepsilon$ le loro espressioni e tenuto conto che $\mathbf{D}=\mathbf{E}^T$, $\mathbf{A}=\mathbf{B}^T$, si ha:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{B} \mathbf{r} - \mathbf{E} \sigma)^T \delta \mathbf{u} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (38)$$

per cui valgono le (14), cioè il sistema è equilibrato.

Secondo corollario (delle forze, reazioni e tensioni virtuali): Nell'ipotesi che valga l'ELV per ogni $(\delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{r}, \delta \sigma)$ equilibrati, che sia cioè

$$\delta \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \delta \mathbf{r}^T \mathbf{s} = \delta \sigma^T \varepsilon \quad \forall (\delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{r}, \delta \sigma) | \delta \mathbf{f} = \mathbf{E} \delta \sigma - \mathbf{B} \delta \mathbf{r} \quad (39)$$

il sistema $(\mathbf{u}, \mathbf{s}, \varepsilon)$ è congruente. Infatti, sostituendo a $\delta \mathbf{f}$ la sua espressione e tenuto conto che $\mathbf{E}^T=\mathbf{D}$, $\mathbf{B}^T=\mathbf{A}$, si ha:

$$\delta \mathbf{r}^T (\mathbf{s} - \mathbf{A} \mathbf{u}) + \delta \sigma^T (\mathbf{D} \mathbf{u} - \varepsilon) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{r}, \delta \sigma) \quad (40)$$

per cui valgono le (1) e (2), cioè il sistema è congruente.

4.3 Il teorema dei lavori virtuali nella forma lagrangiana

Il teorema dei lavori virtuali può anche essere formulato in termini di grandezze lagrangiane, come identità bilineare dei due problemi aggiunti

$$\hat{\mathbf{D}} \mathbf{q} = \varepsilon - \varepsilon_s, \quad \hat{\mathbf{E}} \sigma = \mathbf{p} \quad (41)$$

In tal caso si scrive:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{q} = \sigma^T (\varepsilon - \varepsilon_s) \quad (42)$$

e si enuncia: il lavoro virtuale compiuto dalle forze lagrangiane nei corrispondenti parametri lagrangiani eguaglia il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni equilibrate nelle deformazioni congruenti depurate del contributo associato ai cedimenti vincolari.

• **Osservazione 11.** Nelle (42) il prodotto $\mathbf{p}^T \mathbf{q}$, ricordando il significato delle forze lagrangiane, rappresenta il lavoro virtuale compiuto dalle forze attive nei soli modi del sistema rigido. Il lavoro virtuale interno corrispondente è quindi compiuto dalle tensioni nella sola parte delle deformazioni che è associata ai modi, che non dipende dai cedimenti vincolari.

• **Osservazione 12.** L'ELV nella forma lagrangiana (42) può anche essere dedotta dalla forma estesa (35). Assunto un campo di spostamenti e deformazioni $(\mathbf{u}_s, \varepsilon_s)$ congruenti con cedimenti \mathbf{s} , la (35) si scrive:

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u}_s = -\mathbf{r}^T \mathbf{s} + \sigma^T \varepsilon_s$$

Sottraendo membro a membro la (35) e la precedente si eliminano le reazioni vincolari:

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) = \sigma^T(\varepsilon - \varepsilon_s)$$

Ma, per le (3) e (19) è:

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) = \mathbf{f}^T \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T \mathbf{f} = \mathbf{q}^T \mathbf{p}$$

da cui segue la (42).

4.4 Le condizioni di compatibilità statica e cinematica

Le due particolari forme del *TLV*, già viste nei Par. 3.3.3 e 5.4.5., che forniscono le condizioni di compatibilità per i sistemi impossibili, si specializzano come segue nel caso di sistemi deformabili vincolati. Si assume come sistema staticamente impossibile il sistema labile rigido associato (1° corollario) e come sistema cinematicamente impossibile il sistema iperstatico effettivo (2° corollario).

(a) **Il teorema degli spostamenti e deformazioni virtuali congruenti.** È una forma particolare del primo corollario del *TLV*, in cui si assumono *cedimenti virtuali nulli*, $\delta \mathbf{s} = \mathbf{0}$. L'*ELV* (37) si scrive allora:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{u}_q = \sigma^T \delta \varepsilon_q \quad \forall (\delta \mathbf{u}_q, \delta \varepsilon_q) \mid \mathbf{A} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0}, \mathbf{D} \delta \mathbf{u}_q = \delta \varepsilon_q \quad (43)$$

in cui $(\delta \mathbf{u}_q, \delta \varepsilon_q)$ è un campo congruente con cedimenti nulli. Poiché il sistema rigido associato è labile è, dalla (3)

$$\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q} \quad (44)$$

e quindi

$$\delta \varepsilon_q = \mathbf{D} \mathbf{U} \delta \mathbf{q} \quad (45)$$

Sostituendo le (44) e (45) nell'*ELV* si ha:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T (\mathbf{f} - \mathbf{D}^T \sigma) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (46)$$

da cui seguono le equazioni di equilibrio lagrangiane (17).

- **Osservazione 13.** Si confronti la (46) con la (3.51), $\delta \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T \mathbf{f} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$, relativa ad un sistema rigido labile.
- **Osservazione 14.** Il teorema degli spostamenti e deformazioni virtuali congruenti rappresenta un utilissimo strumento di calcolo per ottenere direttamente le equazioni di equilibrio lagrangiane del sistema vincolato, senza dover scrivere preventivamente le equazioni cardinali della statica. Infatti, l'*ELV* (43), essendo $\delta \mathbf{s} = \mathbf{0}$, filtra le reazioni vincolari, fornendo direttamente le equazioni condensate; ciò in quanto il campo degli spostamenti $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}$ è tale da far compiere lavoro virtuale alle sole forze attive. Le reazioni vincolari, invece, che pure sono presenti nel sistema reale, non compiono lavoro in questo campo di spostamenti, come si è già detto nell'Osservazione 7. Nel problema elastico il corollario è alla base della formulazione integrale del metodo degli spostamenti (cfr Par. 5.4.3).

Esercizio 7: Si ottengano le equazioni lagrangiane di equilibrio del sistema dell'Esercizio 5 applicando il *TLV*.

L'*ELV* si scrive (omettendo l'indice q):

$$\frac{pl}{2} \delta u_H = \sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \mu_2 \delta \kappa_2 + \mu_3 \delta \kappa_3$$

dove δu_H è lo spostamento virtuale orizzontale del punto H , di applicazione della risultante delle forze ripartite. Dalle (e) dell'Esercizio 2, omettendo il cedimento vincolare, si ha:

$$\delta \varepsilon_1 = -\delta q_1, \quad \delta \kappa_2 = \frac{1}{l} \delta q_1 - 2\delta q_2, \quad \delta \kappa_3 = 2\delta q_2$$

Inoltre, sovrapponendo gli effetti dei due modi (Fig. (c) Esercizio 2):

$$\delta u_H = \frac{1}{3} \delta q_1 - \frac{l}{3} \delta q_2$$

Sostituendo nell'*ELV* e raccogliendo, si ha:

$$\left(\sigma_1 - \frac{1}{l} \mu_2 + \frac{1}{6} pl \right) \delta q_1 + \left(2\mu_2 - 2\mu_3 - \frac{1}{6} pl^2 \right) \delta q_2 = 0$$

da cui seguono le equazioni di equilibrio lagrangiane già trovate nell'Esercizio 5.

(b) **Il teorema delle tensioni e reazioni virtuali autoequilibrate.** È una forma particolare del secondo corollario del *TLV*, in cui si assumono *forze attive virtuali nulle*, $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$. L'*ELV* (39) si scrive allora

$$\delta \mathbf{r}_x^T \mathbf{s} = \delta \sigma_x^T \varepsilon \quad \forall (\delta \mathbf{r}_x, \delta \sigma_x) \mid \mathbf{E} \delta \sigma_x = \mathbf{B} \delta \mathbf{r}_x \quad (47)$$

in cui $(\delta \mathbf{r}_x, \delta \sigma_x)$ è uno stato equilibrato con forze attive nulle; essa è anche detta equazione dei lavori virtuali complementare (*ELVC*) dei sistemi vincolati. Poiché (Eq. 22 e 24) è

$$\delta \sigma_x = \hat{\mathbf{S}} \delta \chi, \quad \delta \mathbf{r}_x = \hat{\mathbf{R}} \delta \chi \quad (48)$$

l'*ELVC*, si scrive:

$$\delta \chi^T (\hat{\mathbf{S}}^T \varepsilon - \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s}) = 0, \quad \forall \delta \chi \quad (49)$$

da cui

$$\hat{\mathbf{S}}^T \varepsilon - \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (50)$$

Tenuto conto della (25₂) e delle proprietà di dualità è $\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s} = \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{s}$. Ricordando che $\varepsilon_s = \mathbf{D} \mathbf{u}_s$, con $\mathbf{u}_s = \{ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{s} \quad \mathbf{0} \}^T$ è anche

$$\hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s} = \hat{\mathbf{S}}^T \varepsilon_s \quad (51)$$

La (50) coincide dunque con la (7).

- **Osservazione 15.** La (51) può anche essere dimostrata osservando che la (50) vale per ogni stato di deformazione congruente con \mathbf{s} (ne esistono infatti ∞^l , tanti quanti sono i possibili valori dei parametri lagrangiani). In particolare, scelto $\varepsilon = \varepsilon_s$, vale la (51). Si confronti questo ragionamento con quello, analogo, fatto nell'Osservazione 12.

- **Osservazione 16.** Si confronti la (49) con la (3.49), $\delta\chi^T \mathbf{R}^T \mathbf{s} = 0 \quad \forall \delta\chi$, relativa ad un sistema rigido iperstatico, ovvero $\delta\chi^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad \forall \delta\chi$, relativa ad un sistema deformabile iperstatico non vincolato.
- **Osservazione 17.** Il teorema delle tensioni e reazioni virtuali autoequilibrate (TLVC) rappresenta un utilissimo strumento di calcolo per ottenere le equazioni di compatibilità cinematica del sistema vincolato, senza dover prima scrivere le equazioni di congruenza. Il procedimento inoltre, non richiede la preventiva condensazione delle equazioni di equilibrio del problema virtuale, in quanto lo stato di autotenso-reazione ($\delta\mathbf{r}_x, \delta\sigma_x$) può essere ottenuto risolvendo direttamente le equazioni di equilibrio $-\mathbf{B}\delta\mathbf{r} + \mathbf{E}\delta\sigma = \mathbf{0}$. Nel problema elastico il corollario è alla base della formulazione integrale del metodo delle forze (cfr. Par. 5.4.3).

Esercizio 8: Si ottenga dal TLVC l'equazione di compatibilità cinematica del sistema dell'Esercizio 1.

L'ELVC (47) si scrive:

$$\delta R_{Ax} s_A = \delta\sigma_{1x} \varepsilon_1 + \delta\sigma_{2x} \varepsilon_2 + \delta\sigma_{3x} \varepsilon_3$$

Il generico stato di autotenso-reazione è stato ottenuto nell'Esercizio 6:

$$\delta\sigma_{1x} = \delta\chi, \quad \delta\sigma_{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta\chi, \quad \delta\sigma_{3x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \delta\chi, \quad \delta R_{Ax} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \delta\chi,$$

Sostituendo nell'ELVC si ha:

$$\left(\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \varepsilon_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} s_A \right) \delta\chi = 0$$

da cui segue l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 3.

4.5 La formula generale dello spostamento dei sistemi deformabili vincolati

Conseguenza del TLV è la FGSD. Sia noto uno stato di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ congruente con cedimenti vincolari \mathbf{s} e si voglia calcolare una componente di spostamento η di un punto P secondo una data retta \mathbf{r} (Fig. 4a). Considerato un sistema virtuale su cui agisce una forza attiva \mathbf{F}' d'intensità $F'=1$ che compie lavoro nello spostamento η , e determinato lo stato di tenso-reazione (\mathbf{r}', σ') equilibrato con la forza \mathbf{F}' (Fig. 4b), l'ELV (35) fornisce immediatamente

$$\eta = \sigma'^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{r}'^T \mathbf{s} \quad (52)$$

La (52) costituisce la FGSD per i sistemi vincolati (la si confronti con la 5.44).

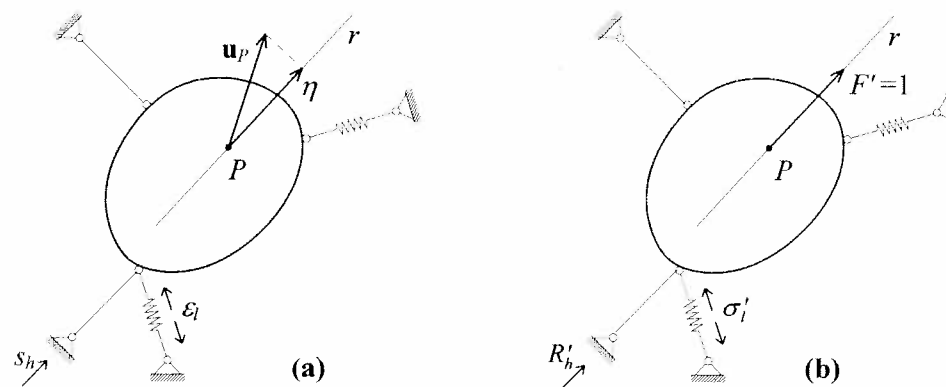
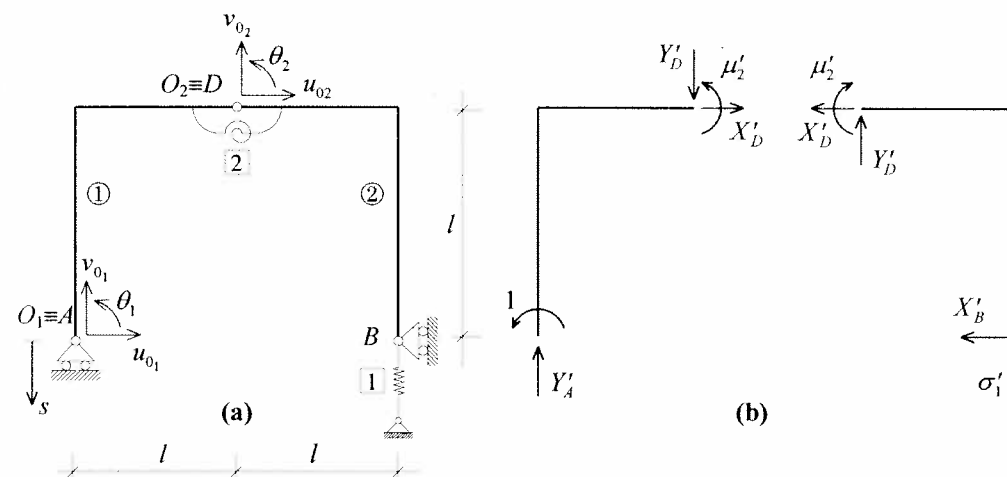


Fig. 4 La formula generale dello spostamento per sistemi deformabili vincolati

Esercizio 9: Con riferimento al sistema in Fig. (a), assegnato il cedimento s e le deformazioni ε_1 e κ_2 , determinare la rotazione del corpo AD utilizzando la FGSD.



Si considera il sistema virtuale di Fig. (b) ottenuto applicando una coppia unitaria sul corpo AD che compie lavoro nella rotazione θ_1 . Con riferimento alle notazioni di Fig. (b), dall'analisi dell'equilibrio si ha:

$$Y'_A = \frac{1}{2l}, \quad \sigma'_1 = \frac{1}{2l}, \quad \mu'_2 = -\frac{1}{2} \quad (a)$$

La FGSD si scrive:

$$1 \cdot \theta_1 = \sigma'_1 \varepsilon_1 + \mu'_2 \kappa_2 - Y'_A (-s) \quad (b)$$

da cui, sostituendo le (a), segue:

$$\theta_1 = \frac{1}{2l} \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \kappa_2 + \frac{1}{2l} s \quad (c)$$

5. Il problema elastico

5.1 Le equazioni del problema

Per un sistema a deformabilità concentrata, vincolato, sottoposto a forze attive, a cedimenti vincolari e a deformazioni imposte, il problema elastico si pone nella seguente forma generale: *dato un sistema di forze attive \mathbf{f} , cedimenti vincolari \mathbf{s} e deformazioni anelastiche $\bar{\varepsilon}$, determinare, se esistono, il campo degli spostamenti \mathbf{u} , lo stato di deformazione ε , lo stato di tensione σ e lo stato reattivo \mathbf{r} . Il problema è governato dalle seguenti equazioni, rispettivamente di congruenza, di equilibrio e di legame, tutte espresse in termini di grandezze lagrangiane:*

$$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} = \varepsilon - \varepsilon_s, \quad \hat{\mathbf{D}}^T \sigma = \mathbf{p}, \quad \sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad (53)$$

dove

$$\varepsilon_s = \mathbf{D}\mathbf{u}_s = \mathbf{D}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{s}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{U}^T \mathbf{f} \quad (54)$$

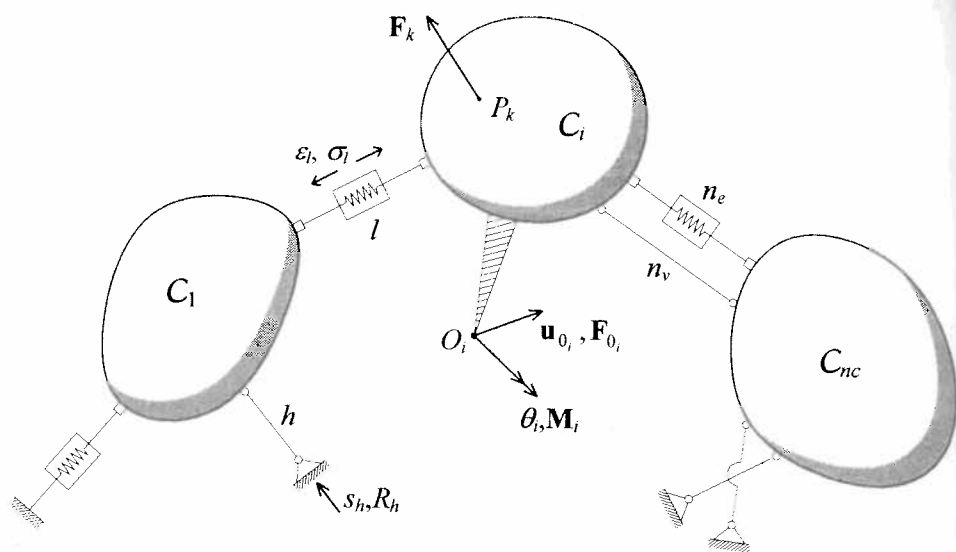


Fig. 5 Il problema elastico per i sistemi ad elasticità concentrata vincolati

Le (53) costituiscono un problema algebrico nelle incognite $(\mathbf{q}, \varepsilon, \sigma)$. Si hanno d equazioni di congruenza, l equazioni di equilibrio e d equazioni di legame negli l spostamenti lagrangiani \mathbf{q} , d deformazioni ε e d tensioni σ ; complessivamente $2d+l$ equazioni in altrettante incognite. Determinata (se esiste) la soluzione $(\mathbf{q}, \varepsilon, \sigma)$, gli spostamenti \mathbf{u} e le reazioni \mathbf{r} si calcolano dalle (3) e (21):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U}\mathbf{q}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{E}_1 \sigma - \mathbf{f}_1) \quad (55)$$

Per il problema (53) vale un teorema di esistenza e unicità analogo a quello dimostrato nel Par. 6.1.3 per i sistemi non vincolati (e in assenza di deformazioni imposte).

Le (53) possono infatti scriversi in una forma analoga alla (6.4):

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{D}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \varepsilon \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_s \\ \mathbf{C}\bar{\varepsilon} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (56)$$

cioè (cfr. Eq. 6.5)

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{b}} \quad (57)$$

Se quindi $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, se cioè non esistono modi rigidi (del sistema elastico), $\hat{\mathbf{L}}$ è non singolare e la soluzione è unica. Si osservi che cedimenti vincolari e deformazioni anelastiche modificano solo i termini noti del problema elastico (cfr. Osservazione 6.29). Se invece il sistema è labile (cfr. Par. 2.3) o degenera, se cioè $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q}_p = \mathbf{0}$ per qualche \mathbf{q}_p , affinché le (57) ammettano soluzione deve essere $\mathbf{p}^T \mathbf{q}_p = 0$, cioè le forze lagrangiane devono compiere lavoro nullo nei modi rigidi. In tal caso la soluzione esiste ma non è unica in termini di spostamento. Tuttavia, se si introducono nel sistema vincoli aggiuntivi strettamente sufficienti ad eliminare i modi rigidi, questa arbitrarietà viene rimossa senza alterare tensioni e reazioni (si ricordi l'Osservazione 6.4); più avanti gli Esercizi 12 e 14 e l'Osservazione 21 chiariranno il problema.

Nel seguito si risolve il problema elastico secondo i metodi degli spostamenti e delle forze. Nella formulazione diretta si assumerà che le equazioni del problema siano già state ridotte alla forma lagrangiana (57); i procedimenti sono allora quelli già descritti nei Par. 6.2 e 6.3 per i sistemi non vincolati, salvo considerare gli ulteriori effetti dei cedimenti vincolari e delle deformazioni anelastiche. Nelle formulazioni integrali e variazionali, invece, la riduzione alle variabili lagrangiane sarà ottenuta contestualmente alle equazioni risolutive del problema. Si farà infatti riferimento alla forma estesa del TLV (Par. 4.2) e suoi corollari, piuttosto che alla forma lagrangiana (Par. 4.3) (il cui utilizzo condurrebbe a dei procedimenti sostanzialmente identici a quelli relativi ai sistemi non vincolati). Il procedimento integrale o variazionale è quindi utilizzato come strumento per ottenere anche la forma lagrangiana, senza necessità quindi di costruirla preventivamente.

5.2 Il metodo degli spostamenti

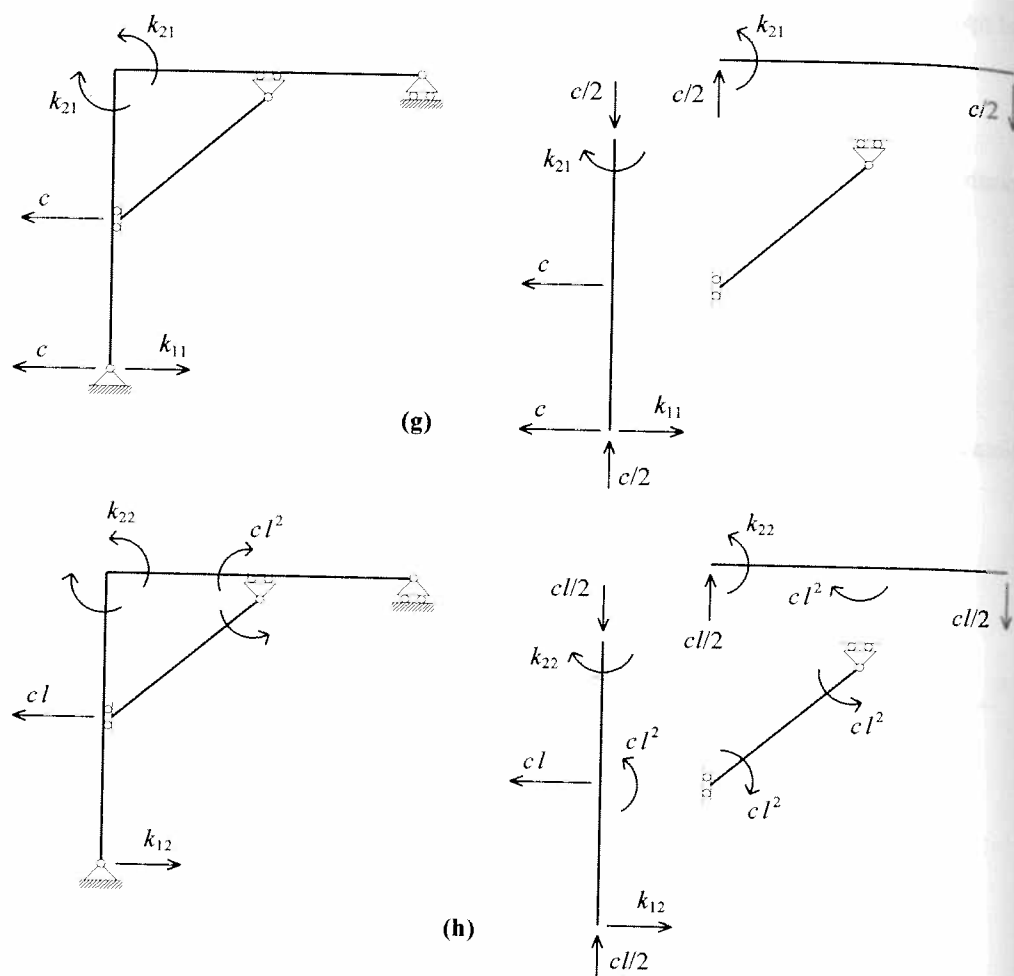
Si seguono gli stessi passi logici del Par. 6.2.2.

I. Assegnati i parametri lagrangiani, attraverso le equazioni di congruenza (53₁) si calcolano le deformazioni

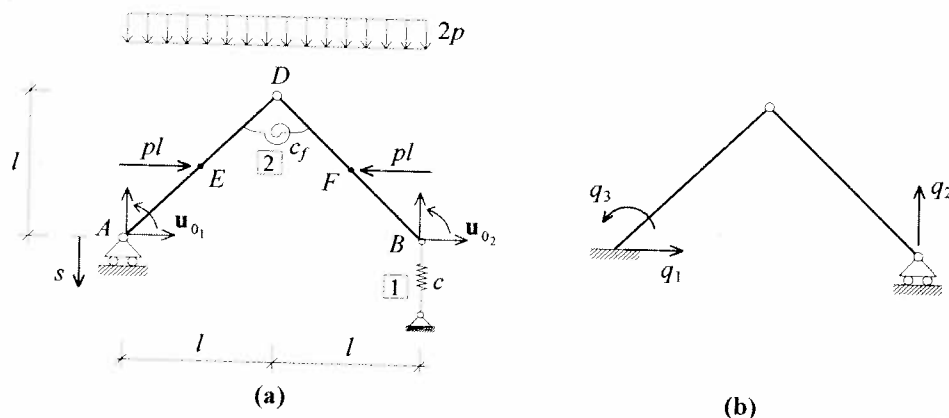
$$\varepsilon = \varepsilon_s + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} \quad (58)$$

II. Utilizzando il legame costitutivo (53₃) si determinano le tensioni associate

$$\sigma = \mathbf{C}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} + \mathbf{C}\varepsilon_s - \mathbf{C}\bar{\varepsilon} \quad (59)$$



Esercizio 12: Con riferimento al sistema labile in Fig. (a): **(a)** Si risolva il problema elastico applicando il metodo degli spostamenti; **(b)** si renda isostatico il sistema con vincoli aggiuntivi e si determini nuovamente la soluzione. Sia $c_f = c l^2$.



(a) Scelto quale sistema principale isocinematico (Osservazione 5, passo I) quello di Fig. (b) ed assunti quali parametri lagrangiani quelli indicati, dall'analisi dei quattro cinatismi associati al cedimento s e ai parametri q_1 , q_2 e q_3 (Fig. c-f), si ha:

$$\begin{Bmatrix} u_{0_1} \\ v_{0_1} \\ \theta_1 \\ u_{0_2} \\ v_{0_2} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -s \\ 0 \\ s \\ 0 \\ s/l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & 1 \\ 1 & 1 & -2l \\ . & 1 & . \\ . & 1/l & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

avendo evidenziato il vettore \mathbf{u}_s e la matrice modale \mathbf{U} . Essendo inoltre

$$\varepsilon_1 = v_B, \quad \kappa_2 = \theta_2 - \theta_1 \quad (\text{b})$$

e sovrapponendo gli effetti derivanti dall'applicazione dei cedimenti s e q_i ($i=1,2,3$), è facile ricavare che

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s/I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & . \\ 1/I & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

dove si è evidenziato il vettore ε_s e la matrice di congruenza $\hat{\mathbf{D}}$. Le forze generalizzate \mathbf{f} associate agli spostamenti generalizzati \mathbf{u} si ottengono riducendo le forze attive ai medesimi poli A e B del problema cinematico:

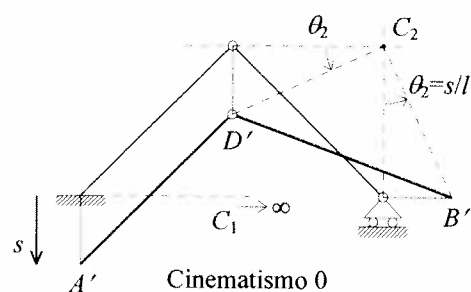
$$\mathbf{f} = p l \{1 \quad -2 \quad -3l/2 \quad -1 \quad -2 \quad 3l/2\}^T \quad (\text{d})$$

Conseguentemente la matrice di equilibrio è pari a $\hat{\mathbf{D}}^T$. Il legame elastico si scrive:

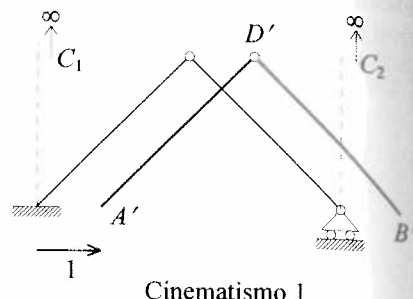
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & . \\ . & cl^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

Si hanno a questo punto tutti gli elementi per formulare il problema elastico in termini di spostamenti. Utilizzando infatti le (54₂), (61) e (62₁) la (60) diviene

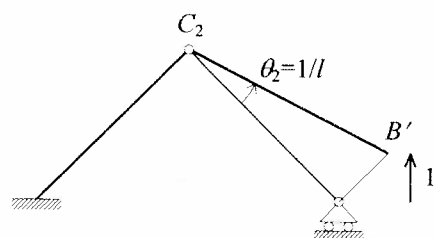
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & -2cl \\ 0 & -2cl & 4cl^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(3/2)pl \\ -pl^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -cs \\ 2cls \end{Bmatrix} \quad (f)$$



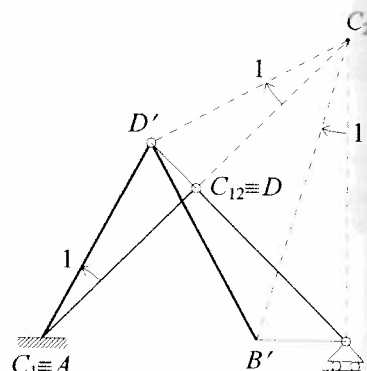
(c)



(d)



(e)



(f)

Dall'esame della (f) appare evidente che la matrice di rigidezza \hat{K} è singolare. Il problema omogeneo associato ammette la soluzione non banale

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = q_3 = 0 \quad \forall \rho \quad (g)$$

cui corrisponde il modo rigido di Fig. (d). Il problema elastico in questione ammette dunque soluzione solo se il vettore a secondo membro della (f) è ortogonale al modo rigido espresso dalle (g), ovvero se il sistema di forze attive compie lavoro nullo nel modo rigido (g). Poiché questa condizione è soddisfatta, il sistema (f) ammette soluzioni della forma

$$\mathbf{q} = \left\{ \rho, -2 \frac{pl}{c}, \frac{1}{2} \left(\frac{s}{l} - \frac{5p}{2c} \right) \right\}^T \quad \forall \rho \quad (h)$$

a cui corrisponde lo spostamento

$$\mathbf{u} = \left\{ \rho, -s, \frac{1}{2} \left(\frac{s}{l} - \frac{5p}{2c} \right); \rho + \frac{1}{2} \frac{pl}{c}, -2 \frac{pl}{c}, \frac{1}{2} \left(\frac{s}{l} - \frac{3p}{2c} \right) \right\}^T \quad \forall \rho \quad (i)$$

lo stato di deformazione

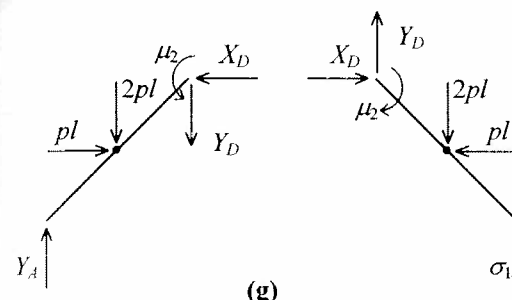
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ -2 \frac{pl}{c}, \frac{1}{2} \frac{p}{c} \right\}^T \quad (l)$$

lo stato di tensione

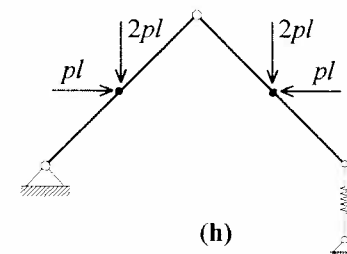
$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ -2pl, \frac{1}{2} pl^2 \right\}^T \quad (m)$$

Note le tensioni, imponendo l'equilibrio dei singoli corpi si determinano le reazioni vincolari Y_A, X_D, Y_D (Fig. g). Si trova

$$Y_A = 2pl, \quad X_D = pl, \quad Y_D = 0 \quad (n)$$



(g)



(h)

(b) Il sistema labile può essere reso isostatico trasformando il carrello in A in una cerniera (Fig. h). Il vettore dei parametri lagrangiani diventa $\mathbf{q} = \{q_2, q_3\}^T$; valgono perciò tutte le relazioni precedentemente scritte in cui si ponga $q_1 \equiv \rho = 0$. Poiché deformazioni, tensioni e reazioni vincolari non dipendono da ρ (Eq. l-n) si ritrova la soluzione precedente. In particolare la reazione X_A del vincolo aggiuntivo è nulla.

• **Osservazione 21.** Non si confondano i vincoli aggiuntivi utilizzati per rendere cinematicamente determinato un sistema labile con quelli utilizzati per rendere isocinematico il sistema rigido associato (sistema principale). I primi, infatti, servono a rimuovere i modi rigidi (corrispondenti cioè ad $\varepsilon=0$), ma lasciano al sistema rigido associato dei gradi di libertà. Inoltre non sono sede di cedimenti vincolari, come accade invece per i secondi, nello spirito dell'Osservazione 5. In altre parole può anche dirsi che, reso isocinematico il sistema rigido associato, ed assegnati i cedimenti vincolari q_i corrispondenti, se a qualcuno di questi corrispondono deformazioni tutte nulle, il parametro lagrangiano associato può essere soppresso (sempreché le forze rispettino la condizione di solvibilità).

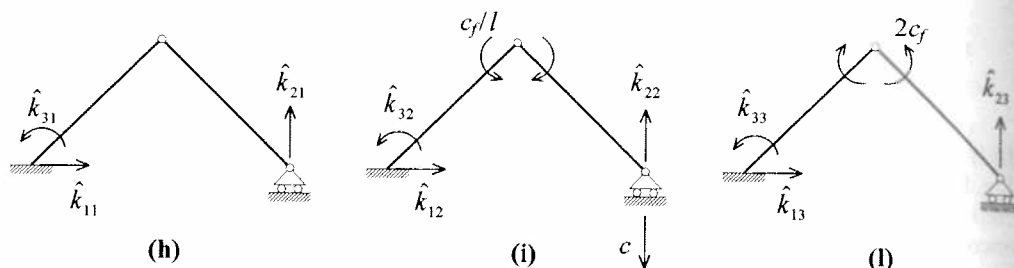
• **Osservazione 22.** L'Esercizio 12 ha mostrato che, se in un sistema labile si introducono vincoli aggiuntivi che rendono il sistema isocinematico, non si altera (se esiste) la soluzione del problema elastico in termini di deformazioni e tensioni; in particolare le reazioni dei vincoli aggiuntivi sono nulle. Per convincersene, basta pensare di calcolare le reazioni in questione applicando al sistema isostatico il TLV (cfr. Par. 3.3.1). Assegnando ad un vincolo aggiuntivo un cedimento unitario, ad esso consegue un campo di spostamenti in cui tensioni e forze attive compiono lavoro virtuale nullo; la reazione vincolare è perciò anch'essa nulla (ad esempio, nell'Esercizio 12, il campo di spostamenti virtuali è quello di Fig. d). Queste stesse considerazioni si applicano ad un sistema degenere, come l'Esercizio 14 mostrerà.

• **Osservazione 23.** Cedimenti vincolari agenti in sistemi labili sono *ininfluenti* su deformazioni e tensioni. L'Esercizio 12 ha mostrato un esempio di ciò.

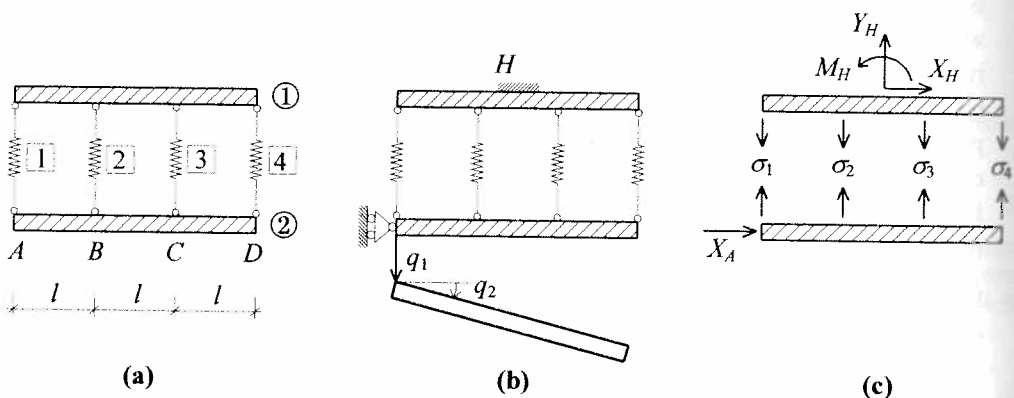
Esercizio 13: Si costruisca la matrice di rigidezza $\hat{\mathbf{K}}$ del sistema dell'Esercizio 12 utilizzando il significato di coefficiente di rigidezza (Osservazione 20).

Nel sistema principale isocinematico si attiva una coordinata lagrangiana per volta, assegnando alle altre valori nulli. Si ottengono le configurazioni variate in Fig. (d), (e), (f) dell'Esercizio 12. Le forze lagrangiane associate alle coordinate q_1 , q_2 e q_3 sono i coefficienti di rigidezza rispettivamente della prima (Fig. h), seconda (Fig. i) e terza colonna (Fig. l) di $\hat{\mathbf{K}}$. Essi si calcolano imponendo l'equilibrio con le forze elastiche che si sviluppano a seguito degli stessi spostamenti. Si ha:

$$\begin{aligned}\hat{k}_{11} = \hat{k}_{21} = \hat{k}_{31} &= 0; \quad \hat{k}_{12} = 0, \quad \hat{k}_{22} = c + c_f/l^2, \quad \hat{k}_{32} = -2c_f/l; \\ \hat{k}_{13} &= 0, \quad \hat{k}_{23} = -2c_f/l, \quad \hat{k}_{33} = 4c_f\end{aligned}$$



Esercizio 14: Con riferimento al sistema degenero in Fig. (a), in cui si abbia $\varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_3 > 0$, si determini lo stato di tensione; sia $c_i = c$ ($i=1 \div 4$).



È $n=6$, $m=0$, $d=4$. Il sistema è labile in quanto a deformazioni $\varepsilon=0$, corrispondono quattro modi rigidi: tre spostamenti rigidi d'insieme (per l'assenza di vincoli esterni) e la traslazione relativa dei due corpi secondo l'orizzontale. D'altra parte non è possibile assegnare ad arbitrio le quattro deformazioni; il sistema è pertanto degenere. La condizione di solvibilità $\mathbf{p}^T \mathbf{q}_p = 0$ è però soddisfatta, in quanto $\mathbf{p}=0$: il problema elastico ammette dunque soluzione.

Si rimuove prima la labilità del sistema elastico, introducendo quattro vincoli addizionali (Fig. b). Il sistema rigido associato è due volte labile; si scelgano i parametri $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}^T$ indicati in Fig. (b). Le deformazioni sono:

$$\varepsilon_1 = q_1, \quad \varepsilon_2 = q_1 + lq_2, \quad \varepsilon_3 = q_1 + 2lq_2, \quad \varepsilon_4 = q_1 + 3lq_2 \quad (a)$$

a cui corrispondono le tensioni

$$\sigma_1 = cq_1, \quad \sigma_2 = c(q_1 + lq_2), \quad \sigma_3 = c(q_1 + 2lq_2 - \bar{\varepsilon}_3), \quad \sigma_4 = c(q_1 + 3lq_2) \quad (b)$$

Le equazioni di equilibrio lagrangiane esprimono l'equilibrio alla traslazione verticale e l'equilibrio alla rotazione intorno ad A del corpo 2. Esse si scrivono (Fig. c):

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 l + 2\sigma_3 l + 3\sigma_4 l = 0 \quad (c)$$

ovvero in termini di spostamento:

$$4cq_1 + 6clq_2 = c\bar{\varepsilon}_3, \quad 6cq_1 + 14clq_2 = 2c\bar{\varepsilon}_3 \quad (d)$$

Queste ultime, risolte, forniscono:

$$q_1 = \frac{1}{10}\bar{\varepsilon}_3, \quad q_2 = \frac{1}{10}\frac{\bar{\varepsilon}_3}{l} \quad (e)$$

Le (e), sostituite in (a) e (b), permettono di valutare lo stato tenso-deformativo del sistema. Si ha:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{10}\bar{\varepsilon}_3, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{5}\bar{\varepsilon}_3, \quad \varepsilon_3 = \frac{3}{10}\bar{\varepsilon}_3, \quad \varepsilon_4 = \frac{2}{5}\bar{\varepsilon}_3 \\ \sigma_1 &= \frac{1}{10}c\bar{\varepsilon}_3, \quad \sigma_2 = \frac{1}{5}c\bar{\varepsilon}_3, \quad \sigma_3 = -\frac{7}{10}c\bar{\varepsilon}_3, \quad \sigma_4 = \frac{2}{5}c\bar{\varepsilon}_3\end{aligned} \quad (f)$$

Le reazioni vincolari addizionali X_A , X_H , Y_H , M_H (Fig. c) sono tutte nulle, in accordo all'Osservazione 21.

5.3 La formulazione integrale dell'equilibrio: l'equazione dei lavori virtuali

La formulazione integrale permette di ottenere le equazioni di equilibrio direttamente in termini lagrangiani. Il teorema degli spostamenti e deformazioni virtuali congruenti (Eq. 43) si scrive:

$$\mathbf{f}^T \delta \mathbf{u}_q = \sigma^T \delta \varepsilon_q \quad \forall (\delta \mathbf{u}_q, \delta \varepsilon_q) | \mathbf{A} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0}, \mathbf{D} \delta \mathbf{u}_q = \delta \varepsilon_q \quad (63)$$

Le tensioni reali sono funzione dei parametri lagrangiani reali (Eq. 59), spostamenti e deformazioni virtuali si esprimono in funzione dei parametri lagrangiani virtuali con le (55₁) e (53₁):

$$\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}, \quad \delta \varepsilon_q = \hat{\mathbf{D}} \delta \mathbf{q} \quad (64)$$

Sostituendo nell'equazione dei lavori virtuali (63) si ha:

$$\delta \mathbf{q}^T \left[\hat{\mathbf{D}}^T (\mathbf{C} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{q} + \mathbf{C} \varepsilon_s - \mathbf{C} \bar{\varepsilon}) - \mathbf{U}^T \mathbf{f} \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (65)$$

da cui seguono le equazioni di equilibrio (60).

Quanto sopra suggerisce il seguente procedimento di calcolo.

- I. Si scrive l'ELV (63).
- II. Si studia la cinematica del sistema reale (ad esempio attraverso i metodi della cinematica grafica, cfr. Osservazione 5) e si esprimono le deformazioni in funzione dei parametri lagrangiani.
- III. Attraverso il legame costitutivo si esprimono le tensioni in funzione dei parametri lagrangiani.

- IV. Si studia la cinematica del sistema virtuale in *assenza di cedimenti vincolari*. Questa è formalmente analoga a quella del sistema reale dove si ometta il contributo dei cedimenti vincolari.
- V. Si sostituisce nell'*ELV* e si impone che questa valga per ogni spostamento lagrangiano virtuale; si ottengono così le equazioni di equilibrio in termini dei parametri lagrangiani reali.
- **Osservazione 24.** La formulazione integrale offre il grande vantaggio di fornire immediatamente le equazioni di equilibrio (in termini di spostamento) nella forma lagrangiana. Tuttavia, risolto il problema elastico e determinate le tensioni, se si è interessati anche alle reazioni vincolari occorre *scrivere in forma diretta le equazioni cardinali*, o almeno *m* di esse linearmente indipendenti in cui appaiano le *m* incognite *r*. Alternativamente può applicarsi ancora il *TLV* con $\delta s \neq 0$, come già fatto nel Par. 3.3.1.

Esercizio 15: Applicando la formulazione integrale si ottengano le equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamento per il sistema dell'Esercizio 10.

L'*ELV* (63) si scrive (passo I):

$$pl\delta u_G = \sigma_1\delta\epsilon_1 + \sigma_2\delta\epsilon_2 + \mu_3\delta\kappa_3$$

avendo espresso il lavoro delle forze attive come il prodotto della risultante *pl* per lo spostamento δu_G del punto di applicazione. Le tensioni reali si esprimono in funzione dei parametri lagrangiani attraverso le (c) dell'Esercizio 10 (passi II e III, comuni al metodo diretto). L'applicazione formale dell'operatore δ alle equazioni di congruenza (a) fornisce (passo IV)

$$\delta\epsilon_1 = \delta q_1, \quad \delta\epsilon_2 = \delta q_1 + l\delta q_2, \quad \delta\kappa_3 = -\delta q_2$$

Essendo inoltre dalla *FGSR*:

$$\delta u_G = \delta q_1 + \frac{3}{2}l\delta q_2$$

L'*ELV* si scrive (passo V):

$$\left[-c(q_1 - \bar{e}_1) - c\left(q_1 + lq_2 - \frac{1}{2}s\right) + pl \right] \delta q_1 + \left[-cl\left(q_1 + lq_2 - \frac{1}{2}s\right) - cl^2q_2 + \frac{3}{2}pl^2 \right] \delta q_2 = 0$$

Eguagliando separatamente a zero i coefficienti di δq_1 e δq_2 si ottengono le equazioni cercate, identiche alle (e) dell'Esercizio 10.

Esercizio 16: Considerando il sistema dell'Esercizio 12, si riottengano le equazioni di equilibrio in termini di spostamento applicando la formulazione integrale.

L'*ELV* (63) si scrive (passo I):

$$-2pl(\delta v_E + \delta v_F) + pl(\delta u_E - \delta u_F) = \sigma_1\delta\epsilon_1 + \mu_2\delta\kappa_2$$

avendo espresso il lavoro delle forze attive come somma di prodotti delle risultanti $2pl$ dei segmenti di carico ripartito per gli spostamenti $\delta v_E, \delta v_F$ (assunti positivi se verso l'alto) e delle forze concentrate per gli spostamenti $\delta u_E, \delta u_F$ (assunti positivi se verso destra) dei rispettivi punti di applicazione. Le tensioni reali si esprimono in funzione dei parametri lagrangiani reali attraverso le (e) e (b) dell'Esercizio 12 (passi II e III, comuni al metodo diretto). Applicando

poi formalmente l'operatore δ alle equazioni di congruenza (Eq. (c) dell'Esercizio 12) si ha immediatamente (passo IV):

$$\delta\epsilon_1 = \delta q_2, \quad \delta\kappa_2 = \frac{1}{l}\delta q_2 - 2\delta q_3$$

Inoltre, dalla *FGSR* si ha:

$$\delta v_E = \frac{l}{2}\delta q_3, \quad \delta v_F = \frac{1}{2}\delta q_2 + \frac{l}{2}\delta q_3; \quad \delta u_E = \delta q_1 - \frac{l}{2}\delta q_3, \quad \delta u_F = \delta q_1 + \frac{1}{2}\delta q_2 - \frac{3}{2}l\delta q_3;$$

L'*ELV* si scrive dunque (passo V):

$$0 \cdot \delta q_1 + \left(-\frac{3}{2}pl - cs - 2cq_2 + 2clq_3 \right) \delta q_2 + \left(-pl^2 + 2cls + 2clq_2 - 4cl^2q_3 \right) \delta q_3 = 0$$

avendo raccolto i termini a fattore di $\delta q_1, \delta q_2$ e δq_3 . Eguagliando separatamente a zero i coefficienti di $\delta q_1, \delta q_2$ e δq_3 si ottengono le equazioni cercate, identiche alle (f) dell'Esercizio 12.

5.4 La formulazione variazionale dell'equilibrio: il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Un procedimento equivalente a quello integrale è rappresentato dalla formulazione variazionale. La definizione della funzione energia potenziale totale è la medesima dei sistemi non vincolati. Poiché in presenza delle deformazioni anelastiche $\Phi(\epsilon)$ assume l'espressione (Eq. 6.65), è:

$$\begin{aligned} U(\epsilon, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\epsilon - \bar{\epsilon})^T \mathbf{C}(\epsilon - \bar{\epsilon}) - \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^T \mathbf{C}\epsilon - \epsilon^T \mathbf{C}\bar{\epsilon} - \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \text{cost} \end{aligned} \quad (66)$$

Limitandosi a considerare stati congruenti si ha:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{U}\mathbf{q}, \quad \epsilon = \epsilon_s + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} \quad (67)$$

per cui

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{C}(\epsilon_s - \bar{\epsilon}) - \mathbf{q}^T \mathbf{U}^T \mathbf{f} + \text{cost} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T (\mathbf{p}_s + \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{p}) + \text{cost} \end{aligned} \quad (68)$$

avendo usato le (61) e (62). Imponendo che sia $\delta U = 0 \forall \delta \mathbf{q}$ si riottiene la (60). Si noti che l'equazione $\delta U = 0 \forall \delta \mathbf{q}$ coincide con l'*ELV* (63), come si era già notato per i sistemi non vincolati (Osservazione 6.15). Valgono perciò le stesse considerazioni dell'Osservazione 24. In definitiva, per i sistemi vincolati, vale il seguente teorema, identico a quello valido per i sistemi non vincolati.

Teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale: *CNES per l'equilibrio di un sistema elastico vincolato è che l'energia potenziale totale sia stazionaria nell'insieme degli stati congruenti. Nello stato equilibrato l'energia potenziale totale assume un minimo isolato.*

Il teorema di stazionarietà dell'EPT costituisce uno strumento operativo alternativo all'ELV per ricavare, nello spirito del metodo degli spostamenti, le equazioni di equilibrio del sistema: esso costituisce la formulazione variazionale dell'equilibrio. Nelle applicazioni occorre procedere come segue:

- I. Si scrive l'espressione dell'EPT, sommando le energie elastiche di tutti gli organi e sottraendo il lavoro delle forze attive.
- II. Si studia la cinematica del sistema e si esprimono le deformazioni degli organi in funzione dei cedimenti s dei vincoli e dei parametri lagrangiani q (Eq. 67₂), nonché gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze in funzione di q .
- III. Si impone la stazionarietà di U : le derivate parziali di U rispetto alle coordinate lagrangiane, eguagliate a zero, costituiscono le equazioni lagrangiane di equilibrio espresse in termini di parametri liberi di spostamento.

Esercizio 17: Applicando il teorema dell'EPT si scrivano le equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamento per il sistema dell'Esercizio 10.

L'EPT del sistema è (passo I)

$$U = \frac{1}{2} c \left[(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)^2 + \varepsilon_2^2 + l^2 \kappa_3^2 \right] - pl u_G$$

dove u_G è lo spostamento del punto di applicazione della risultante pl delle forze distribuite agenti sul tratto EB . Le equazioni di congruenza (Eq. (a) dell'Esercizio 10) e la FGSR permettono di esprimere U nella forma (passo II)

$$U = \frac{1}{2} c \left[(q_1 - \bar{\varepsilon}_1)^2 + \left(q_1 + l q_2 - \frac{1}{2} s \right)^2 + l^2 q_2^2 \right] - pl \left(q_1 + \frac{3}{2} l q_2 - \frac{3}{4} s \right)$$

Imponendo la stazionarietà ad U rispetto a $q = \{q_1, q_2\}^T$, imponendo cioè (passo III)

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

si ritrovano le equazioni di equilibrio (e) dell'Esercizio 10.

Esercizio 18: Si risolva il problema elastico relativo al sistema dell'Esercizio 12 applicando il teorema dell'EPT.

L'EPT del sistema è (passo I)

$$U = \frac{1}{2} (c \varepsilon_1^2 + c l^2 \kappa_2^2) - 2 pl (v_E + v_F) - pl (u_E - u_F)$$

dove v_E e v_F sono gli spostamenti dei punti di applicazione delle risultanti $2pl$ delle forze distribuite agenti rispettivamente nei tratti AD e BD , mentre u_E ed u_F sono gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze concentrate pl agenti rispettivamente in E ed F . Le equazioni di congruenza (Eq. (b) dell'Esercizio 12) e la FGSR permettono di esprimere U come funzione delle sole variabili libere di configurazione (passo II)

$$U = \frac{1}{2} \left[c q_2^2 + c l^2 \left(\frac{s}{l} + \frac{1}{l} q_2 - 2 q_3 \right)^2 \right] - 2 pl \left[\left(-s + \frac{l}{2} q_3 \right) + \left(-\frac{s}{2} + \frac{1}{2} q_2 + \frac{l}{2} q_3 \right) \right] - pl \left[\left(q_1 - \frac{l}{2} q_3 \right) - \left(\frac{s}{2} + q_1 + \frac{1}{2} q_2 - \frac{3}{2} l q_3 \right) \right]$$

Imponendo la stazionarietà rispetto a $q = \{q_1, q_2, q_3\}^T$, imponendo cioè (passo III):

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

si ritrovano le equazioni di equilibrio (f) dell'Esercizio 12.

5.5 Il metodo delle forze

Si fa riferimento ad un sistema iperstatico, seguendo gli stessi passi logici del Par. 6.3.2.

- I. Scelte le incognite iperstatiche, attraverso le equazioni di equilibrio (Eq. 17) si calcolano le tensioni:

$$\sigma = \sigma_0 + \hat{S} \chi \quad (69)$$

- II. Utilizzando il legame costitutivo si determinano le deformazioni associate:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \mathbf{H} \sigma_0 + \mathbf{H} \hat{S} \chi \quad (70)$$

- III. Si impone che le deformazioni, funzione delle incognite iperstatiche, soddisfino le equazioni (7) di compatibilità cinematica, $\hat{Q}(\varepsilon - \varepsilon_s) = 0$. Ricordando che $\hat{Q} = \hat{S}^T$, si ottiene:

$$\hat{F} \chi + \eta_0 + \bar{\eta} + \eta_s = 0 \quad (71)$$

dove

$$\hat{F} = \hat{S}^T \mathbf{H} \hat{S}, \quad \eta_0 = \hat{S}^T \mathbf{H} \sigma_0, \quad \bar{\eta} = \hat{S}^T \bar{\varepsilon}, \quad \eta_s = -\hat{S}^T \varepsilon_s = -\hat{R}^T s \quad (72)$$

avendo usato la (51) nell'ultima delle (72). Nella (71) \hat{F} , di dimensioni $r \times r$, è la matrice di flessibilità del sistema vincolato, di dimensioni $r \times r$. Come la matrice \mathbf{F} del sistema non vincolato è simmetrica e definita positiva; è quindi anche invertibile. η_0 , $\bar{\eta}$ ed η_s rappresentano gli spostamenti rispettivamente dovuti ai carichi, alle deformazioni anelastiche e a cedimenti vincolari.

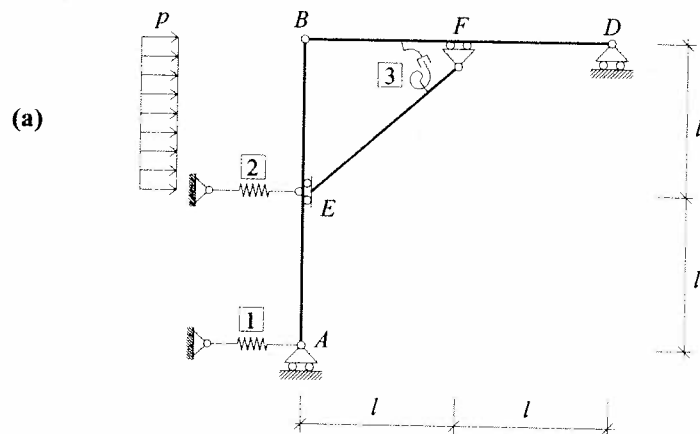
- **Osservazione 25.** Con un ragionamento analogo a quello del Par. 6.3.3 η_0 , $\bar{\eta}$ ed η_s possono interpretarsi come gli spostamenti dei punti di sconnessione degli organi elastici le cui tensioni sono state assunte come incognite iperstatiche.
- **Osservazione 26.** Si noti che, a differenza di quanto accade per le matrici \mathbf{K} e $\hat{\mathbf{K}}$ (Osservazione 18), tra le matrici \mathbf{F} ed $\hat{\mathbf{F}}$, relative allo stesso sistema in presenza oppure no di vincoli, non esiste una relazione altrettanto semplice.

Esercizio 19: Si risolva il problema elastico dell'Esercizio 10 applicando il metodo delle forze.

Il sistema è una volta iperstatico. Si assume μ_3 come incognita iperstatica, $\chi_1 = \mu_3$. Le equazioni di equilibrio (d₁) e (d₃) dell'Esercizio 10 si scrivono (equazioni di equilibrio condensate):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ . & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = pl \begin{Bmatrix} 1 \\ 3l/2 \end{Bmatrix} + \chi_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

avendo portato a secondo membro l'incognita iperstatica e avendo lasciato a primo membro un minore non nullo. Ciò equivale a scegliere il sistema principale in Fig. (a), ottenuto da quello originario disconnettendo la molla 3.



Il generico stato di tensione equilibrato è (passo I):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} pl \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \chi_1 \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1 \end{Bmatrix}$$

i due contributi del quale sono rappresentati nelle Fig. (b) e (c), rispettivamente. Ad esso corrisponde lo stato di deformazione (passo II):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{pl}{c} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{c} \chi_1 \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1/l^2 \end{Bmatrix}$$

Poiché, dalla (b), è

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} -1/l & 1/l & 1 \end{bmatrix}^T$$

le equazioni di compatibilità cinematica si scrivono:

$$-\frac{1}{l}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1s}) + \frac{1}{l}(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2s}) + (\kappa_3 - \kappa_{3s}) = 0$$

dove, ricordando le (a) dell'Esercizio 10,

$$\varepsilon_{1s} = 0, \quad \varepsilon_{2s} = -s/2, \quad \kappa_{3s} = 0$$

Sostituendo le (c) l'equazione di compatibilità diviene:

$$\frac{3}{cl^2} \chi_1 + 2 \frac{p}{c} - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{l} + \frac{s}{2l} = 0$$

del tipo (71). Risolvendo si ha:

$$\chi_1 = -\frac{2}{3} pl^2 + \frac{1}{3} cl \bar{\varepsilon}_1 - \frac{1}{6} cls$$

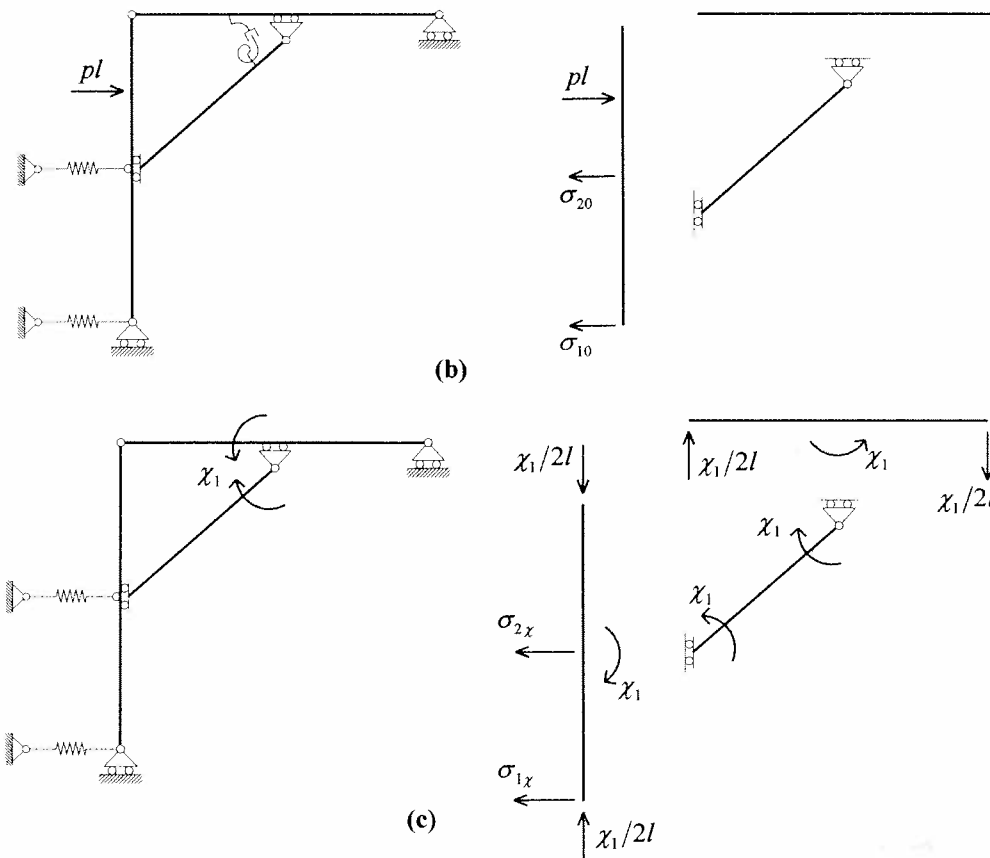
Lo stato di tensione si ottiene sovrapponendo gli effetti dei due sistemi di forze

$$\sigma = \sigma_0 + \chi_1 \sigma'_1 \quad (i)$$

ovvero

$$\sigma_1 = \frac{1}{6} pl + \frac{1}{6} cs - \frac{1}{3} c \bar{\varepsilon}_1, \quad \sigma_2 = \frac{5}{6} pl - \frac{1}{6} cs + \frac{1}{3} c \bar{\varepsilon}_1, \quad \sigma_3 = -\frac{2}{3} pl^2 - \frac{1}{6} cls + \frac{1}{3} cl \bar{\varepsilon}_1 \quad (l)$$

identiche alle (h) dell'Esercizio 10.



Esercizio 20: Applicando la FGSD, si riottienga l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 19.

Si tratta di calcolare lo spostamento η_1 che si verifica nell'unica sconnessione presente nel sistema in Fig. (a) dell'Esercizio 19. Applicando due coppie unitarie uguali e contrarie all'estremità della sconnessione si ingenera lo stato di tensione (virtuale)

$$\sigma'_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 1 \end{Bmatrix}^T$$

uguale a quello della Fig. (c) dell'Esercizio 19, diviso per χ_1 . La FGSD (52) si scrive:

$$1 \cdot \eta_1 = \sigma'_{11} \varepsilon_1 + \sigma'_{21} \varepsilon_2 + \mu'_{31} \kappa_3 - Y'_A(-s)$$

dove $Y'_A = 1/(2l)$ è la reazione in A dovuta alle coppie (assunta positiva in verso opposto ad s)

ed $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_3$ sono fornite dalle (c) dell'Esercizio 19. Imponendo che sia $\eta_1=0$ si ha:

$$\frac{3}{cl^2} \chi_1 + 2 \frac{p}{c} - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{l} + \frac{s}{2l} = 0$$

che costituisce l'equazione di compatibilità cinematica, identica a quella trovata nell'Esercizio 19.

Esercizio 21: Utilizzando la FGSD, si calcoli l'abbassamento del punto E, del sistema dell'Esercizio 10, già risolto con il metodo delle forze nell'Esercizio 19.

Nell'Esercizio 19 si è determinato lo stato di deformazione (c), funzione dell'incognita iperstatica $\chi_1 = \mu_3$; sostituendo la (h) si ha:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{6} \frac{pl}{c} + \frac{s}{6}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{5}{6} \frac{pl}{c} - \frac{s}{6}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{3} \frac{\bar{\varepsilon}_1}{l} - \frac{2}{3} \frac{p}{c} - \frac{1}{6} \frac{s}{l}$$

Applicata una forza unitaria verticale in E (Fig. a₁) occorre determinare un qualunque stato tenso-reattivo equilibrato. Posto, ad esempio, $\mu_3 = 0$, dall'equilibrio (Fig. a₂) si trae:

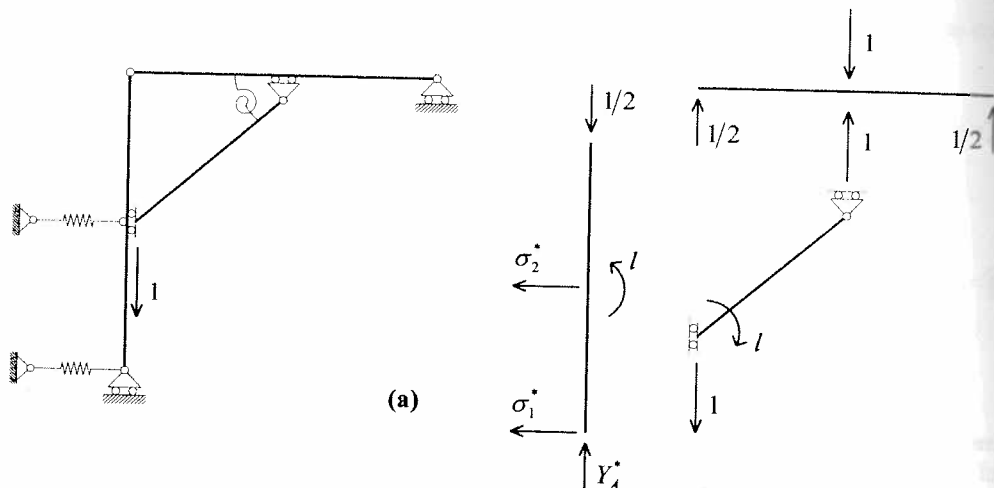
$$\sigma_1^* = 1, \quad \sigma_2^* = -1, \quad Y_A^* = 1/2$$

(si ottiene cioè lo stato di tensione che si verifica nel sistema principale). La FGSD si scrive

$$v_E = \sigma_1^* \varepsilon_1 + \sigma_2^* \varepsilon_2 - Y_A^* (-s)$$

da cui

$$v_E = -\frac{2}{3} \frac{pl}{c} + \frac{1}{3} \bar{\varepsilon}_1 + \frac{5}{6} s$$



5.6 La formulazione integrale della congruenza: l'equazione dei lavori virtuali complementare

La formulazione integrale permette di ottenere le equazioni di compatibilità cinematica. Il teorema delle tensioni e reazioni virtuali autoequilibrate (TLVC) si scrive (Eq. 47):

$$\delta \mathbf{r}_x^T \mathbf{s} = \delta \sigma_x^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall (\delta \mathbf{r}_x, \delta \sigma_x) \text{ E } \delta \sigma_x = \mathbf{B} \delta \mathbf{r}_x \quad (73)$$

Le deformazioni reali sono funzione delle incognite iperstatiche reali (Eq. 70); tensioni e reazioni virtuali si esprimono in funzione delle incognite iperstatiche virtuali attraverso le (22) e (24):

$$\delta \sigma_x = \hat{\mathbf{S}} \delta \chi, \quad \delta \mathbf{r}_x = \hat{\mathbf{R}} \delta \chi \quad (74)$$

Sostituendo nell'ELVC (73) si ha:

$$\delta \chi^T \left[\hat{\mathbf{S}}^T (\mathbf{H} \hat{\mathbf{S}} \chi + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{H} \sigma_0) - \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s} \right] = 0 \quad \forall \delta \chi \quad (75)$$

da cui seguono le equazioni di congruenza (71).

Quanto sopra suggerisce il seguente procedimento di calcolo:

- I. Si scrive l'ELVC (73).
- II. Si risolvono le equazioni cardinali della statica del sistema reale, e si determinano reazioni vincolari e tensioni in funzione delle incognite iperstatiche.
- III. Attraverso il legame costitutivo si ottengono le deformazioni in funzione delle incognite iperstatiche.
- IV. Si studia la statica del sistema virtuale in assenza delle forze attive; questa è formalmente analoga a quella del sistema reale dove si ometta il contributo delle forze attive.
- V. Si sostituisce nell'ELVC e si impone che questa valga per ogni incognita iperstatica virtuale; si ottengono così le equazioni di compatibilità cinematica in termini di incognite iperstatiche.

• **Osservazione 27.** Le incognite iperstatiche (passo II) non devono necessariamente essere delle tensioni, ma possono anche essere delle reazioni vincolari (un esempio verrà discusso nel prossimo capitolo, Esercizio 8.15). Tuttavia, poiché nella formulazione diretta si è operato sulle equazioni condensate (dove appaiono solo tensioni) la (74) fornisce le stesse equazioni del metodo diretto solo se χ rappresenta appunto delle tensioni.

Esercizio 22: Considerando il sistema dell'Esercizio 19, si ottenga l'equazione di compatibilità cinematica espressa in termini di incognite iperstatiche applicando la formulazione integrale.

L'ELVC (73) si scrive (passo I)

$$\delta \sigma_{1x} \varepsilon_1 + \delta \sigma_{2x} \varepsilon_2 + \delta \mu_{3x} \kappa_3 - \delta Y_{Ax} (-s) = 0$$

Il generico stato (reale) di tenso-reazione equilibrato è (passo II, Eq. (b) dell'Esercizio 19):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} pl \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \chi_1 \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad Y_A = \frac{\chi_1}{2l}$$

avendo considerato la sola reazione associata al cedimento s . Corrispondentemente le deformazioni sono (passo III):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{pl}{c} \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{c} \chi_1 \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1/l^2 \end{Bmatrix}$$

Lo stato di auto-tensoreazione virtuale $\delta\sigma_x$, $\delta\mathbf{r}_x$ può ottenersi formalmente da σ ed \mathbf{r} ponendo le forze attive uguali a zero ed applicando poi l'operatore δ . Si ottiene (passo IV):

$$\delta\sigma_x = \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1 \end{Bmatrix} \delta\chi_1; \quad \delta Y_{Ax} = \frac{1}{2l} \delta\chi_1$$

Sostituendo nell'*ELVC* e raccogliendo si ha (passo V):

$$\left(\frac{3}{cl^2} \chi_1 + 2 \frac{p}{c} - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{l} + \frac{s}{2l} \right) \delta\chi_1 = 0 \quad \forall \delta\chi_1$$

Si riottiene così l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 19.

5.7 La formulazione variazionale della congruenza: il teorema di stazionarietà dell'energia complementare totale

La formulazione variazionale della congruenza di un sistema vincolato richiede la definizione di una nuova grandezza: l'energia complementare totale (*ECT*). Essa è definita come somma dell'energia complementare elastica Ψ e del lavoro, cambiato di segno, compiuto dalle reazioni vincolari nei cedimenti associati:

$$V(\sigma, \mathbf{r}) = \Psi(\sigma) - \mathbf{r}^T \mathbf{s} \quad (76)$$

Poiché in presenza di deformazioni anelastiche, $\Psi(\sigma)$ assume l'espressione (6.67), è:

$$V(\sigma, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{H} \sigma + \sigma^T \bar{\varepsilon} - \mathbf{r}^T \mathbf{s} \quad (77)$$

Limitandosi a considerare stati equilibrati è

$$\sigma = \sigma_0 + \hat{\mathbf{S}} \chi, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{R}} \chi \quad (78)$$

per cui l'*ECT* si scrive:

$$\begin{aligned} V(\chi) &= \frac{1}{2} \chi^T \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{H} \hat{\mathbf{S}} \chi + \chi^T [\hat{\mathbf{S}}^T (\mathbf{H} \sigma_0 + \bar{\varepsilon}) - \hat{\mathbf{R}}^T \mathbf{s}] + V(0) \\ &= \frac{1}{2} \chi^T \hat{\mathbf{F}} \chi + \chi^T [\eta_0 + \bar{\eta} + \eta_s] + V(0) \end{aligned} \quad (79)$$

avendo usato le (72), con $V(0)$ costante inessenziale. Imponendo che sia $\delta V = 0 \quad \forall \delta\chi$, si riottiene la (71). Si noti che l'equazione $\delta V = 0 \quad \forall \delta\chi$ coincide con l'*ELVC* (75), come si era già notato per i sistemi non vincolati (Osservazione 6.28). In definitiva, per i sistemi vincolati, vale il seguente teorema, analogo a quello dell'energia complementare elastica, valido per i sistemi non vincolati.

Teorema di stazionarietà dell'energia complementare totale: CNES per la congruenza di un sistema elastico vincolato è che l'energia complementare totale sia stazionaria nell'insieme degli stati tenso-reattivi equilibrati. Nello stato congruente l'energia complementare totale assume un minimo isolato.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema dell'*ECE*. Il teorema di stazionarietà dell'*ECT* costituisce uno strumento operativo alternativo all'*ELVC* per ricavare, nello spirito del metodo delle forze, le equazioni di congruenza del sistema: esso costituisce la formulazione variazionale della congruenza.

Nelle applicazioni occorre procedere come segue:

- I. Si scrive l'espressione dell'*ECT*, sommando le energie complementari elastiche di tutti gli organi e il lavoro, cambiato di segno, che le reazioni compiono nei corrispondenti cedimenti assegnati.
- II. Si studia l'equilibrio del sistema e si esprimono le tensioni negli organi e le reazioni dei vincoli in funzione delle incognite iperstatiche.
- III. Si impone la stazionarietà di V . Le derivate parziali di V rispetto alle incognite iperstatiche, eguagliate a zero, costituiscono le equazioni di congruenza in termini di incognite iperstatiche.

Esercizio 23: Si risolva il problema elastico relativo al sistema dell'Esercizio 19 applicando il teorema dell'*ECT*.

L'*ECT* del sistema è (passo I):

$$V = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{c} + \sigma_1 \bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^2}{c} + \frac{\mu_3^2}{cl^2} \right) - Y_A(-s)$$

Il generico stato di tensione equilibrato è (passo II):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} pl \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \chi_1 \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad Y_A = \frac{\chi_1}{2l}$$

avendo scelto $\chi_1 = \mu_3$, come negli Esercizi 19, 20 e 22. L'*ECT* si scrive dunque:

$$V = \frac{1}{2c} \left(-\frac{1}{2} pl - \frac{\chi_1}{l} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} pl - \frac{\chi_1}{l} \right) \bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2c} \left(\frac{3}{2} pl + \frac{\chi_1}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\chi_1^2}{cl^2} + \frac{1}{2} \frac{s}{l} \chi_1$$

Eguagliando a zero la derivata di V rispetto a χ_1 si ha (passo III):

$$\frac{3}{cl^2} \chi_1 + 2 \frac{p}{c} - \frac{\bar{\varepsilon}_1}{l} + \frac{s}{2l} = 0$$

riottenendo così l'equazione di compatibilità cinematica dell'Esercizio 19.

Sistemi piani di travi elastiche

1. Modelli discreti di sistemi di travi

1.1 Strutture reticolari e telai

Sistemi elastici di notevole interesse applicativo sono le *strutture reticolari* ed i *telai*. Una struttura reticolare è un sistema costituito da travi non necessariamente rettilinee, mutuamente incernierate alle estremità, collegate al suolo da cerniere e/o carrelli (Fig. 1a). Un telaio è un sistema costituito da travi non necessariamente rettilinee, vincolate alle estremità in modo generico, mutuamente ed al suolo; qui ci si limita a considerare vincoli interni di solo incastro, mentre i vincoli esterni sono generici (Fig. 1b). In seguito, per semplicità, tutti i sistemi sono considerati piani con tutte le aste rettilinee.

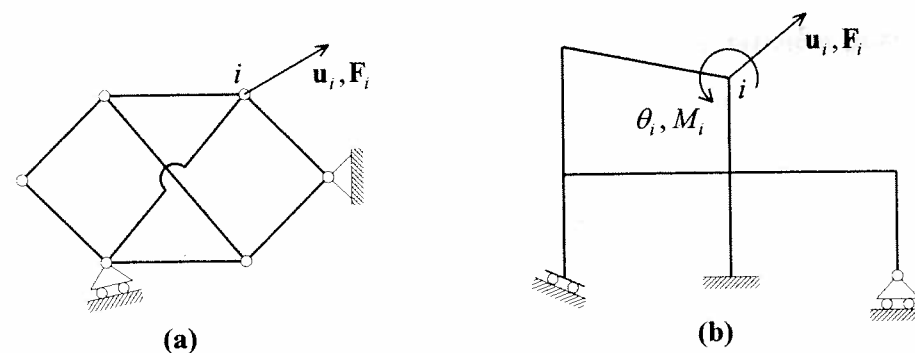


Fig. 1 (a) Sistema reticolare piano, (b) telaio piano

1.2 Sistemi di corpi puntiformi

Lo studio del comportamento cinematico, statico ed elastico dei sistemi di travi risulta particolarmente agevole sotto alcune ipotesi restrittive (si veda poi l'Osservazione 1). Nel modellare il sistema fisico, invece di considerare la struttura come costituita da corpi (le travi) tra loro collegati da vincoli puntiformi (in corrispondenza dei nodi), è opportuno riguardare il sistema come *costituito da corpi puntiformi* (i nodi) *tra loro collegati da organi elastici monodimensionali* (le travi). In questo modo il sistema continuo (in quanto costituito da travi deformabili) è reso discreto. Infatti la generica configurazione congruente è descritta dai soli spostamenti dei nodi, quindi da un numero finito di parametri, anziché dalle funzioni spostamento delle travi. Inoltre, il problema duale dell'equilibrio è governato dalle equazioni cardinali della statica (quindi da equazioni algebriche) scritte per i singoli corpi puntiformi, anziché per il generico elemento infinitesimo di continuo deformabile (quindi da equazioni differenziali). Per questo motivo i sistemi di travi, reticolari o telai, sono detti *sistemi continui naturalmente discreti*, per distinguerli dai sistemi la cui discretizzazione implica una qualche approssimazione.

- **Osservazione 1.** Esiste comunque una limitazione alla possibilità di considerare un sistema di travi come discreto. *Non è infatti possibile applicare forze alle travi*, ma solo ai suoi nodi (cioè sui corpi che costituiscono il sistema, come illustrato in Fig. 1). In caso contrario occorre trattare le travi direttamente come sistemi continui monodimensionali, ed integrare le equazioni differenziali ad esse relative.
- **Osservazione 2.** In realtà le equazioni della trave sono già state integrate (anche se non in questa sede) per ricavare le costanti elastiche del legame costitutivo dell'organo (si veda il Par. 4.6.4). Questa operazione, comunque, è stata fatta una volta per tutte, nell'ipotesi che la trave sia sollecitata solo alle estremità. L'operazione può ovviamente essere eseguita anche in presenza di forze distribuite o concentrate in punti interni al dominio, *ma va ripetuta in ogni caso specifico*, e soprattutto conduce a legami costitutivi non omogenei che dipendono dai carichi, oltre che dalle caratteristiche elastiche e geometriche della trave.

1.3 Nodi orientati e non orientati

Ogni corpo puntiforme ha nel piano tre *g.d.l.*, due traslazioni ed una rotazione. Tuttavia, nel caso dei sistemi reticolari, sussiste un'ulteriore semplificazione. Siccome i nodi sono incernierati alle travi (Fig. 2a), questi possono liberamente ruotare rispetto a quelle. Esistono perciò nel sistema degli *spostamenti rigidi*, che consistono nelle rotazioni di tutti i nodi, ai quali sono associate deformazioni nulle delle travi: il sistema è pertanto labile (o degenere). Per rimuovere la labilità è necessario eliminare le rotazioni dagli spostamenti generalizzati. Questa operazione può facilmente essere compiuta considerando i nodi di un sistema reticolare come *punti materiali non dotati di orientazione*, suscettibili cioè di sole traslazioni. Ogni nodo ha perciò nel piano solo due *g.d.l.*. Quale ulteriore conseguenza, le deformazioni nelle travi consistono

nel solo allungamento (cioè deformazioni a taglio e curvature sono nulle, si veda il Par. 4.6.4); le corrispondenti tensioni sono rappresentate dal solo sforzo normale (cioè taglio e momento flettente si annullano). In definitiva *le travi sono equivalenti a molle estensionali* (e per questo sono anche dette *aste*); esse applicano ai nodi forze interne dirette secondo la congiungente i nodi.

- **Osservazione 3.** In un sistema reticolare è possibile applicare ai nodi solo forze (cioè le grandezze duali delle traslazioni, Fig. 1a), ma non coppie. Infatti le forze interne trasmesse dalle aste, tutte concorrenti nel nodo, non possono equilibrare le coppie.

In un telaio, invece, le travi sono incastrate ai nodi puntiformi (Fig. 2b), cosicché deformazioni e tensioni dipendono dalle rotazioni dei nodi stessi, oltre che dalle traslazioni. Perciò, *in un telaio i nodi sono costituiti da corpi puntiformi dotati di orientazione*, suscettibili cioè di traslazioni e rotazioni. Le travi applicano ai nodi forze interne in tutte le direzioni del piano, nonché coppie interne.

- **Osservazione 4.** In un telaio è possibile applicare ai nodi sia forze che coppie (cioè le grandezze duali di traslazioni e rotazioni, Fig. 1b); infatti le forze interne trasmesse dalle travi possono equilibrare un sistema generico di forze.

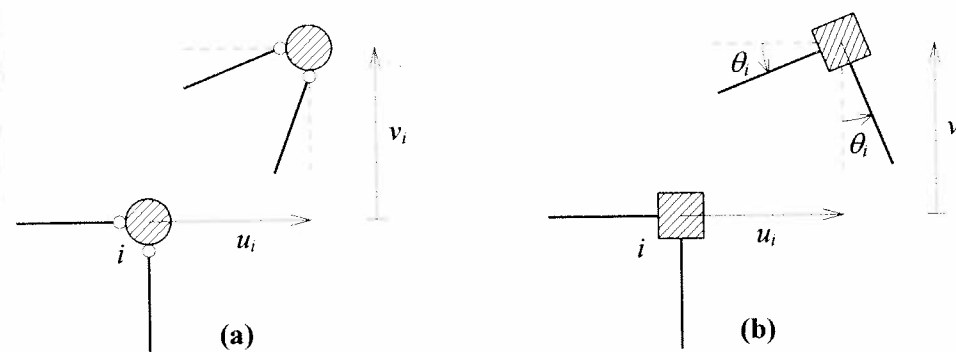


Fig. 2 (a) Nodo puntiforme non orientato (indicato con un cerchio); (b) nodo puntiforme orientato (indicato con un quadrato)

2. Strutture reticolari elastiche

2.1 Il sistema

Si consideri un sistema reticolare piano costituito da d travi ed n_c nodi (Fig. 3). Per quanto detto in precedenza, il sistema può essere considerato costituito da n_c corpi puntiformi non dotati di orientazione, collegati da d molle estensionali. Siano poi presenti nel sistema m vincoli esterni semplici che limitano le sole traslazioni dei nodi (quindi cerniere o carrelli). Il sistema sia sottoposto a forze applicate esclusivamente ai nodi, a deformazioni estensionali assegnate e a cedimenti vincolari. Si vogliono formulare i problemi cinematico, statico ed elastico.

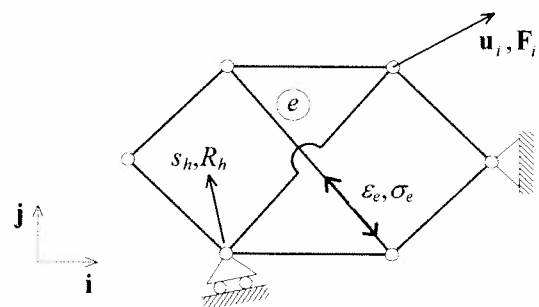


Fig. 3 Sistema reticolare piano: forze e spostamenti nodali; deformazioni e tensioni nelle aste cedimenti e reazioni dei vincoli esterni

2.2 Il problema cinematico

Si consideri dapprima il sistema non vincolato al suolo. La generica configurazione variata è descritta dal vettore degli spostamenti (generalizzati) $2n_c \times 1$

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ v_1 \ \dots \ u_i \ v_i \ \dots \ u_{n_c} \ v_{n_c}\}^T \quad (1)$$

dove u_i, v_i sono le componenti dello spostamento del nodo i nella base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) ; il sistema ha perciò $n=2n_c$ g.d.l.. Lo stato di deformazione è descritto dal vettore $d \times 1$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1 \ \dots \ \varepsilon_e \ \dots \ \varepsilon_d\}^T \quad (2)$$

che elenca le deformazioni estensionali ε_e delle aste. Deformazioni e spostamenti sono legati da equazioni di congruenza che esprimono l'allungamento delle aste in funzione degli spostamenti dei nodi; la generica equazione relativa all'asta e che collega i nodi i e j è (Fig. 4):

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{e}_e \\ &= (u_j \cos \alpha_e + v_j \sin \alpha_e) - (u_i \cos \alpha_e + v_i \sin \alpha_e) \quad (e = 1, 2, \dots, d) \end{aligned} \quad (3)$$

dove \mathbf{e}_e è il versore dell'asta e , orientato dal nodo i al nodo j , di componenti $\cos \alpha_e$ e $\sin \alpha_e$. Le (3) si scrivono

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (4)$$

in cui la matrice di congruenza \mathbf{D} ha dimensioni $d \times n$.

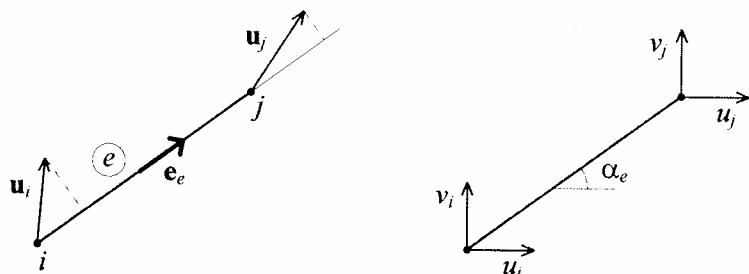


Fig. 4 Spostamenti dei nodi di estremità di un'asta

Si considerino ora i vincoli esterni. Con riferimento ad una biella h collegata al nodo i (Fig. 5), la relazione di vincolo è

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_h = s_h \quad (h=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

ovvero

$$u_i \cos \beta_h + v_i \sin \beta_h = s_h \quad (h=1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

dove \mathbf{e}_h è il versore della biella h entrante nel nodo, di componenti $\cos \beta_h$ e $\sin \beta_h$.

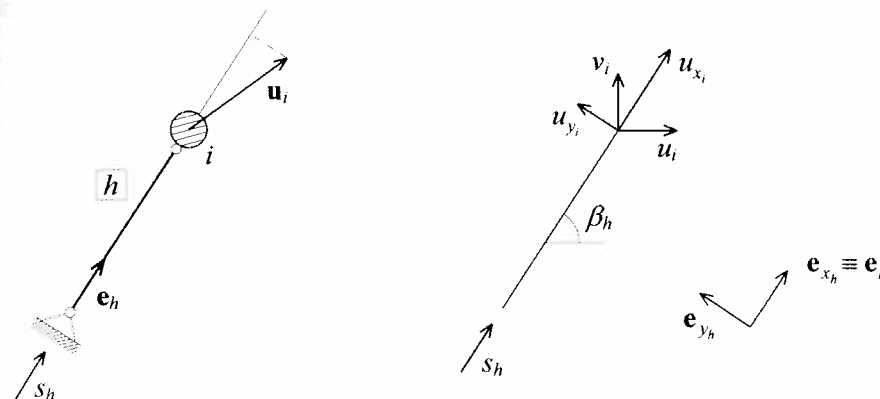


Fig. 5 Vincolo esterno

• **Osservazione 5.** Il versore \mathbf{e}_h relativo alla biella, può essere assunto sempre entrante nel nodo. Il versore \mathbf{e}_e relativo all'asta, orientato dal nodo i al nodo j (ad esempio con $i < j$, in accordo all'Osservazione 5.3) è entrante in j , ma uscente da i .

Le (6) si scrivono:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{s} \quad (7)$$

in cui la matrice dei vincoli \mathbf{A} ha dimensioni $m \times n$. Le (4) e (7), insieme, costituiscono la formulazione (estesa) del problema cinematico

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Condizione necessaria perché il problema (8) sia determinato è che la matrice dei coefficienti sia quadrata, cioè che sia

$$m + d = 2n_c \quad (9)$$

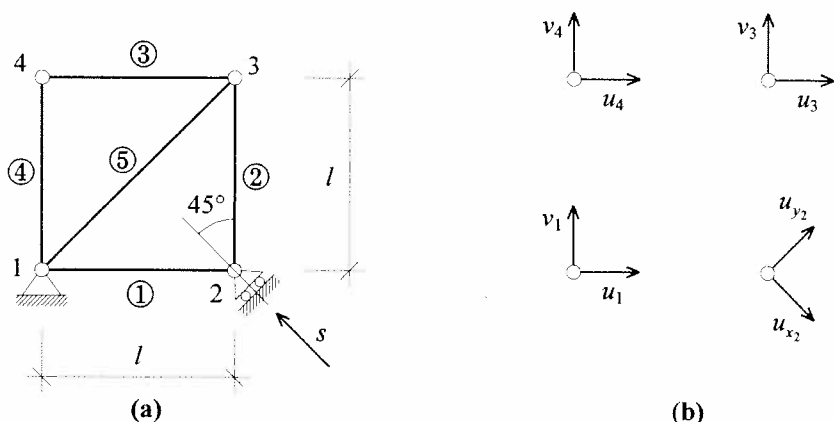
Per ottenere la forma lagrangiana del problema cinematico si può procedere come descritto nel Par. 7.2.1. Tuttavia, si perviene più facilmente allo stesso risultato se si procede come segue. Si consideri prima il caso in cui la biella h è orientata secondo uno dei due versori della base; sia ad esempio $\beta_h = 0$. La condizione di vincolo (6) si scrive dunque semplicemente $u_i = s_h$, che può essere sostituita direttamente nelle equazioni di congruenza (3), eliminando così la variabile u_i . Se tutte le condizioni di vin-

colo sono di questo tipo le equazioni (4), così modificate, si scrivono:

$$\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (10)$$

dove \mathbf{q} elenca le componenti di spostamento dei nodi non vincolati ed $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ le deformazioni dovute ai cedimenti vincolari. Nel caso generale in cui $\beta_h \neq (0, \pi/2)$ è opportuno scegliere per i nodi vincolati una base locale intrinseca alla biella $\mathbf{e}_{x_h}, \mathbf{e}_{y_h}$ su cui proiettare le componenti di spostamento di \mathbf{u}_i (Fig. 5), in modo da esprimere la condizione di vincolo ancora nella forma $u_{x_i} = s_i$. L'esercizio che segue esemplifica il procedimento.

Esercizio 1: Con riferimento al sistema in Fig. (a), si scrivano le equazioni di congruenza.



Si ha $n_c=4$, per cui il sistema, privato dei vincoli, ha $n=8$ g.d.l. Si hanno poi $d=5$ aste e $m=3$ vincoli, per cui la (9) è soddisfatta. Si può riconoscere (si veda poi l'Osservazione 6) che il sistema è cinematicamente determinato. Si scelgono gli spostamenti generalizzati di Fig. (b), utilizzando per il solo nodo 2 una base locale, intrinseca al vincolo. Le equazioni di congruenza si scrivono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (u_{x_2} + u_{y_2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - u_1, & \varepsilon_2 &= v_3 - (u_{y_2} - u_{x_2}) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon_3 &= u_3 - u_4, & \varepsilon_4 &= v_4 - v_1, & \varepsilon_5 &= (u_3 + v_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - (u_1 + v_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (a)$$

Le condizioni di vincolo sono:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad u_{x_2} = -s \quad (b)$$

per cui le condizioni di congruenza diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{\sqrt{2}}{2}u_{y_2}, & \varepsilon_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}u_{y_2} + v_3 \\ \varepsilon_3 &= u_3 - u_4, & \varepsilon_4 &= v_4, & \varepsilon_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 \end{aligned} \quad (c)$$

Esse sono del tipo (10), dove $\mathbf{q} = \{u_{y_2}, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \{-\sqrt{2}s/2, -\sqrt{2}s/2, 0, 0, 0\}^T$.

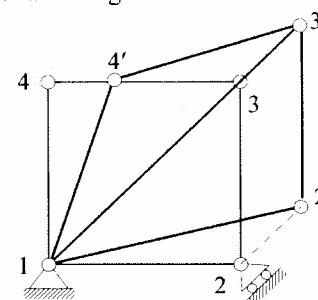
Esercizio 2: Si determini la configurazione variata del sistema reticolare dell'Esercizio 1 quando le aste 1 e 5 sono soggette a variazione termica uniforme $+\Delta T$. Detto α il coefficiente di dilatazione termica del materiale di cui sono costituite le aste, l'allungamento delle stesse è:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \alpha \Delta T, \quad \bar{\varepsilon}_5 = \alpha \sqrt{2} \Delta T$$

Risolviendo le (c) con $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_5 = \bar{\varepsilon}_5$ si trova

$$u_{y_2} = \alpha \sqrt{2} \Delta T, \quad u_3 = \alpha \Delta T, \quad v_3 = \alpha \Delta T, \quad u_4 = \alpha \Delta T, \quad v_4 = 0$$

La configurazione variata è illustrata in figura.



• **Osservazione 6.** È facile dimostrare che un sistema reticolare a maglie triangolari è cinematicamente determinato per vincoli interni. Con riferimento al sistema dell'Esercizio 1, fissata la posizione dei nodi 1 e 2 collegati dall'asta (1,2), la posizione del nodo 3 è determinata dalla lunghezza delle aste (1,3) e (2,3) che chiudono la prima maglia. Quindi, assegnata la lunghezza delle aste (3,4) ed (1,4) della seconda maglia, è univocamente determinata la posizione del nodo 4; analogamente per eventuali altre maglie. La configurazione del sistema è dunque unica. Alla struttura, comunque, restano tre g.d.l., corrispondenti alle posizioni inizialmente assunte per i nodi 1 e 2 (quattro coordinate che devono però soddisfare la condizione che la mutua distanza sia pari alla lunghezza dell'asta (1,2)). I tre g.d.l. corrispondono agli spostamenti rigidi del sistema (due traslazioni ed una rotazione), che possono essere soppressi con opportuni vincoli esterni, come ad esempio fatto per la struttura dell'Esercizio 1. Alternativamente, riguardando il sistema come costituito da aste rigide incernierate, si riconosce nel sistema un anello a tre cerniere (la prima maglia) ed un arco a tre cerniere, disposto in serie. Si conclude che il sistema è cinematicamente determinato per vincoli interni.

2.3 Il problema statico

Sul sistema reticolare agiscano le forze attive $\mathbf{F}_i = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}$, applicate ai nodi. Il vettore delle forze (generalizzate) $n \times 1$ è quindi

$$\mathbf{f} = \{X_1 \ Y_1 \ \dots \ X_n \ Y_n \ \dots \ X_{n_c} \ Y_{n_c}\}^T \quad (11)$$

Lo stato di tensione nelle aste è rappresentato dal vettore $d \times 1$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1 \ \dots \ \sigma_e \ \dots \ \sigma_d\}^T \quad (12)$$

che elenca gli sforzi normali σ_e nelle aste. Lo stato reattivo è descritto dal vettore

$$\mathbf{r} = \{R_1 \dots R_h \dots R_m\}^T \quad (13)$$

che elenca le reazioni vincolari R_h degli m vincoli semplici.

Le condizioni di equilibrio sono espresse dalle equazioni cardinali della statica scritte per i corpi puntiformi. Poiché le forze sono tutte applicate nel medesimo punto, le equazioni di equilibrio alla rotazione sono identicamente soddisfatte. Quelle di equilibrio alla traslazione si scrivono, con riferimento al nodo i (Fig. 6a):

$$\mp \sum_e \sigma_e \mathbf{e}_e + \sum_h R_h \mathbf{e}_h + \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (14)$$

dove la sommatoria di indice e è estesa a tutte le aste concorrenti nel nodo i e la sommatoria di indice h è estesa agli eventuali vincoli applicati in i . Nella (14) deve assumersi il segno negativo quando \mathbf{e}_e è entrante nel nodo ed il segno positivo quando è uscente (si veda la Fig. 6a dove sono rappresentati entrambi i casi); \mathbf{e}_h è assunto sempre entrante.

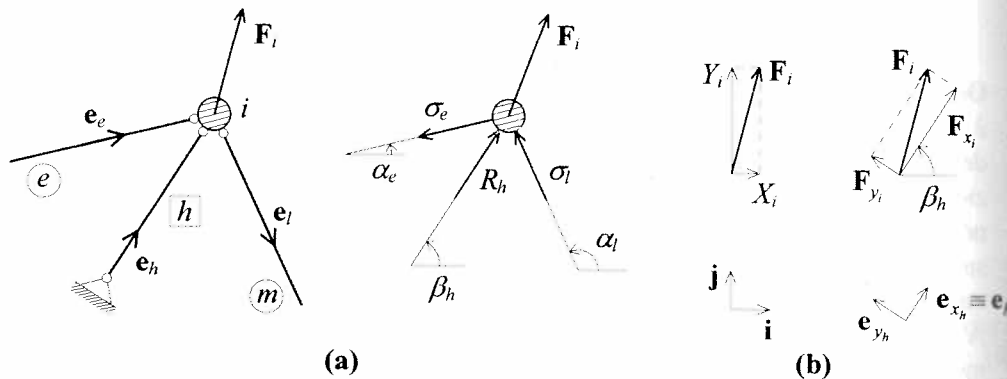


Fig. 6 (a) Equilibrio di un nodo non orientato; (b) componenti delle forze nodali nelle basi globale e intrinseca al vincolo

Proiettando le (14) nella base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) (Fig. 6b) si ha:

$$\begin{aligned} \mp \sum_e \sigma_e \cos \alpha_e + \sum_h R_h \cos \beta_h + X_i &= 0 \\ \mp \sum_e \sigma_e \sin \alpha_e + \sum_h R_h \sin \beta_h + Y_i &= 0 \end{aligned} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (15)$$

Le (15) costituiscono la formulazione (estesa) del problema statico

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{E}] \begin{Bmatrix} -\mathbf{r} \\ \sigma \end{Bmatrix} = \mathbf{f} \quad (16)$$

Condizione necessaria perché il problema (16) sia determinato è che valga la (9).

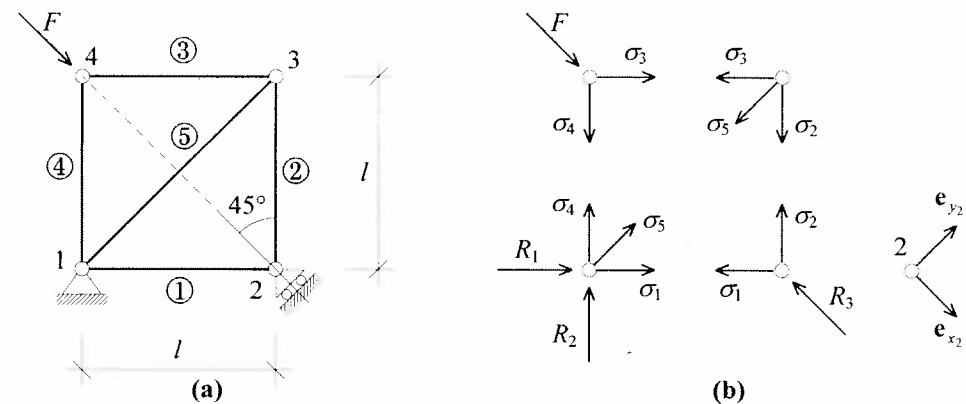
Per ottenere la forma lagrangiana del problema statico si può procedere come descritto nel Par. 7.3.1. Tuttavia, nel problema in esame, è più semplice operare come segue. Si consideri prima il caso in cui la biella h è orientata secondo uno dei due ver-

sori della base; sia ad esempio $\beta_h=0$. R_h compare dunque solo nell'equazione (15₁), non nella (15₂); è sufficiente allora scartare la (15₁). Se tutte le reazioni sono di questo tipo le equazioni (15), così modificate, si scrivono

$$\hat{\mathbf{E}} \sigma = \mathbf{p} \quad (17)$$

dove \mathbf{p} elenca le forze attive agenti nelle direzioni non vincolate. Nel caso generale in cui $\beta_h \neq (0, \pi/2)$, è opportuno scegliere per i nodi vincolati la base locale $\mathbf{e}_{x_h}, \mathbf{e}_{y_h}$ intrinseca alla biella su cui proiettare le equazioni di equilibrio (14) (Fig. 6b), in modo da individuare immediatamente l'equazione che contiene la reazione R_h . L'esercizio che segue esemplifica il procedimento.

Esercizio 3: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si determini lo stato di tenso-reazione.



Il sistema è il medesimo dell'Esercizio 1. Assunte le tensioni e le reazioni positive come in Fig. (b), per ciascun nodo si scrivono due equazioni di equilibrio. Per i nodi 1, 3 e 4, proiettando le forze secondo l'orizzontale e la verticale si ha:

$$\begin{aligned} \text{nodo 1: } \sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 + R_1 &= 0, & \sigma_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 + R_2 &= 0 \\ \text{nodo 3: } -\sigma_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 &= 0, & -\sigma_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 &= 0 \\ \text{nodo 4: } \sigma_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} F &= 0, & -\sigma_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} F &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Per il nodo 2 è conveniente proiettare le forze nel riferimento intrinseco:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_2 - R_3 = 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_2 = 0 \quad (b)$$

Le equazioni lagrangiane di equilibrio sono quelle che non contengono le reazioni vincolari: le (a₃)÷(a₆) e la (b₂). Risolvendole si ha:

$$\sigma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_5 = F \quad (c)$$

Sostituendo le tensioni, ormai note, nelle tre equazioni prima scartate si ottengono le reazioni vincolari:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = F \quad (d)$$

Le aste 1-4 sono compresse, l'asta 5 è tesa; la soluzione è simmetrica rispetto all'asse di applicazione della forza.

- **Osservazione 7.** Confrontando le soluzioni degli Esercizi 1 e 3, si rileva il soddisfacimento delle proprietà di dualità. Si noti che i riferimenti intrinseci al vincolo applicato al nodo 2 sono stati scelti equiversi.

2.4 Metodi strategici di soluzione del problema statico

Spesso le equazioni di equilibrio di un sistema reticolare hanno una matrice dei coefficienti triangolare a blocchi di dimensione 2×2 . È allora possibile risolvere le prime due equazioni in due incognite, sostituire la soluzione in una seconda coppia di equazioni e ricavare altre due incognite, e così via. Il procedimento è analogo a quello visto nel Par. 2.4, e si colloca quindi nella classe dei metodi strategici di soluzione. A differenza dei sistemi generici, però, non è possibile scrivere delle equazioni in cui compaia una sola nuova incognita ma occorre scrivere *coppie* di equazioni.

Esercizio 4: Indicare una strategia di soluzione per il sistema dell'Esercizio 3.

Si applica la seguente strategia:

$$\sum_4 \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow (\sigma_3, \sigma_4), \quad \sum_3 \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow (\sigma_2, \sigma_5)$$

$$\sum_2 \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow (\sigma_1, R_3), \quad \sum_1 \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow (R_1, R_2)$$

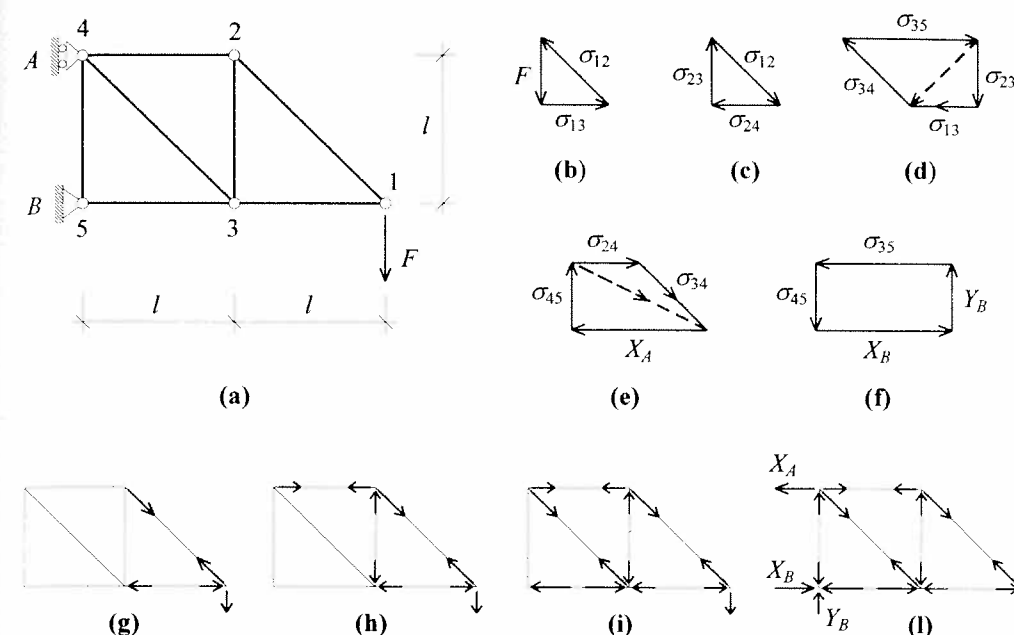
- **Osservazione 8.** Come l'Esercizio 4 ha messo in evidenza, affinché si possa applicare il metodo strategico ad una struttura reticolare, *deve essere presente un nodo in cui concorrono due sole aste* (ad esempio il nodo 4 nell'Esercizio 3).

Il metodo strategico è anche suscettibile di una interpretazione grafica, basata sul tracciamento del poligono delle forze agenti sui nodi. Il metodo si sviluppa come segue:

- Si individua (se esiste) un nodo in cui concorrono *due* sole aste; si traccia il triangolo delle forze e si determinano i due sforzi normali.
- Sullo schema della struttura si riportano le forze interne agenti sul nodo, nonché quelle, uguali ed opposte, agenti sui nodi opposti delle due aste.
- Si cerca un nodo, adiacente al primo, in cui concorrono *tre* aste (oppure due aste ed una reazione vincolare) di cui però sia noto uno sforzo, in quanto già determinato. Si traccia il poligono delle forze e si determinano le *due* nuove incognite. Si ritorna quindi al passo II.

Il procedimento è del tutto equivalente a quello analitico prima illustrato. L'esercizio che segue lo esemplifica.

Esercizio 5: Si determini, con il metodo grafico, lo stato tenso-reattivo agente nel sistema reticolare in Fig. (a).



Si impone dapprima l'equilibrio del nodo 1, in cui concorrono le sole aste (1,2) ed (1,3) (passo I). Per ottenere il poligono delle forze agenti sul nodo 1 si procede come illustrato in Fig. (b): dagli estremi del vettore che rappresenta F si riportano le rette parallele alle aste (1,2) ed (1,3). Ottenuto il triangolo, si determina il verso di σ_{12} e σ_{13} in modo tale che la somma vettoriale delle tre forze sia zero (le tre frecce individuano un unico verso di percorrenza); quindi si riportano queste frecce con il loro verso in Fig. (g) (passo II), insieme alle forze, uguali ed opposte, agenti sui nodi opposti. Attribuendo segno positivo agli sforzi di trazione (forze *uscanti* dal nodo) si ha:

$$\sigma_{13} = -F, \quad \sigma_{12} = \sqrt{2}F$$

Si procede quindi (passo III) ad equilibrare il nodo 2, dove σ_{12} è ormai nota. Dal triangolo delle forze in Fig. (c) si ha:

$$\sigma_{23} = -F, \quad \sigma_{24} = F$$

Si aggiungono quindi le tensioni trovate, nonché quelle uguali ed opposte, alle tensioni precedentemente determinate in Fig. (g); si ottiene la situazione illustrata in Fig. (h). Nel nodo 3 ora si hanno due forze note, σ_{13} e σ_{23} , e due incognite, σ_{34} e σ_{35} . La somma vettoriale delle prime due è indicata in Fig. (d) con una freccia tratteggiata; costruendo il triangolo, si determinano le tensioni σ_{34} e σ_{35} in modulo e verso. Si trova:

$$\sigma_{34} = \sqrt{2}F, \quad \sigma_{35} = -2F$$

Le tensioni sino ad ora note sono indicate in Fig. (i). Dall'equilibrio del nodo 4=A si ricavano σ_{45} ed X_A (Fig. e):

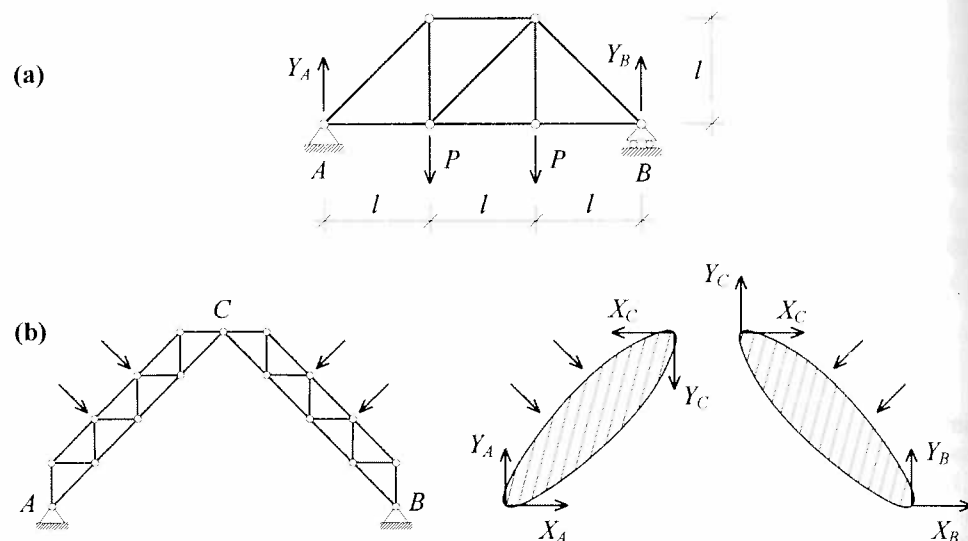
$$\sigma_{45} = -F, \quad X_A = -2F$$

rappresentate in Fig. (l). Infine, dall'equilibrio del nodo B (Fig. f) si ha:

$$X_B = 2F, \quad Y_B = F$$

- **Osservazione 9.** Può accadere che gli unici nodi in cui concorrono due aste siano sollecitati non da forze attive, bensì da reazioni vincolari. Anche in questo caso è possibile applicare un metodo strategico (analitico o grafico) se si determinano preliminarmente una (o più) reazioni vincolari, imponendo l'equilibrio dell'intera struttura, trattando cioè il sistema come un unico (o più) corpi rigidi. Le equazioni cardinali della statica che si utilizzano sono infatti combinazioni lineari di quelle, linearmente indipendenti, che assicurano l'equilibrio dei singoli nodi.

Esercizio 6: Si applichi l'Osservazione 9 ai sistemi in Fig. (a) e Fig. (b).



(a) Dall'equilibrio alla rotazione dell'intero sistema rispetto al punto A si ricava Y_B :

$$-Pl - 2Pl + 3Y_B l = 0 \Rightarrow Y_B = P$$

Poiché in B concorrono solo due aste, essendo ormai nota Y_B , si può procedere come negli Esercizi 4 e 5.

(b) La struttura è schematizzata come un arco a tre cerniere reticolare, se si riguardano le sottostrutture AC e BC come corpi rigidi. Determinate le reazioni in A, B e C (o almeno alcune di esse), dove concorrono due sole aste per ciascun corpo, si può applicare il metodo strategico di equilibrio dei nodi.

2.5 Il problema elastico

Con riferimento alla Fig. 3, assegnate le forze \mathbf{F}_i applicate ai nodi, i cedimenti vincolari s_h , e le deformazioni anelastiche $\bar{\varepsilon}_e$, si vogliono determinare gli spostamenti generalizzati \mathbf{u}_i , le deformazioni ε_e , le tensioni σ_e e le reazioni vincolari R_h . Il problema è governato da:

- (a) d equazioni di congruenza (3) ed m relazioni di vincolo (6), che costituiscono la forma estesa (8) del problema cinematico;
- (b) $n=2n_c$ equazioni di equilibrio (15), che costituiscono la forma estesa (16) del problema statico;

(c) d equazioni di legame del tipo:

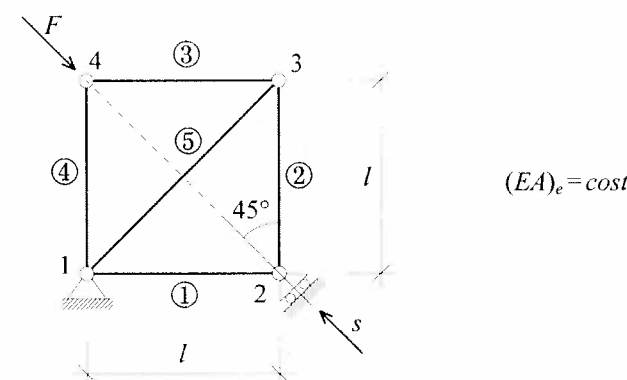
$$\sigma_e = c_e (\varepsilon_e - \bar{\varepsilon}_e) \quad (e = 1, 2, \dots, d) \quad (18)$$

dove c_e è la rigidezza assiale dell'asta e -esima $(c_a)_e = (EA/l)_e$ (si veda il Par. 4.6.4). Le (18) esprimono il legame elastico nella forma non omogenea (4.43), $\sigma = \mathbf{C}(\varepsilon - \bar{\varepsilon})$.

Complessivamente si hanno $2d+n+m$ equazioni in altrettante incognite. Se i problemi cinematico e statico sono formulati nella forma lagrangiana, così come illustrato nei Par. 2.2 e 2.3, si può allora risolvere un problema ridotto $(2d+n-m) \times (2d+n-m)$ in cui sono stati eliminati m spostamenti ed m reazioni vincolari; queste ultime possono essere determinate successivamente.

Applicando i principi generali e le metodologie già descritte nei Cap. 6 e 7, nel seguito si presentano alcune applicazioni, sia del metodo degli spostamenti che delle forze, limitatamente all'approccio diretto.

Esercizio 7: Applicando il metodo degli spostamenti, si risolva il problema elastico relativo al sistema reticolare in figura.



Il sistema è già stato studiato nell'Esercizio 1 (problema cinematico) e nell'Esercizio 3 (problema statico). Qui si riscrivono le equazioni di congruenza negli spostamenti lagrangiani $\mathbf{q} = \{u_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T$:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{\sqrt{2}}{2}u_2, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}s - \frac{\sqrt{2}}{2}u_2 + v_3 \quad (a)$$

$$\varepsilon_3 = u_3 - u_4, \quad \varepsilon_4 = v_4, \quad \varepsilon_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_3$$

e le equazioni lagrangiane di equilibrio

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_5 = 0, \quad \sigma_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_5 = 0, \quad -\sigma_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad \sigma_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad (b)$$

Il problema elastico è completato dalle equazioni di legame. Posto $c = EA/l$, è

$$c_e = c \quad (e = 1, \dots, 4), \quad c_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}c \quad (c)$$

per cui si ha:

$$\sigma_1 = c\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = c\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = c\varepsilon_3, \quad \sigma_4 = c\varepsilon_4, \quad \sigma_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} c\varepsilon_5$$

Sostituendo le (a) nelle (d) si ottengono le tensioni in termini dei parametri lagrangiani

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} c(u_{y_2} - s), \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} c(-u_{y_2} + \sqrt{2}v_3 - s),$$

$$\sigma_3 = c(u_3 - u_4), \quad \sigma_4 = cv_4, \quad \sigma_5 = \frac{1}{2} c(u_3 + v_3)$$

che sostituite nelle (b) forniscono

$$cu_{y_2} - \frac{\sqrt{2}}{2} cv_3 = 0, \quad \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) cu_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} cv_3 - cu_4 = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} cu_{y_2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) cv_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} cu_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} cs = 0,$$

$$c(u_4 - u_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad cv_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

Risolvendo le (f) si determina la configurazione equilibrata:

$$u_{y_2} = -\frac{F}{c}, \quad u_3 = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{F}{c}, \quad v_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F}{c}, \quad u_4 = \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \frac{F}{c}, \quad v_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F}{c} \quad (g)$$

Sostituendo le (g) nelle (e) si ottiene lo stato di tensione:

$$\sigma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad \sigma_5 = F \quad (h)$$

Si noti che, essendo il sistema isostatico, lo stato di tensione *non dipende* dal cedimento s . Per trovare le reazioni vincolari occorre far uso delle due equazioni di equilibrio del nodo 1 e dell'equazione di equilibrio del nodo 2 relativa alla direzione vincolata. Esse sono (Eq. a₁, a₂, e b₁ dell'Esercizio 3):

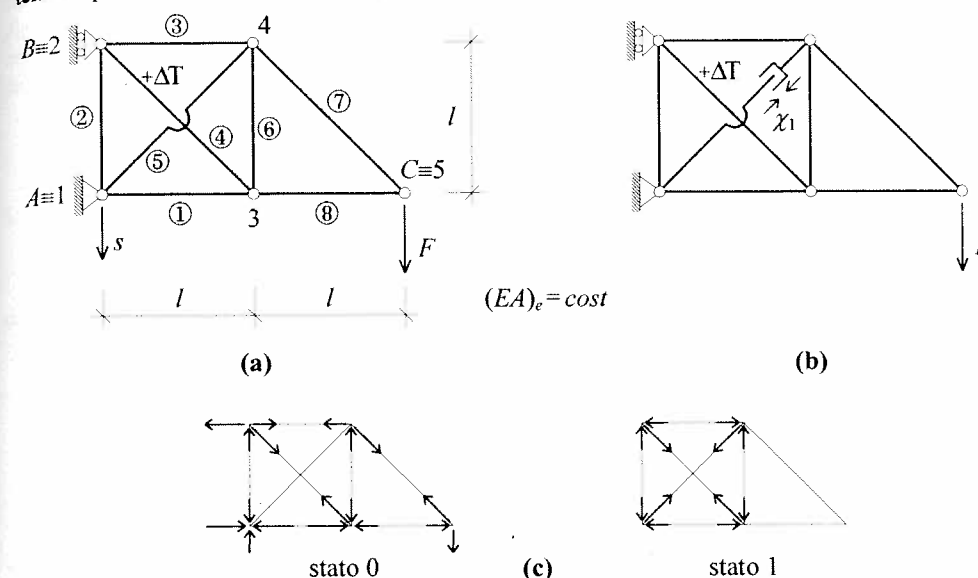
$$\sigma_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 + R_1 = 0, \quad \sigma_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_5 + R_2 = 0, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_2 - R_3 = 0, \quad (i)$$

Sostituendo alle tensioni i valori trovati e risolvendo si trova:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = F \quad (l)$$

Tensioni (h) e reazioni (l) coincidono con quelle trovate nell'Esercizio 3 in base a sole condizioni di equilibrio.

Esercizio 8: Applicando il metodo delle forze, si risolve il problema elastico in Fig. (a). Si determini poi l'abbassamento v_c del punto C.



Il sistema è una volta iperstatico ($r=1$). Se infatti si disconnette una delle due diagonali (asta 4 oppure 5) si riduce ad un sistema a maglie triangolari appoggiato al suolo. Si sceglie come sistema principale quello indicato in Fig. (b). Considerando separatamente gli effetti della forza F e dell'incognita iperstatica χ_1 si ottengono gli stati di tenso-reazione illustrati in Fig. (c). In particolare lo stato 0 è quello già determinato nell'Esercizio 5, in quanto l'asta disconnessa non trasmette forze ai nodi. Raccogliendo tensioni e reazioni in vettori $\sigma = \{\sigma_e\}^T$, $r = \{X_B, X_A, Y_A\}^T$ si ha:

$$\text{stato 0: } \begin{cases} \sigma_0 = F \{-2 & -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1\}^T \\ r_0 = F \{-2 & 2 & 1\}^T \end{cases}$$

$$\text{stato 1: } \begin{cases} \sigma_1' = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \right\}^T \\ r_1' = \{0 & 0 & 0\}^T \end{cases}$$

Il generico stato di tenso-reazione si ottiene sovrapponendo gli effetti:

$$\sigma = \sigma_0 + \chi_1 \sigma_1', \quad r = r_0 + \chi_1 r_1'$$

L'equazione di compatibilità cinematica impone che lo spostamento relativo nella sconnessione sia nullo; essa si scrive (si veda l'Eq. 7.71)

$$\eta_{11} \chi_1 + \eta_{10} + \eta_{1s} + \bar{\eta}_1 = 0$$

dove:

$$\eta_{11} = \sigma_1'^T C^{-1} \sigma_1' = \sum_e \sigma_{e1}'^2 / c_e, \quad \eta_{10} = \sigma_1'^T C^{-1} \sigma_0 = \sum_e \sigma_{e1}' \sigma_{e0} / c_e,$$

$$\eta_{1s} = -r_1'^T s = Y_{A1}' s, \quad \bar{\eta}_1 = \sigma_1'^T \bar{\varepsilon} = \sigma_{A1}' \bar{\varepsilon}_4$$

In particolare η_{1s} rappresenta il lavoro virtuale, cambiato di segno, compiuto dalle reazioni vincolari agenti nello stato 1 nei cedimenti vincolari, ed η_1 il lavoro virtuale delle tensioni virtuali agenti nello stato 1 nelle deformazioni assegnate. I calcoli dei coefficienti sono organizzati nella tabella che segue.

Asta	c_e	σ_{e0}	σ'_{e1}	$\sigma_{e0}\sigma'_{e1}/c_e$	σ'^2_{e1}/c_e
1	c	$-2F$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2} F/c$	$1/(2c)$
2	c	$-F$	$-\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2) F/c$	$1/(2c)$
3	c	F	$-\sqrt{2}/2$	$-(\sqrt{2}/2) F/c$	$1/(2c)$
4	$(\sqrt{2}/2)c$	$\sqrt{2}F$	1	$2F/c$	$\sqrt{2}/c$
5	$(\sqrt{2}/2)c$	0	1	0	$\sqrt{2}/c$
6	c	$-F$	$-\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2) F/c$	$1/(2c)$
7	$(\sqrt{2}/2)c$	$\sqrt{2}F$	0	0	0
8	c	$-F$	0	0	0
				$\eta_{10} = \frac{F(4+3\sqrt{2})}{2c}$	$\eta_{11} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{c}$

Inoltre, essendo $Y'_{A1} = 0$ e $\sigma'_{A1} = 1$, si ha:

$$\eta_{1s} = 0, \quad \bar{\eta}_1 = \alpha l \sqrt{2} \Delta T$$

avendo tenuto conto che $\bar{\varepsilon}_4 = \alpha \Delta T l \sqrt{2}$. Sostituendo nell'equazione di compatibilità cinematica e risolvendo si trova:

$$\chi_1 = -\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) F + \alpha l \sqrt{2} \Delta T \right]$$

Sovrapponendo gli stati 0 ed 1 si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[-\frac{1}{2} (5+6\sqrt{2}) F + \alpha l \Delta T \right], & \sigma_2 &= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[-\frac{1}{2} (1+2\sqrt{2}) F + \alpha l \Delta T \right] \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[\frac{1}{2} (7+6\sqrt{2}) F + \alpha l \Delta T \right], & \sigma_4 &= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[\frac{1}{2} (4+\sqrt{2}) F - \alpha l \sqrt{2} \Delta T \right] \\ \sigma_5 &= -\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[\frac{1}{2} (4+3\sqrt{2}) F + \alpha l \sqrt{2} \Delta T \right], & \sigma_6 &= \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \left[-\frac{1}{2} (1+2\sqrt{2}) F + \alpha l \Delta T \right] \\ \sigma_7 &= \sqrt{2} F, & \sigma_8 &= -F \end{aligned}$$

Per calcolare l'abbassamento di C è conveniente applicare la *FGSD* (si veda il Par. 7.4.5). Questa richiede la determinazione di uno degli stati virtuali di tensione σ^* equilibrati con una forza d'intensità unitaria applicata in C , diretta verso il basso. Si può ad esempio scegliere lo stato in cui $\sigma_s = 0$, cioè lo stato (unico) che si verifica nel sistema principale adottato nella risoluzione del problema iperstatico. In questo caso particolare è, stante la linearità:

$$\sigma^* = \frac{1}{F} \sigma_0, \quad \mathbf{r}^* = \frac{1}{F} \mathbf{r}_0$$

La *FGSD* si scrive

$$1 \cdot v_C = \sigma^{*T} \varepsilon - \mathbf{r}^{*T} \mathbf{s}$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_C &= \sum_e \sigma_e^* \left(\frac{\sigma_e}{c_e} + \bar{\varepsilon}_e \right) + Y_{A0}^* s \\ &= \frac{1}{F} \left[\sum_e \sigma_{e0} \left(\frac{\sigma_e}{c_e} + \bar{\varepsilon}_e \right) + Y_{A0} s \right] \end{aligned}$$

Sviluppando si ottiene:

$$v_C = \frac{47+36\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})} \frac{F}{c} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} \alpha l \Delta T + s$$

- **Osservazione 10.** L'Esercizio 8 ha sottolineato che, se il sistema è sollecitato da un'unica forza attiva e si vuole calcolare la componente dello spostamento del punto di applicazione della forza nella direzione della forza stessa, allora un possibile stato (virtuale) di tenso-reazione (σ^* , \mathbf{r}^*), da utilizzarsi nella *FGSD*, è uguale allo stato (reale) di tensione (σ_0 , \mathbf{r}_0) diviso per l'intensità della forza.
- **Osservazione 11.** L'Esercizio 7 ha mostrato che cedimenti di vincoli esterni in sistemi iperstatici per soli vincoli interni non inducono stati di coazione. Essi hanno effetto solo sugli spostamenti del sistema.

3. Telai elastici

3.1 Il sistema

Si consideri un telaio piano costituito da n_e travi elastiche incastrate ad n_c nodi (Fig. 7). Per quanto visto nel Par. 1, il sistema può essere considerato costituito da n_e organi elastici, ciascuno di molteplicità $d_e=3$, per complessivi $d=3n_e$ organi semplici. Siano poi presenti nel sistema m vincoli esterni semplici che limitano traslazioni e/o rotazioni dei nodi. Il sistema sia sottoposto a forze e coppie applicate esclusivamente ai nodi, a deformazioni imposte (estensionali, a taglio e curvature), nonché a cedimenti vincolari. Si vogliono formulare i problemi cinematico, statico ed elastico.

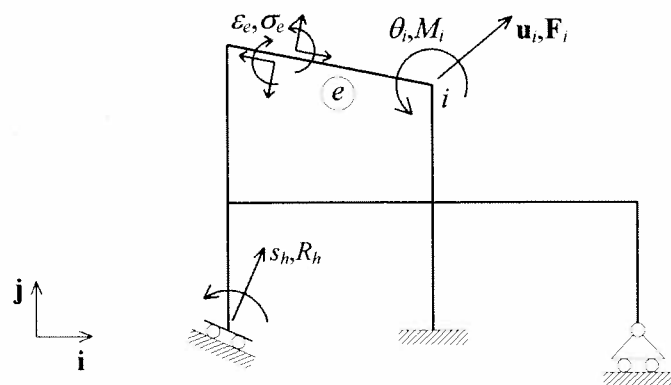


Fig. 7 Telaio piano: forze e spostamenti nodali; deformazioni e tensioni nelle travi; cedimenti e reazioni dei vincoli esterni

3.2 Il problema cinematico

Si consideri dapprima il sistema non vincolato al suolo. La generica configurazione variata è descritta dal vettore degli spostamenti (generalizzati) $3n_c \times 1$

$$\mathbf{u} = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \dots \ u_i \ v_i \ \theta_i \ \dots \ u_{n_c} \ v_{n_c} \ \theta_{n_c}\}^T \quad (19)$$

dove u_i , v_i e θ_i sono le componenti dello spostamento del nodo i nella base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) ; il sistema ha perciò $n=3n_c$ g.d.l.. Lo stato di deformazione è descritto dal vettore $d \times 1$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1 \ \gamma_1 \ \kappa_1 \ \dots \ \varepsilon_e \ \gamma_e \ \kappa_e \ \dots \ \varepsilon_{n_e} \ \gamma_{n_e} \ \kappa_{n_e}\}^T \quad (20)$$

che elenca le deformazioni ε_e , γ_e e κ_e delle travi. Deformazioni e spostamenti sono legati da equazioni di congruenza che esprimono le componenti ε_e , γ_e e κ_e della trave e -esima in funzione degli spostamenti dei nodi i e j cui la trave è collegata (Fig. 8a).

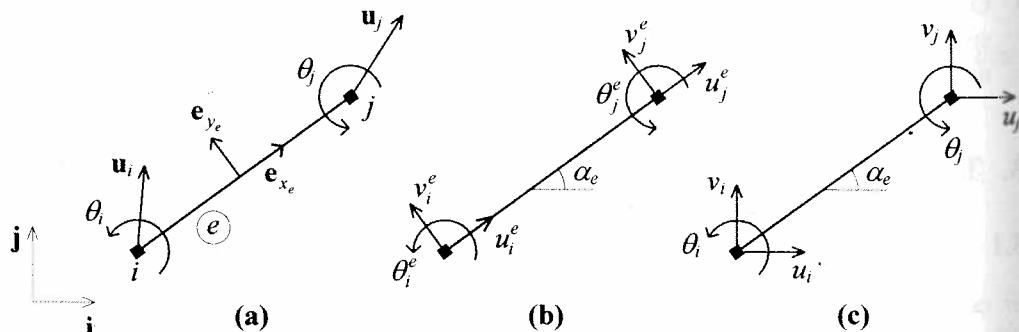


Fig. 8 Spostamenti dei nodi di estremità di una trave: (a) base globale e locale; (b) componenti locali; (c) componenti globali

Ricordando le equazioni 4.12 si ha:

$$\varepsilon_e = u_j^e - u_i^e, \quad \gamma_e = v_j^e - v_i^e - \theta_i^e l_e, \quad \kappa_e = \theta_j^e - \theta_i^e \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \quad (21)$$

dove u_i^e , v_i^e , θ_i^e sono le componenti dello spostamento del nodo i nella base locale $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (Fig. 8b). Queste sono legate alle analoghe componenti u_i , v_i , θ_i nella base globale (\mathbf{i}, \mathbf{j}) (Fig. 8c) dalle seguenti relazioni:

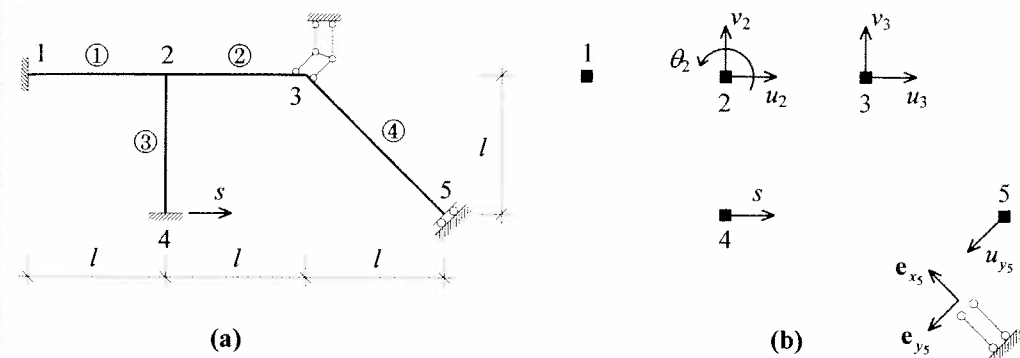
$$u_i^e = u_i \cos \alpha_e + v_i \sin \alpha_e, \quad v_i^e = -u_i \sin \alpha_e + v_i \cos \alpha_e, \quad \theta_i^e = \theta_i \quad (22)$$

per cui le equazioni di congruenza (21) si scrivono:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= (u_j \cos \alpha_e + v_j \sin \alpha_e) - (u_i \cos \alpha_e + v_i \sin \alpha_e) \\ \gamma_e &= (-u_j \sin \alpha_e + v_j \cos \alpha_e) - (-u_i \sin \alpha_e + v_i \cos \alpha_e) - \theta_i l_e \\ \kappa_e &= \theta_j - \theta_i \end{aligned} \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \quad (23)$$

Si considerino ora i vincoli esterni. Se questi sono costituiti da bielle, possono applicarsi ai telai le stesse considerazioni fatte per i sistemi reticolari (cfr. Par. 2.2), introducendo basi intrinseche alle bielle. Se invece sono costituiti da bipendoli le condizioni di vincolo sono del tipo $\theta_h = \phi_h$, e quindi immediatamente sostituibili nelle equazioni di congruenza. Si ottiene così la forma lagrangiana (10) delle equazioni di congruenza.

Esercizio 9: Si scrivano le equazioni di congruenza del telaio in Fig. (a).



Il sistema è costituito da $n_c=5$ nodi ed $n_e=4$ travi. Quindi il numero dei g.d.l. è $n=3 \times 5=15$ e la molteplicità elastica è $d=3 \times 4=12$. I vincoli esterni hanno molteplicità globale $m=9$; il sistema è cinematicamente impossibile di grado $r=d+m-n=6$. Poiché il nodo 1 è incastrato ed i cedimenti sono nulli si assume subito $u_1=v_1=\theta_1=0$. Il nodo 4 pure è incastrato, ma è soggetto ad un cedimento vincolare orizzontale $u_4=s$; le altre due componenti di spostamento sono invece nulle: $v_4=\theta_4=0$. Gli spostamenti del nodo 2 sono liberi e sono quindi parametri lagrangiani. Analogamente sono libere le traslazioni del nodo 3, ma non la rotazione, che è impedita dal bipendolo, $\theta_3=0$. Infine il nodo 5 può solo traslare in una direzione; introdotta una base $(\mathbf{e}_{x_5}, \mathbf{e}_{y_5})$ intrinseca al vincolo (Fig. b) è $u_{x_5} = \theta_5 = 0$. Il vettore dei parametri lagrangiani ha $n-m=6$ componenti, indicate in Fig. (b):

$$\mathbf{q} = \{u_2 \ v_2 \ \theta_2; \ u_3 \ v_3; \ u_{y_5}\}^T$$

Le equazioni di congruenza sono in numero di $m=9$. Quelle relative alle travi 1, 2, 3, parallele agli assi globali, non offrono difficoltà:

$$\varepsilon_1 = u_2, \quad \gamma_1 = v_2, \quad \kappa_1 = \theta_2$$

$$\varepsilon_2 = u_3 - u_2, \quad \gamma_2 = v_3 - v_2 - \theta_2 l, \quad \kappa_2 = -\theta_2$$

$$\varepsilon_3 = v_2, \quad \gamma_3 = s - u_2 - \theta_2 l, \quad \kappa_3 = -\theta_2$$

avendo orientato \mathbf{e}_{x_3} dal nodo 2 al nodo 4, in accordo alla convenzione introdotta. Per quanto riguarda invece l'asta 4, occorre proiettare gli spostamenti di estremità nella base locale; si ha:

$$\varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 + v_3), \quad \gamma_4 = -u_{y_3} - \frac{\sqrt{2}}{2}(u_3 + v_3), \quad \kappa_4 = 0$$

3.3 Variazioni termiche

Un particolare (ma comune) tipo di deformazione anelastica è costituito dalle distorsioni termiche. Si è già visto nell'Esercizio 2 che variazioni termiche uniformi ΔT inducono allungamenti

$$\bar{\varepsilon} = \alpha l \Delta T \quad (24)$$

con α coefficiente di dilatazione termico ed l lunghezza dell'asta. È possibile mostrare che un *gradiente termico uniforme* Θ , cioè una variazione di temperatura uniforme lungo l'asse della trave, ma lineare in direzione normale, induce una curvatura flessionale

$$\bar{\kappa} = \alpha l \Theta \quad (25)$$

ed uno scorrimento angolare

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} l \bar{\kappa} \quad (26)$$

Per dimostrare le (25) e (26) si consideri la variazione termica di Fig. 9a, agente sulla sezione della trave considerata come oggetto tridimensionale, avente valore nullo in corrispondenza del baricentro G . Poiché il gradiente è uniforme, la trave inizialmente rettilinea si dispone secondo un arco di circonferenza di raggio (incognito) r (Fig. 9b, dove $\bar{\kappa} > 0$). Le fibre longitudinali sottoposte a variazione $\Delta T > 0$ si allungano, mentre quelle sottoposte a $\Delta T < 0$ si accorciano; la fibra baricentrica resta di lunghezza invariata. In particolare, dalla Fig. 9a,b si trae:

$$l_1 = \bar{\kappa}(r - h_1), \quad l_2 = \bar{\kappa}(r + h_2), \quad l_G = l = \bar{\kappa}r \quad (27)$$

e quindi

$$\bullet \quad l_1 = l - \bar{\kappa} h_1, \quad l_2 = l + \bar{\kappa} h_2 \quad (28)$$

Poiché è anche

$$l_1 = l(1 - \alpha \Theta h_1), \quad l_2 = l(1 + \alpha \Theta h_2) \quad (29)$$

dal confronto delle (28) e (29) si ricava la (25). Riguardo l'espressione dello scorrimento angolare $\bar{\gamma}$ è sufficiente ricordare il suo significato geometrico (cfr. Par. 4.6.4) perché dalla Fig. 9b si risale all'Eq. (26).

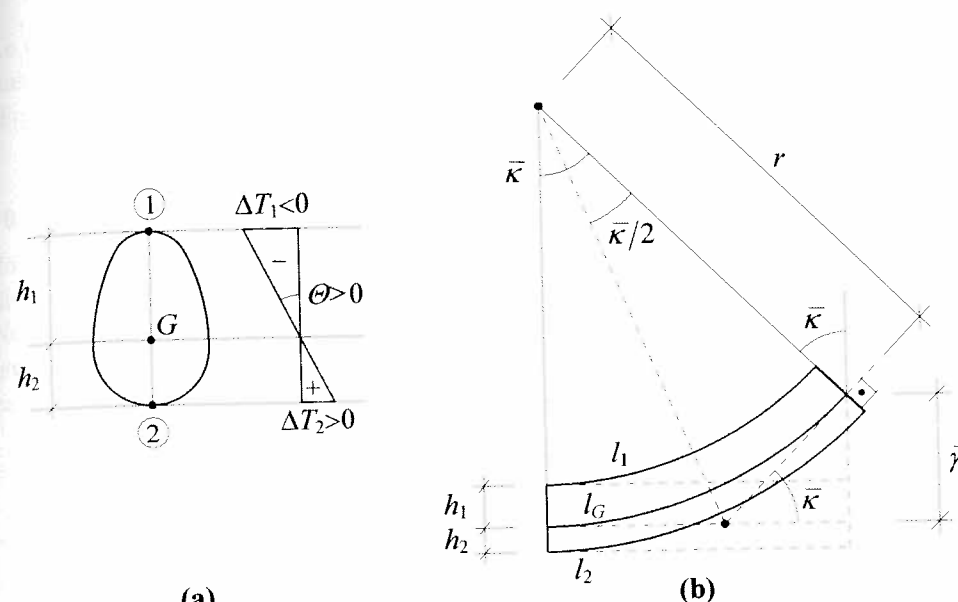
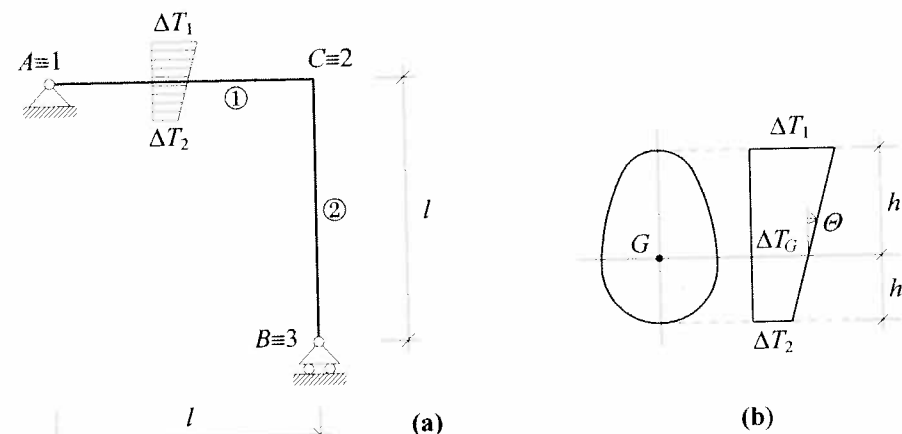


Fig. 9 (a) Gradiente termico sulla sezione della trave; (b) curvatura e scorrimento angolare

Esercizio 10: Assegnata alla trave AC del telaio in Fig. (a) la variazione termica indicata in Fig. (b) si determini la configurazione variata del sistema.



La variazione termica equivale ad una variazione uniforme $\Delta T_G > 0$ e ad un gradiente $\Theta < 0$, rispettivamente pari a

$$\Delta T_G = \Delta T_1 + \Theta h_1 \quad \Theta = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{h_1 + h_2}$$

a cui corrispondono le deformazioni anelastiche

$$\bar{\varepsilon}_1 = \alpha l \Delta T_G, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{2} \alpha l^2 \Theta, \quad \bar{\kappa}_1 = \alpha l \Theta$$

I parametri lagrangiani del sistema, indicati in Fig. (c), sono $\mathbf{q} = \{\theta_1; u_2, v_2, \theta_2; u_3, \theta_3\}^T$. Le equa-

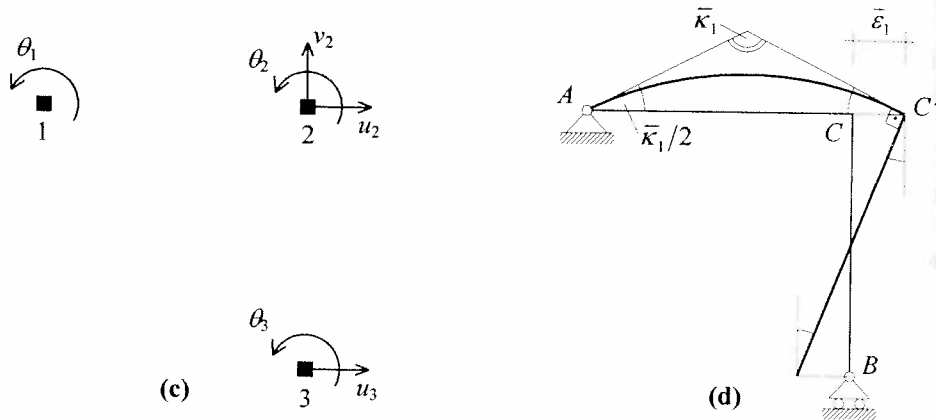
zioni di congruenza si scrivono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= u_2, & \gamma_1 &= v_2 - \theta_1 l, & \kappa_1 &= \theta_2 - \theta_1 \\ \varepsilon_2 &= v_2, & \gamma_2 &= u_3 - u_2 - \theta_2 l, & \kappa_2 &= \theta_3 - \theta_2\end{aligned}$$

Il sistema è quindi cinematicamente determinato. Imposto $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1, \gamma_1 = \bar{\gamma}_1, \kappa_1 = \bar{\kappa}_1, \varepsilon_2 = 0, \gamma_2 = 0, \kappa_2 = 0$ e risolvendo si trova:

$$\theta_1 = -\frac{1}{2}\bar{\kappa}_1, \quad u_2 = \bar{\varepsilon}_1, \quad v_2 = 0, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\bar{\kappa}_1, \quad u_3 = \bar{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2}\bar{\kappa}_1 l, \quad \theta_3 = \frac{1}{2}\bar{\kappa}_1$$

La configurazione variata è illustrata in fig. (d).



3.4 Il problema statico

Sul telaio agiscono forze attive $\mathbf{F}_i = X_i \mathbf{i} + Y_i \mathbf{j}$ e coppie M_i applicate ai nodi. Il vettore delle forze generalizzate $n \times 1$ è quindi:

$$\mathbf{f} = \{X_1 \ Y_1 \ M_1 \ \dots \ X_n \ Y_n \ M_n \ \dots \ X_{n_c} \ Y_{n_c} \ M_{n_c}\}^T \quad (30)$$

Lo stato di tensione nelle travi è rappresentato dal vettore $d \times 1$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1 \ \tau_1 \ \mu_1 \ \dots \ \sigma_e \ \tau_e \ \mu_e \ \dots \ \sigma_{n_e} \ \tau_{n_e} \ \mu_{n_e}\}^T \quad (31)$$

che elenca gli sforzi normali σ_e , gli sforzi di taglio τ_e e i momenti flettenti μ_e agenti nelle travi (Fig. 10a). Lo stato reattivo è descritto dal vettore

$$\mathbf{r} = \{R_1 \ \dots \ R_h \ \dots \ R_m\}^T \quad (32)$$

che elenca le reazioni vincolari R_h degli m vincoli semplici.

Le condizioni di equilibrio sono espresse dalle equazioni cardinali della statica, alla traslazione e alla rotazione, scritte per i corpi puntiformi. Con riferimento al nodo i (Fig. 10b) le equazioni di equilibrio alla traslazione si scrivono:

$$\mp \sum_e (\sigma_e \mathbf{e}_{x_e} + \tau_e \mathbf{e}_{y_e}) + \sum_h R_h \mathbf{e}_h + \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (33)$$

dove la sommatoria di indice e è estesa a tutte le travi concorrenti in i e la sommatoria di indice h è estesa agli eventuali vincoli di biella applicati in i , esplicitanti reazioni R_h . Nella (33) deve assumersi il segno negativo quando \mathbf{e}_{x_e} è *entrante* nel nodo ed il segno positivo quando è *uscente* (si veda la Fig. 10b, dove sono rappresentati entrambi i casi); \mathbf{e}_h è assunto sempre *entrante*.

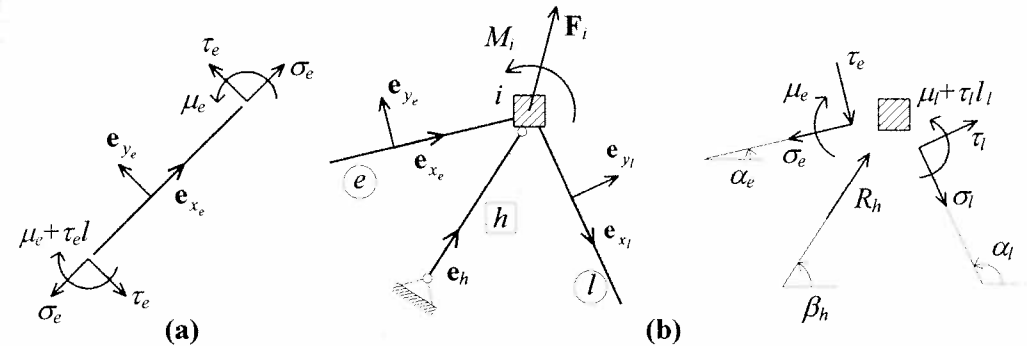


Fig. 10 (a) Tensioni in una trave; (b) equilibrio di un nodo orientato

Proiettando le (33) nella base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) si ha:

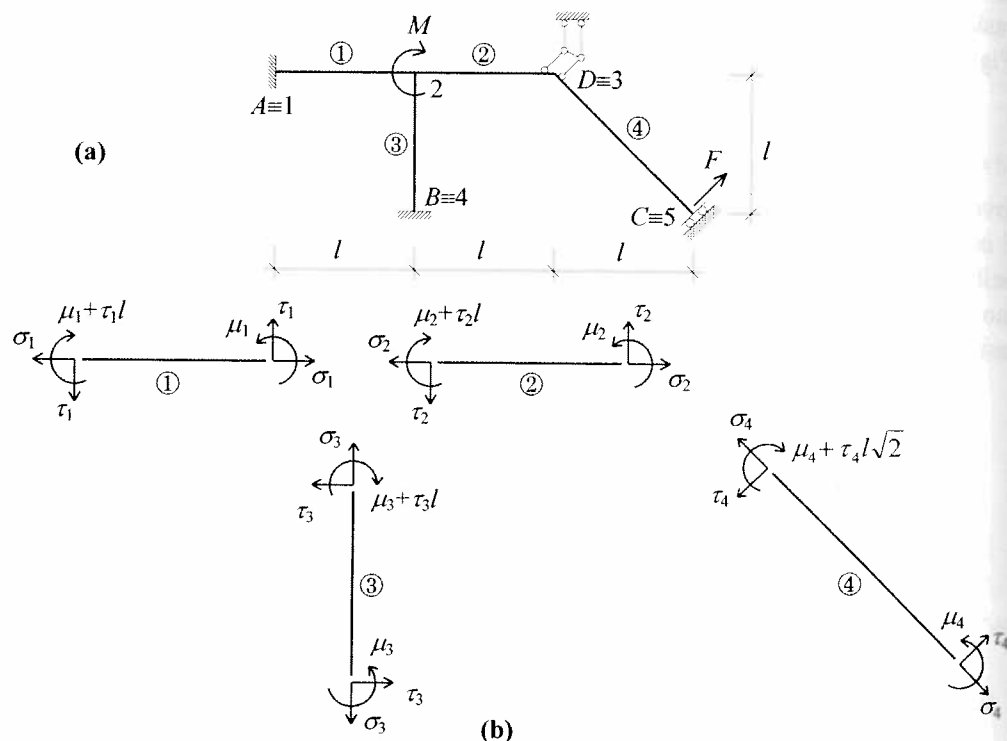
$$\begin{aligned}\mp \sum_e (\sigma_e \cos \alpha_e - \tau_e \sin \alpha_e) + \sum_h R_h \cos \beta_h + X_i &= 0 \\ \mp \sum_e (\sigma_e \sin \alpha_e + \tau_e \cos \alpha_e) + \sum_h R_h \sin \beta_h + Y_i &= 0\end{aligned} \quad (34)$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione sono:

$$\sum_h M_h^v + M_i + \begin{cases} - \sum_e \mu_e & (\mathbf{e}_{x_e} \text{ entrante}) \\ \sum_e (\mu_e + \tau_e l_e) & (\mathbf{e}_{x_e} \text{ uscente}) \end{cases} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n_c) \quad (35)$$

dove M_h^v sono le coppie esplicitate da eventuali bipendoli applicati in i e le tensioni applicate ai nodi assumono una diversa espressione secondo che il versore \mathbf{e}_{x_e} sia entrante o uscente dal nodo (Fig. 10b). Le (33) e (34) costituiscono la formulazione (estesa) (16) del problema statico. Per ottenere la forma lagrangiana (17) si applicano le medesime considerazioni fatte per i sistemi reticolari (Par. 2.3).

Esercizio 11: Si scrivano le condizioni di equilibrio relative al telaio in Fig. (a).



Lo stato di tensione è rappresentato in Fig. (b) in accordo alle convenzioni introdotte (assi e diretti da i a j , con $i < j$). Applicando ai nodi le tensioni cambiate di segno e tenendo conto delle forze attive M ed F e delle reazioni vincolari $\mathbf{r} = \{X_A, Y_A, M_A; X_B, Y_B, M_B; R_C, M_C; M_D\}^T$, si hanno le forze rappresentate in Fig. (c). Per l'equilibrio dei nodi è necessario imporre $3 \times 5 = 15$ equazioni nelle $3 \times 4 = 12$ tensioni e nove reazioni vincolari. Il sistema è quindi iperstatico di grado $r=6$. Si scrivono dapprima le equazioni lagrangiane di equilibrio. Poiché i nodi 1 e 4 sono incastrati, tutte le equazioni di equilibrio ad essi relative contengono reazioni vincolari, e non sono perciò equazioni lagrangiane. Sul nodo 3 agisce la coppia d'incastro M_D , cosicché le equazioni di equilibrio alla traslazione non contengono reazioni. Analogamente, sul nodo 5 agiscono due reazioni vincolari, cosicché l'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione normale ad R_C è un'equazione lagrangiana. Infine, poiché il nodo 2 è libero da vincoli, le tre equazioni di equilibrio sono equazioni lagrangiane. In definitiva le equazioni lagrangiane di equilibrio sono quelle associate agli spostamenti lagrangiani \mathbf{q} illustrati nella Fig. (b) dell'Esercizio 9. Esse si scrivono:

$$\begin{aligned} \text{nodo 2: } & \sigma_1 - \sigma_2 - \tau_3 = 0, & \tau_1 - \tau_2 + \sigma_3 = 0, & \mu_1 - \mu_2 - \tau_2 l - \mu_3 - \tau_3 l + M = 0; \\ \text{nodo 3: } & \sigma_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_4 = 0, & \tau_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_4 = 0; \\ \text{nodo 5: } & F - \tau_4 = 0 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

e costituiscono un sistema di sei equazioni nelle dodici tensioni incognite. Esistono quindi ∞^6 stati di tensione equilibrati. Le nove reazioni vincolari possono essere espresse in funzione delle tensioni dalle seguenti, rimanenti, equazioni di equilibrio:

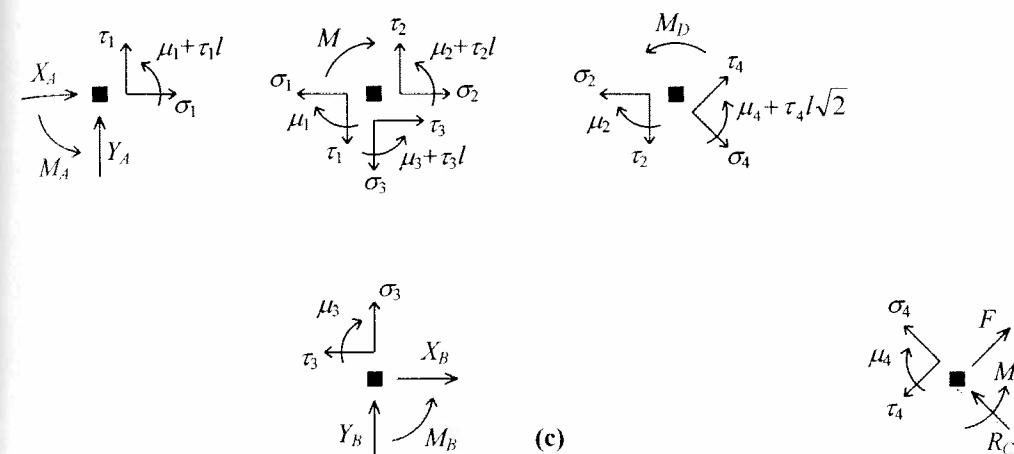
$$\text{nodo 1: } X_A + \sigma_1 = 0, \quad Y_A + \tau_1 = 0, \quad M_A + \mu_1 + \tau_1 l = 0;$$

$$\text{nodo 3: } \mu_4 - \mu_2 + \sqrt{2} l \tau_4 + M_D = 0;$$

$$\text{nodo 4: } X_B - \tau_3 = 0, \quad Y_B + \sigma_3 = 0, \quad M_B - \mu_3 = 0;$$

$$\text{nodo 5: } \sigma_4 + R_C = 0, \quad -\mu_4 + M_C = 0;$$

(b)



3.5 Il problema elastico

Con riferimento alla Fig. 7, assegnate le forze \mathbf{F}_i e le coppie M_i applicate ai nodi, i cedimenti vincolari s_h , e le deformazioni anelastiche $\bar{\epsilon}_e$, si vogliono determinare gli spostamenti generalizzati \mathbf{u}_i e θ_i , le deformazioni ϵ_e , le tensioni σ_e e le reazioni vincolari R_h . Il problema è governato da:

- $3n_e = d$ equazioni di congruenza (23) ed m relazioni di vincolo (6), che costituiscono la forma estesa (8) del problema cinematico;
- $3n_e = n$ equazioni di equilibrio (34), (35), che costituiscono la forma estesa (16) del problema statico;
- $3n_e = d$ equazioni di legame del tipo (4.49):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_e \\ \tau_e \\ \mu_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_a & 0 & 0 \\ 0 & c_t & -c_t l/2 \\ 0 & -c_t l/2 & c_f \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \epsilon_e - \bar{\epsilon}_e \\ \gamma_e - \bar{\gamma}_e \\ \kappa_e - \bar{\kappa}_e \end{Bmatrix} \quad (e = 1, 2, \dots, n_e) \quad (36)$$

ovvero:

$$\sigma_e = \mathbf{C}_e (\epsilon_e - \bar{\epsilon}_e) \quad (37)$$

in cui $(c_a)_e = (EA/l)_e$, $(c_t)_e = (12EI/l^3)_e$, $(c_f)_e = (4EI/l)_e$ sono rispettivamente le rigidezze assiale, a taglio e flessionale della trave e -esima.

Complessivamente si hanno $2d+n+m$ equazioni (formulazione estesa) in altrettante incognite. Nel seguito si presentano delle applicazioni.

Sostituendo le equazioni di congruenza (21) nel legame costitutivo (36) e non considerando le deformazioni anelastiche, si ottengono le tensioni in termini di spostamenti:

$$\begin{aligned}\sigma_e &= \left(\frac{EA}{l} \right)_e (u_j^e - u_i^e) \\ \tau_e &= 12 \left(\frac{EI}{l^3} \right)_e (v_j^e - v_i^e) - 6 \left(\frac{EI}{l^2} \right)_e (\theta_j^e + \theta_i^e) \\ \mu_e &= -6 \left(\frac{EI}{l^2} \right)_e (v_j^e - v_i^e) + 4 \left(\frac{EI}{l} \right)_e \left(\theta_j^e + \frac{1}{2} \theta_i^e \right)\end{aligned}\quad (38)$$

Ricordando che (Par. 4.3.1 e Fig. 4.4):

$$\begin{aligned}t_{ix}^e &= -\sigma_e, & t_{iy}^e &= -\tau_e, & m_i^e &= -(\mu_e + \tau_e l_e) \\ t_{jx}^e &= \sigma_e, & t_{jy}^e &= \tau_e, & m_j^e &= \mu_e\end{aligned}\quad (39)$$

si ottiene la seguente relazione forze interne-spostamenti nodali:

$$\begin{Bmatrix} t_{ix} \\ t_{iy} \\ m_i \\ t_{jx} \\ t_{jy} \\ m_j \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_e \quad (40)$$

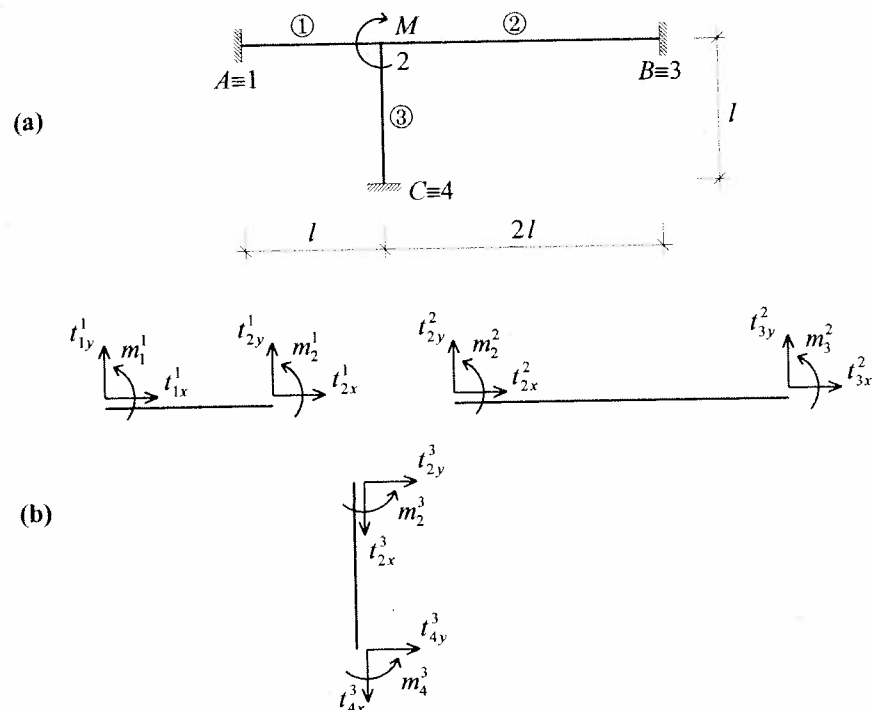
La matrice 6×6 è la *matrice di rigidezza dell'elemento e*.

Nelle applicazioni si procede come segue:

- I. Si scrivono le equazioni di equilibrio dei nodi in termini di forze interne.
- II. Con le (40) si esprimono le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti e si determina la configurazione equilibrata.
- III. Noti gli spostamenti, dalle (40) si calcolano le forze interne e, successivamente dalle (39_a)÷(39_c) le tensioni.

Gli Esercizi 13 e 14 che seguono illustrano delle applicazioni del metodo.

Esercizio 13: Applicando l'Osservazione 12: (a) si risolve il problema elastico relativo al sistema in Fig. (a), costituito da travi di uguali caratteristiche elastiche; (b) si studi l'andamento della soluzione al variare del rapporto di snellezza $\lambda = l/(I/A)^{1/2}$.



(a) Il vettore degli spostamenti lagrangiani è $q = \{u_2, v_2, \theta_2\}^T$. Le forze di estremità delle aste sono indicate, con il loro verso positivo, in Fig. (b); le forze sui nodi sono uguali e contrarie. Le equazioni di equilibrio dell'unico nodo libero si scrivono:

$$t_{2x}^1 + t_{2x}^2 + t_{2x}^3 = 0, \quad t_{2y}^1 + t_{2y}^2 - t_{2x}^3 = 0, \quad m_2^1 + m_2^2 + m_2^3 + M = 0 \quad (a)$$

Le forze interne si scrivono con le (40), tenuto conto dell'orientazione della base locale:

$$\begin{aligned}t_{2x}^1 &= \frac{EA}{l} u_2, & t_{2x}^2 &= \frac{EA}{2l} u_2, & t_{2y}^3 &= 12 \frac{EI}{l^3} u_2 + 6 \frac{EI}{l^2} \theta_2 \\ t_{2y}^1 &= 12 \frac{EI}{l^3} v_2 - 6 \frac{EI}{l^2} \theta_2, & t_{2y}^2 &= \frac{3EI}{2l^3} v_2 + \frac{3EI}{2l^2} \theta_2, & t_{2x}^3 &= -\frac{EA}{l} v_2 \\ m_2^1 &= -6 \frac{EI}{l^2} v_2 + 4 \frac{EI}{l} \theta_2, & m_2^2 &= \frac{3EI}{2l^2} v_2 + 2 \frac{EI}{l} \theta_2, & m_2^3 &= 6 \frac{EI}{l^2} u_2 + 4 \frac{EI}{l} \theta_2\end{aligned}\quad (b)$$

Le equazioni di equilibrio si scrivono dunque:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EA}{2l} + 12 \frac{EI}{l^3} & 0 & 6 \frac{EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} + \frac{27EI}{2l^3} & -\frac{9EI}{2l^2} \\ 6 \frac{EI}{l^2} & -\frac{9EI}{2l^2} & 10 \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{Bmatrix} \quad (c)$$

che, risolte, forniscono:

$$u_2 = 8 \frac{M l^2}{EI} \frac{27 + 2\lambda^2}{\Omega}, \quad v_2 = -18 \frac{M l^2}{EI} \frac{8 + \lambda^2}{\Omega}, \quad \theta_2 = -2 \frac{M l}{EI} \frac{216 + 43\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}$$

$$\Omega = 2376 + 683\lambda^2 + 40\lambda^4; \quad \lambda = \frac{l}{\rho}; \quad \rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

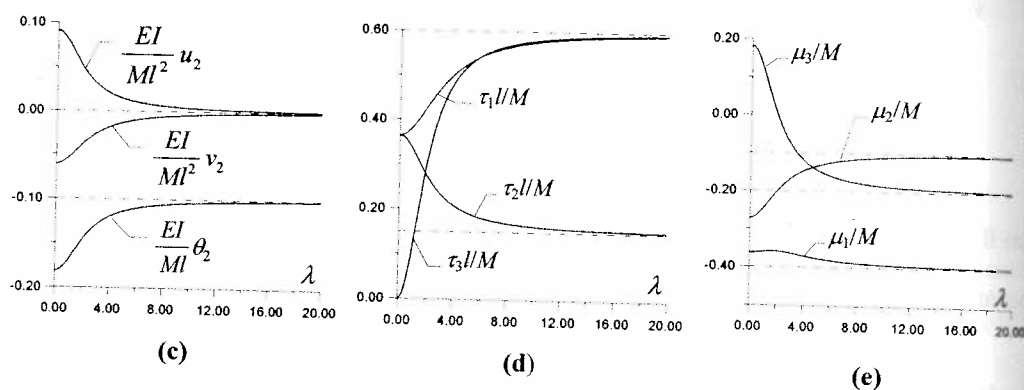
Sostituendo le (d) nelle (b) e applicando poi le (39.4-39.6), si ricavano le tensioni:

$$\sigma_1 = 8 \frac{M}{l} \frac{27\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}, \quad \tau_1 = 12 \frac{M}{l} \frac{72 + 25\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}, \quad \mu_1 = -4M \frac{216 + 59\lambda^2 + 4\lambda^4}{\Omega}$$

$$\sigma_2 = -4 \frac{M}{l} \frac{27\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}, \quad \tau_2 = 6 \frac{M}{l} \frac{144 + 26\lambda^2 + \lambda^4}{\Omega}, \quad \mu_2 = -M \frac{648 + 113\lambda^2 + 4\lambda^4}{\Omega}$$

$$\sigma_3 = -18 \frac{M}{l} \frac{8\lambda^2 + \lambda^4}{\Omega}, \quad \tau_3 = 12 \frac{M}{l} \frac{27\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}, \quad \mu_3 = -4M \frac{-108 + 19\lambda^2 + 2\lambda^4}{\Omega}$$

avendo indicato con ρ il giratore d'inerzia della sezione trasversale delle travi e con λ il corrispondente rapporto di snellezza.



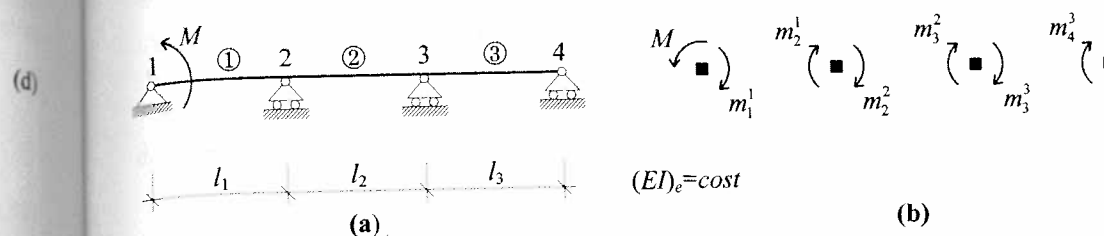
(b) Per $\lambda \in [0, 20]$ la soluzione, espressa in termini di spostamenti u_2 , v_2 e θ_2 , segue l'andamento riportato in Fig. (c). All'aumentare di λ le componenti di traslazione u_2 , v_2 tendono a zero mentre la rotazione θ_2 tende ad un valore limite non nullo. Un analogo andamento si riscontra per il taglio τ_j ($j=1,2,3$) (Fig. d) e per il momento μ_j (Fig. e); dopo una prima forte variazione con il parametro di snellezza λ , entrambe le grandezze tendono ad un asintoto orizzontale (linee tratteggiate in figura). All'aumentare di λ , dunque, la risposta della struttura, espressa dalle (d) ed (e), tende rapidamente a quella che si ottiene per $\lambda \rightarrow \infty$, cosicché è ben approssimata dalla soluzione limite non appena $\lambda > 20$. Poiché il limite è governato dal rapporto $\lambda^4/\Omega \rightarrow 1/40$, la soluzione limite risulta:

$$u_2 = v_2 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{1}{10} \frac{M l}{EI}; \quad \tau_1 = \tau_3 = \frac{3}{5} \frac{M}{l}, \quad \tau_2 = \frac{3}{20} \frac{M}{l};$$

$$\mu_1 = -\frac{2}{5} M, \quad \mu_2 = -\frac{1}{10} M, \quad \mu_3 = -\frac{1}{5} M \quad (f)$$

Il caso limite $\lambda \rightarrow \infty$ può interpretarsi, per l fissato, come ottenuto per $\rho \rightarrow 0$, cioè ancora, per l fissato, per $A \rightarrow \infty$ (aste inestensibili).

Esercizio 14: Si applichi l'Osservazione 12 alla soluzione del problema in Fig. (a).



Si tratta di una *trave continua* (unica trave su più appoggi). I parametri lagrangiani sono le rotazioni θ_i e le traslazioni longitudinali u_i dei nodi. Le equazioni lagrangiane sono le equazioni di equilibrio alla rotazione e le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale dei nodi. È facile verificare che le prime contengono solo i parametri θ_i , mentre le seconde solo i parametri u_i . Poiché queste ultime sono omogenee (in quanto non sono presenti forze longitudinali) le traslazioni u_i sono identicamente nulle.

Assunto quindi $\mathbf{q} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}^T$ le coppie interne sono:

$$m_i' = 4 \frac{EI}{l_i} \theta_i + 2 \frac{EI}{l_i} \theta_{i+1}, \quad m_{i+1}' = 2 \frac{EI}{l_i} \theta_i + 4 \frac{EI}{l_i} \theta_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione si scrivono (Fig. b):

$$-m_1' + M = 0, \quad m_2' + m_2'' = 0, \quad m_3' + m_3'' = 0, \quad m_4' = 0$$

che espresse in termini di rotazioni diventano:

$$\begin{bmatrix} 4c_1 & 2c_1 & 0 & 0 \\ 2c_1 & 4(c_1 + c_2) & 2c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 4(c_2 + c_3) & 2c_3 \\ 0 & 0 & 2c_3 & 4c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_i = \frac{EI}{l_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

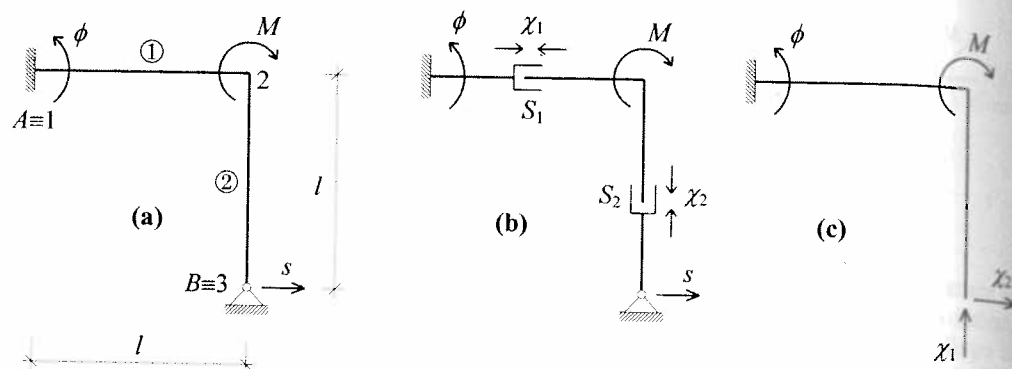
Assunto $l_i = l$ e risolvendo si ottiene:

$$\theta_1 = \frac{13}{45} \frac{M l}{EI}, \quad \theta_2 = -\frac{7}{90} \frac{M l}{EI}, \quad \theta_3 = \frac{1}{45} \frac{M l}{EI}, \quad \theta_4 = -\frac{1}{90} \frac{M l}{EI}$$

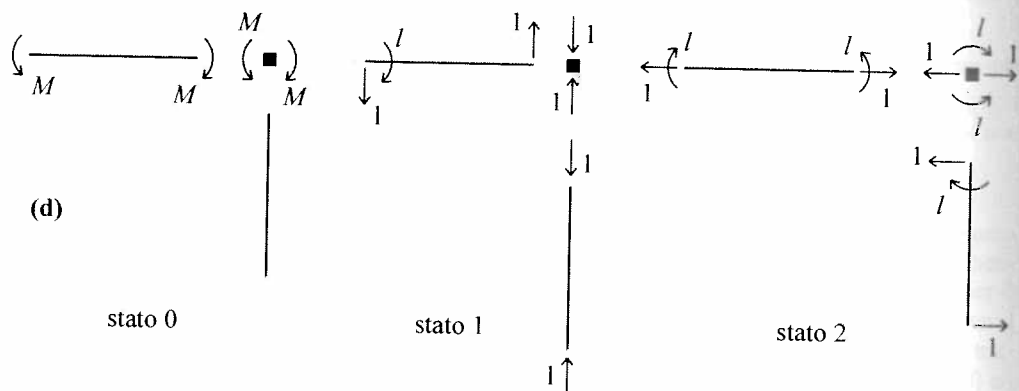
da cui segue lo stato di tensione:

$$\tau_1 = -\frac{19}{15} \frac{M}{l}, \quad \mu_1 = \frac{4}{15} M, \quad \tau_2 = \frac{1}{3} \frac{M}{l}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{15} M, \quad \tau_3 = -\frac{1}{15} \frac{M}{l}, \quad \mu_3 = 0$$

Esercizio 15: Si determini lo stato di tenso-reazione nel sistema in Fig. (a) applicando il metodo delle forze. Si studi poi il limite $EA \rightarrow \infty$.



Il sistema ha grado di iperstaticità $r=2$. Per renderlo isostatico si possono introdurre delle sconnessioni. Tuttavia non è lecito disconnettere completamente una trave, che è un organo di molteplicità elastica $d=3>r$, ma è possibile introdurre delle sconnessioni esclusivamente estensionali, identiche a quelle considerate nei sistemi reticolari (Fig. b). In questo caso le travi possono trasmettere taglio e momento, ma non sforzo normale. Sconnessioni di altro tipo, cerniere e glifi interni, come si è detto all'inizio del capitolo, non verranno qui esaminate. Comunque non è sempre possibile con sole disconnessioni estensionali rendere isostatico un sistema; si possono allora sopprimere dei vincoli esterni, come si è già detto nell'Osservazione 7.27, a proposito di sistemi generici. Nell'esempio, può assumersi il sistema principale di Fig. (c) (ovvero introdurre una sconnessione e sopprimere un solo vincolo esterno). Assumendo il sistema di Fig. (c) si hanno gli stati di tensione di Fig. (d).



Raccogliendo le tensioni nel vettore $\sigma = \{\sigma_1, \tau_1, \mu_1; \sigma_2, \tau_2, \mu_2\}^T$, nei tre stati si ha:

$$\sigma_0 = \{0, 0, -M; 0, 0, 0\}^T, \quad \sigma_1 = \{0, 1, 0; -1, 0, 0\}^T, \quad \sigma_2 = \{1, 0, l; 0, 1, 0\}^T$$

Raccogliendo inoltre le reazioni vincolari del sistema principale nel vettore $\mathbf{r} = \{X_A, Y_A, M_A\}^T$, si ha:

$$\mathbf{r}_0 = \{0, 0, M\}^T, \quad \mathbf{r}_1 = \{0, -1, -l\}^T, \quad \mathbf{r}_2 = \{-1, 0, -l\}^T$$

Il generico stato di tenso-reazione si ottiene sovrapponendo gli effetti:

$$\sigma = \sigma_0 + \chi_1 \sigma_1' + \chi_2 \sigma_2', \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \chi_1 \mathbf{r}_1' + \chi_2 \mathbf{r}_2'$$

Le equazioni di compatibilità cinematica impongono che lo spostamento assoluto di B sia orizzontale ed uguale ad s ; esse si scrivono:

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_{10} + \eta_{1s} \\ \eta_{20} + \eta_{2s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \end{Bmatrix}$$

dove

$$\eta_{ij} = \sigma_i'^T \mathbf{C}^{-1} \sigma_j', \quad \eta_{i0} = \sigma_i'^T \mathbf{C}^{-1} \sigma_0, \quad \eta_{is} = -\mathbf{r}_i'^T \mathbf{s} = -M_{Ai}' \phi$$

essendo $\mathbf{s} = \{s_A, s_{A'}, \phi_A\}^T = \{0, 0, \phi\}^T$ il vettore dei cedimenti vincolari del sistema principale. Tenuto conto che l'inversa della matrice elastica di una trave è (Eq. 4.50):

$$\mathbf{C}_e^{-1} = \mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}_e$$

effettuando i calcoli si trova:

$$\eta_{11} = \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{EA}, \quad \eta_{12} = \eta_{21} = \frac{l^3}{2EI}, \quad \eta_{22} = \frac{4l^3}{3EI} + \frac{l}{EA}$$

$$\eta_{1s} = \eta_{2s} = l\phi, \quad \eta_{10} = -\frac{Ml^2}{2EI}, \quad \eta_{20} = \frac{Ml^2}{EI}$$

Risolvendo le equazioni di compatibilità cinematica si determinano le incognite iperstatiche:

$$\chi_1 = 6 \frac{(\lambda^4 + 3\lambda^2)}{\Omega} \frac{M}{l} - 6 \frac{EA(5\lambda^2 + 6)}{\Omega} \phi - 18 \frac{EA\lambda}{\rho\Omega} s$$

$$\chi_2 = 3 \frac{(\lambda^4 + 12\lambda^2)}{\Omega} \frac{M}{l} + 3 \frac{EA(2\lambda^2 - 12)}{\Omega} \phi + 3 \frac{EA(4 + 12\lambda)}{\rho\Omega} s$$

$$\Omega = 7\lambda^4 + 60\lambda^2 + 36, \quad l = l\sqrt{A/I}$$

con le quali è possibile ottenere l'intero stato tenso-reattivo.

Nell'ipotesi che la rigidezza assiale tenda all'infinito (aste inestensibili), le incognite iperstatiche si modificano come segue:

$$\chi_1 = \frac{6}{7} \frac{M}{l} - \frac{30}{7} \frac{EI}{l^2} \phi - \frac{18}{7} \frac{EI}{l^3} s, \quad \chi_2 = \frac{3}{7} \frac{M}{l} + \frac{6}{7} \frac{EI}{l^2} \phi + \frac{12}{7} \frac{EI}{l^3} s$$

A questo risultato si perviene più semplicemente trascurando i contributi l/EA nei coefficienti di influenza η_{11} e η_{22} .

• **Osservazione 13.** L'esercizio precedente ha mostrato che, se il sistema principale è ottenuto sopprimendo dei vincoli esterni, i relativi cedimenti vincolari non contribuiscono più ai coefficienti $\bar{\eta}_i$ (in quanto non sono più dei cedimenti per il sistema principale), ma vanno posti direttamente a secondo membro. Così, con riferimento allo stesso esercizio, le equazioni di congruenza relative al sistema princi-

pale di Fig. (b) sono del tipo:

$$\Delta u_{S_1}(M, \phi, s) = 0, \quad \Delta v_{S_2}(M, \phi, s) = 0$$

e quelle relative al sistema principale di Fig. (c) sono del tipo:

$$v_B(M, \phi) = 0, \quad u_B(M, \phi) = s$$

Si noti che s compare in un caso tra le cause che producono un certo spostamento nel punto in cui si è soppresso il vincolo, nell'altro è lo spostamento dello stesso punto in cui si è soppresso il vincolo. Se si ricorda la genesi delle equazioni di compatibilità cinematica, ottenute dal TLV (Par. 7.4.4), è facile rendersi conto che nel primo caso il cedimento appare quale *lavoro virtuale vincolare*, e nel secondo come *lavoro virtuale attivo*.

- **Osservazione 14.** L'applicazione del metodo delle forze ai telai risulta meno conveniente di quella del metodo degli spostamenti, in quanto i telai hanno generalmente un grado di iperstaticità elevato, cosicché il numero delle incognite iperstatiche r è maggiore del numero dei parametri lagrangiani $l = n - m$. Inoltre, anche nei casi semplici in cui è $r \leq l$, il metodo è generalmente applicato al sistema continuo, anziché al discreto.

4. Telai di travi inestensibili

4.1 Vincoli interni di inestensibilità

La soluzione del problema elastico relativo ad un telaio dipende, tra gli altri fattori, dalle rigidezze assiale, flessionale e a taglio delle travi, come gli Esercizi 13 e 15 hanno chiarito. Ora, mentre le rigidezze flessionale e a taglio sono generalmente paragonabili, la rigidezza assiale è notevolmente più elevata. Per rendersene conto basta pensare che, posta la soluzione in termini adimensionali (come fatto nell'Esercizio 13), questa dipende dal fattore $EA l^2 / EI$, che è uguale al quadrato del rapporto di snellezza $\lambda = l / \rho$, con ρ giratore d'inerzia della sezione. Poiché ρ è minore dell'altezza h della sezione, e nelle travi è $l \gg h$, il fattore adimensionale, e quindi la rigidezza assiale, è molto grande cosicché non si commette un errore significativo se si assume uguale ad infinito (si ricordino i risultati dell'Esercizio 13). Pertanto, al fine di ridurre l'onere di calcolo, spesso una o più travi di un telaio sono assunte *inestensibili*, o assialmente rigide. Se si risolve il problema con il metodo delle forze questa assunzione produce vantaggi modesti: nel calcolo dei coefficienti di influenza potrà infatti omettersi il contributo della deformabilità assiale (in quanto $c_a \rightarrow \infty$; cfr. Esercizio 15). Se invece si procede con il metodo degli spostamenti può realizzarsi un notevole vantaggio computazionale; infatti, l'ipotesi di indeformabilità assiale *riduce il numero dei parametri lagrangiani del sistema*, e quindi le dimensioni del problema elastico in forma lagrangiana. Ciò in quanto gli spostamenti nodali devono soddisfare *relazioni di vincolo* che esprimono l'invarianza delle mutue distanze tra i nodi collegati da travi inestensibili. Queste relazioni di vincolo (interno) si aggiungono a quelle dei vincoli esterni e riducono ulteriormente il numero dei g.d.l. del sistema di corpi puntiformi.

Nel seguito si risolve il problema elastico secondo il metodo degli spostamenti.

- **Osservazione 15.** Da un punto di vista meccanico si può pensare di trasformare un telaio di travi elastiche in un telaio di travi assialmente rigide introducendo nel sistema delle *bielle interne* che collegano i nodi (Fig. 11a). In tal caso questi possono solo ruotare e traslare relativamente in direzione trasversale all'asse della trave, ma non possono traslare relativamente in direzione longitudinale (Fig. 11b). Nel problema duale, se il sistema trave-biella è sottoposto a forze esterne applicate ai nodi, la trave è sollecitata a taglio e a flessione, ma non a sforzo normale, in quanto non può allungarsi; lo sforzo normale è invece fornito dalla biella (Fig. 11c).

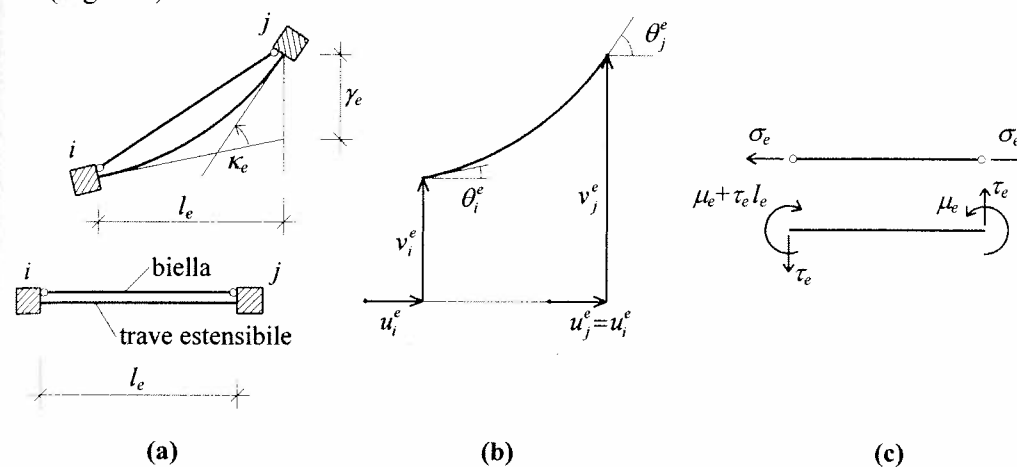


Fig. 11 (a) Sistema trave-biella; (b) spostamenti nodali; (c) sollecitazioni

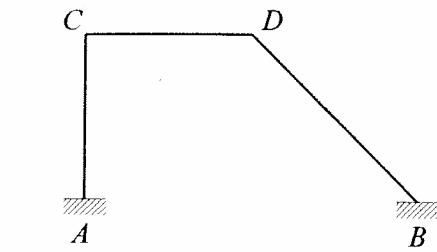
4.2 I parametri lagrangiani

Per formulare il problema agli spostamenti si segue la procedura generale illustrata nel Cap. 7 per i sistemi vincolati. Innanzitutto occorre determinare i parametri lagrangiani. Considerando il sistema rigido associato (cioè privato degli organi elastici) i parametri lagrangiani sono in numero uguale al suo grado di libertà. Nel caso in esame, e in virtù dell'Osservazione 15, il sistema rigido associato al telaio si ottiene sostituendo le travi con delle bielle. Ai nodi restano i seguenti g.d.l.:

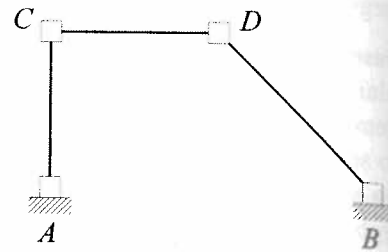
- (a) tutte le rotazioni non impedita da eventuali bipendoli esterni;
- (b) le eventuali traslazioni consentite dalle bielle e dai vincoli esterni.

In particolare queste ultime sono pari al grado di libertà del sistema *reticolare associato*, ottenuto dal sistema rigido considerando i nodi come non orientati.

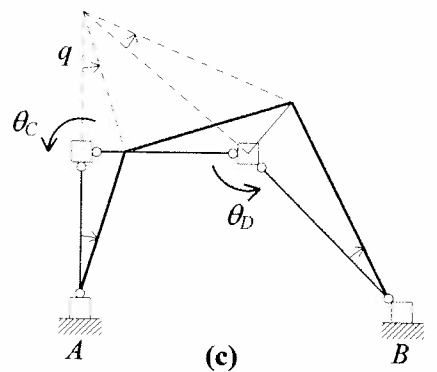
La Fig. 12 mostra un esempio. In Fig. 12c è rappresentato il sistema rigido associato alla struttura di Fig. 12a,b, e in Fig. 12d il sistema reticolare associato. Il primo ha grado di libertà $l=3$; sono infatti arbitrarie le rotazioni θ_C e θ_D dei nodi C e D e le traslazioni degli stessi associate all'unico cinematismo compatibile, di ampiezza arbitraria q . Il cinematismo rappresenta l'unico possibile per il sistema reticolare di Fig. 12d, che infatti ha grado di libertà $l=1$.



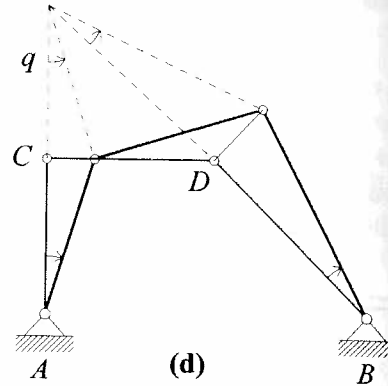
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 12 (a) Sistema di travi inestensibili; (b) schematizzazione come sistemi di corpi puntiformi orientati; (c) sistema rigido associato; (d) sistema reticolare associato

- **Osservazione 16.** Se il sistema reticolare associato è cinematicamente determinato o impossibile, non possiede modi cinematici; i parametri lagrangiani sono perciò solo le rotazioni dei nodi. Sistemi di questo tipo sono detti *telai a nodi fissi*. Se invece il sistema reticolare associato è labile o degenera il telaio è detto *a nodi spostabili*.

4.3 Deformazioni e tensioni, attive e reattive

In funzione dei parametri lagrangiani si determinano gli spostamenti nodali. Questi, espressi nelle basi locali solidali alle travi, permettono di descrivere le deformazioni. Per la generica trave e , le sole deformazioni non nulle sono (Fig. 11a):

$$\varepsilon_e = \{\gamma_e \kappa_e\}^T \quad (41)$$

essendo $\varepsilon_e = u_j^e - u_i^e \equiv 0$ per la condizione di inestensibilità. In funzione degli spostamenti nodali le deformazioni si scrivono (Fig. 11b):

$$\gamma_e = v_j^e - v_i^e - \theta_i^e l_e, \quad \kappa_e = \theta_j^e - \theta_i^e \quad (42)$$

- **Osservazione 17.** In un modo cinematico le uniche deformazioni non nulle sono quelle a taglio, in quanto $\theta_i^e \equiv 0, \forall(i,e)$. In un telaio a nodi fissi ($u_i^e \equiv 0, v_i^e \equiv 0, \forall(i,e)$), in generale le deformazioni γ_e e κ_e sono non nulle.

Alle deformazioni sono associate le tensioni (attive):

$$\sigma_e = \{\tau_e \mu_e\}^T \quad (43)$$

attraverso il legame:

$$\begin{Bmatrix} \tau_e \\ \mu_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l_e^3} & -\frac{6EI}{l_e^2} \\ -\frac{6EI}{l_e^2} & \frac{4EI}{l_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_e - \bar{\gamma}_e \\ \kappa_e - \bar{\kappa}_e \end{Bmatrix} \quad (44)$$

La matrice che appare nella (44), è la *matrice elastica* C_e della trave inestensibile.

- **Osservazione 18.** La tensione normale σ_e , pur essendo in generale non nulla, non appare nel legame costitutivo (44); infatti, poiché la trave è inestensibile, non è associata ad una deformazione. La tensione σ_e , dunque, perde il significato di *tensione attiva* (cioè di grandezza meccanica dipendente dalle deformazioni attraverso il legame costitutivo) ed assume invece il significato di *tensione reattiva* (cioè di grandezza meccanica esplicita da un vincolo interno).

4.4 Equazioni lagrangiane di equilibrio

Le equazioni risolutive del problema sono quelle di equilibrio dei nodi. Su questi agiscono, le forze attive \mathbf{f} , le reazioni vincolari \mathbf{r} , e le tensioni $\sigma_e = \{\tau_e, \mu_e\}^T$ applicate dalle travi; inoltre sono presenti le reazioni σ_e dei vincoli interni di rigidità (che possono indifferentemente pensarsi espliciti dalle travi assialmente rigide, o, se si adotta la schematizzazione di Fig. 12, dalle bielle).

Per ottenere la formulazione lagrangiana, le tensioni σ_e come le reazioni \mathbf{r} , devono essere eliminate dalle equazioni di equilibrio. A tal fine occorre moltiplicare scalarmente le equazioni di equilibrio dei nodi con i modi cinematici del sistema (cioè con le colonne della matrice modale \mathbf{U} , cfr. Par. 7.3.1). Come si è detto, i modi sono di due tipi: (a) una rotazione unitaria di un nodo e tutte le altre rotazioni e traslazioni uguali a zero; (b) tutte le rotazioni nulle e le traslazioni determinate dagli $l \geq 0$ cinematici indipendenti del sistema reticolare associato. Il prodotto scalare delle equazioni di equilibrio con i modi di tipo (a) restituisce inalterate le equazioni di equilibrio alla rotazione; il prodotto con i modi di tipo (b) fornisce invece combinazioni lineari delle singole equazioni di equilibrio alla traslazione, in cui sono assenti reazioni vincolari e tensioni reattive. Ad esempio per il sistema in Fig. 12a si scriveranno due equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi C e D ed una equazione lagrangiana associata al modo di Fig. 12d.

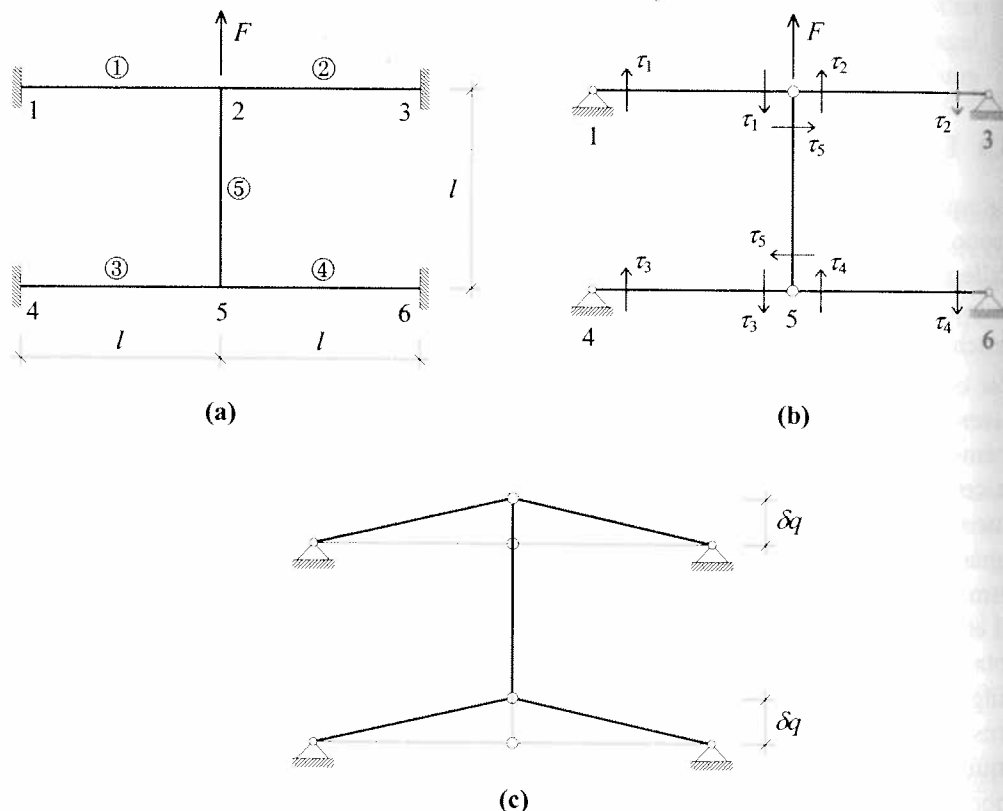
- **Osservazione 19.** Se il telaio è a nodi fissi, le uniche equazioni di equilibrio sono quelle alla rotazione, in quanto il sistema reticolare associato non possiede cinematismi.

4.5 L'impiego dell'equazione dei lavori virtuali

Il metodo più semplice per ottenere le equazioni lagrangiane di equilibrio alla traslazione consiste nello scrivere l'ELV per il sistema reticolare associato; imponendo che le forze nodali compiano lavoro nullo in ogni spostamento ammissibile, cioè per ogni modo cinematico, si ottengono le equazioni cercate. Dal momento che i modi consistono di sole traslazioni, le uniche forze che compiono lavoro sono, oltre alle forze attive, le forze di taglio. Gli sforzi normali non compiono infatti lavoro, in quanto il modo è rispettoso del vincolo di inestensibilità.

- **Osservazione 20.** Poiché le forze di taglio sono a due a due uguali e contrarie, esse fanno lavoro nello spostamento relativo dei nodi in direzione trasversale alla trave, cioè nella *deformazione a taglio* (si veda l'Osservazione 17). Il lavoro delle forze di taglio si può perciò anche esprimere in termini di *lavoro interno*, invece che di lavoro esterno. L'esercizio che segue mostra un esempio.

Esercizio 16: Per il sistema in Fig. (a) si scriva l'equazione di equilibrio lagrangiana alla traslazione dei nodi.



Le forze di taglio applicate ai nodi del sistema reticolare associato sono indicate (con il verso positivo) in Fig. (b). Il cinematismo è illustrato in Fig. (c). L'ELV, $L_e=0$, si scrive:

$$F\delta v_2 + \tau_1(\delta v_1 - \delta v_2) + \tau_2(\delta v_2 - \delta v_3) + \tau_3(\delta v_4 - \delta v_5) + \tau_4(\delta v_5 - \delta v_6) + \tau_5(\delta u_2 - \delta u_5) = 0$$

Poiché è:

$$\delta \gamma_1 = \delta v_2 - \delta v_1, \quad \delta \gamma_2 = \delta v_3 - \delta v_2, \quad \delta \gamma_3 = \delta v_5 - \delta v_4, \quad \delta \gamma_4 = \delta v_6 - \delta v_5, \quad \delta \gamma_5 = \delta u_5 - \delta u_2$$

l'ELV si scrive anche:

$$F\delta v_2 = \sum_{e=1}^5 \tau_e \delta \gamma_e$$

è cioè del tipo $L_e=L_i$. Tenuto conto che (Fig. c):

$$\delta v_2 = \delta q, \quad \delta \gamma_1 = \delta \gamma_3 = \delta q, \quad \delta \gamma_2 = \delta \gamma_4 = -\delta q, \quad \delta \gamma_5 = 0$$

si ha:

$$F\delta q = (\tau_1 + \tau_3 - \tau_2 - \tau_4)\delta q \quad \forall \delta q$$

da cui si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$F = \tau_1 + \tau_3 - \tau_2 - \tau_4$$

Questa equazione può, a posteriori, essere interpretata come la *somma* delle equazioni di equilibrio alla traslazione verticale dei nodi 2 e 5; in esse lo sforzo normale σ_5 , appare con segni opposti, ed è quindi eliminato dall'operazione di somma.

4.6 Calcolo delle tensioni reattive e reazioni vincolari

Risolte le equazioni lagrangiane di equilibrio e determinati i parametri, si calcolano immediatamente le tensioni attive, taglio e momento flettente. Per completare la soluzione del problema occorre poi determinare le tensioni reattive (gli sforzi normali) e le reazioni vincolari. Queste vanno valutate imponendo l'equilibrio alla traslazione dei nodi, in quanto l'equilibrio alla rotazione è già stato soddisfatto. Nelle equazioni di equilibrio alla traslazione sono coinvolte le forze attive (note), le tensioni di taglio (già determinate), nonché gli sforzi normali e le reazioni vincolari (entrambi incogniti). Un metodo concettualmente molto semplice per calcolare le incognite consiste nel risolvere il problema dell'equilibrio del sistema reticolare associato, soggetto a forze nodali uguali alla somma delle forze attive (escluse le coppie) e dalle forze di taglio applicate dalle travi concorrenti. Si determinano così sforzi normali e reazioni vincolari.

- **Osservazione 21.** Si noti che, anche se il sistema reticolare è labile, l'equilibrio dei nodi è assicurato dal fatto che le forze di taglio soddisfano la condizione di compatibilità delle forze (solubilità dell'equilibrio), che è stata espressa dall'ELV.
- **Osservazione 22.** Se il sistema reticolare associato è cinematicamente determinato, oppure è labile, si determina un unico stato di tensioni reattive e reazioni vincolari equilibrato. Se invece è cinematicamente impossibile, oppure è degenere, esistono infiniti stati reattivi equilibrati, anche se lo stato attivo è unico. Il motivo dell'indeterminazione risiede nel fatto che, a causa dei vincoli interni, il sistema è

solo parzialmente elastico, cosicché l'iperstaticità del sistema non può essere interamente rimossa.

4.7 Applicazioni

Nelle applicazioni occorre procedere come segue.

- I. Si considera il sistema reticolare associato di cui si determina il grado di libertà $l > 0$. I parametri lagrangiani sono le l ampiezze dei modi cinematici del sistema reticolare, nonché le rotazioni dei nodi non vincolati da bipendoli.
- II. In funzione dei parametri lagrangiani si esprimono deformazioni e tensioni attive nelle travi; queste si applicano, cambiate di segno, ai nodi.
- III. Si scrivono le equazioni di equilibrio alla rotazione (35), limitatamente ai nodi liberi, esprimendo momenti flettenti e tagli in funzione dei parametri lagrangiani.
- IV. Si impone che le forze attive e quelle di taglio applicate ai nodi compiano lavoro nullo in ciascuno degli l cinatismi del sistema reticolare associato. Espressi i tagli in funzione dei parametri lagrangiani, si ottengono altre l equazioni di equilibrio.
- V. Si fa sistema delle equazioni ottenute ai punti III e IV; risolvendole, si determinano i parametri lagrangiani e, da questi, le tensioni attive.
- VI. Si applicano ai nodi del sistema reticolare associato le forze di taglio trasmesse dalle travi e si sommano alle forze attive (escluse le coppie). Si risolve il problema statico e si determinano le tensioni reattive (gli sforzi nelle aste) e le reazioni dei vincoli esterni.

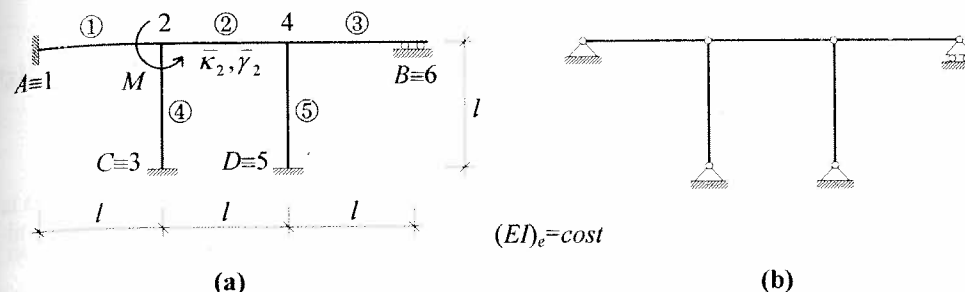
Nel seguito si presentano delle applicazioni.

- **Osservazione 23.** Naturalmente, si può far uso, come per i telai elastici, della *matrice di rigidezza dell'elemento* (Osservazione 12). I passi precedenti vanno allora riformulati in termini di *forze interne trasversali* (anziché tagli) e *coppie interne* (anziché momenti flettenti). La matrice di rigidezza dell'elemento e si ottiene dalla (40) cancellando la prima e quarta riga e colonna, relative a forze interne reattive e spostamenti longitudinali. Si ha:

$$\begin{Bmatrix} t_{iy} \\ m_i \\ t_{jy} \\ m_j \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_e \quad (45)$$

L'Esercizio 19 che segue esemplifica il procedimento.

Esercizio 17: Si determini lo stato di tensione nel sistema in Fig. (a), assunte tutte le travi inestensibili. Sia $\bar{\gamma}_2 = \bar{\kappa}_2 l/2$.



Il sistema reticolare associato (Fig. b) è cinematicamente determinato; il telaio è quindi a nodi fissi. I parametri lagrangiani sono costituiti dalle rotazioni dei nodi liberi, $q = \{\theta_2, \theta_4\}^T$. Le deformazioni delle travi si scrivono:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 0, \quad \kappa_1 = \theta_2; \quad \gamma_2 = -\theta_2 l, \quad \kappa_2 = \theta_4 - \theta_2; \quad \gamma_3 = -\theta_4 l, \quad \kappa_3 = -\theta_4; \\ \gamma_4 = -\theta_2 l, \quad \kappa_4 = -\theta_2; \quad \gamma_5 = -\theta_4 l, \quad \kappa_5 = -\theta_4 \end{aligned} \quad (a)$$

A queste, tenuto conto della deformazione imposta, corrispondono le tensioni:

$$\begin{aligned} \tau_e = 12 \frac{EI}{l^3} \gamma_e - 6 \frac{EI}{l^2} \kappa_e, \quad \mu_e = -6 \frac{EI}{l^2} \gamma_e + 4 \frac{EI}{l} \kappa_e, \quad (e = 1, 3, 4, 5) \\ \tau_2 = 12 \frac{EI}{l^3} (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2) - 6 \frac{EI}{l^2} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2), \quad \mu_2 = -6 \frac{EI}{l^2} (\gamma_2 - \bar{\gamma}_2) + 4 \frac{EI}{l} (\kappa_2 - \bar{\kappa}_2) \end{aligned} \quad (b)$$

ovvero, sostituendo le (a):

$$\begin{aligned} \tau_1 = -6 \frac{EI}{l^2} \theta_2, \quad \mu_1 = 4 \frac{EI}{l} \theta_2; \quad \tau_2 = -6 \frac{EI}{l^2} (\theta_2 + \theta_4), \quad \mu_2 = \frac{EI}{l} (4\theta_4 + 2\theta_2 - \bar{\kappa}_2); \\ \tau_3 = -6 \frac{EI}{l^2} \theta_4, \quad \mu_3 = 2 \frac{EI}{l} \theta_4; \quad \tau_4 = -6 \frac{EI}{l^2} \theta_2, \quad \mu_4 = 2 \frac{EI}{l} \theta_2; \quad \tau_5 = -6 \frac{EI}{l^2} \theta_4, \quad \mu_5 = 2 \frac{EI}{l} \theta_4 \end{aligned} \quad (c)$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi liberi 2 e 4 si scrivono (Eq. 35):

$$\begin{aligned} -\mu_1 + (\mu_2 + \tau_2 l) + (\mu_4 + \tau_4 l) + M = 0 \\ -\mu_2 + (\mu_3 + \tau_3 l) + (\mu_5 + \tau_5 l) = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Sostituendo le (c) esse si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{l} (12\theta_2 + 2\theta_4) = M - \frac{EI}{l} \bar{\kappa}_2 \\ \frac{EI}{l} (2\theta_2 + 12\theta_4) = \frac{EI}{l} \bar{\kappa}_2 \end{aligned} \quad (e)$$

Il sistema (e), risolto, fornisce:

$$\theta_2 = \frac{3}{35} \frac{Ml}{EI} - \frac{1}{10} \bar{\kappa}_2, \quad \theta_4 = -\frac{1}{70} \frac{Ml}{EI} + \frac{1}{10} \bar{\kappa}_2 \quad (f)$$

Sostituendo la soluzione nelle (c) si determina lo stato di tensione:

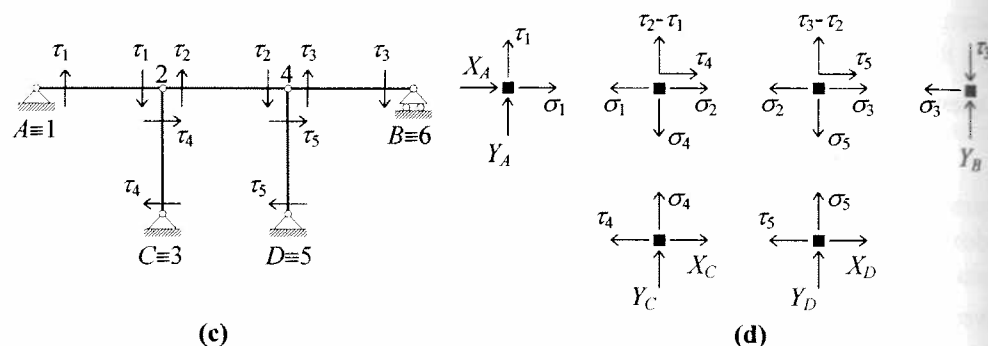
$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\frac{18}{35} \frac{M}{l} + \frac{3EI}{5l^2} \bar{\kappa}_2, \mu_1 = \frac{12}{35} M - \frac{2EI}{5l} \bar{\kappa}_2; \quad \tau_2 = -\frac{3}{7} \frac{M}{l}, \mu_2 = \frac{4}{35} M - \frac{4EI}{5l} \bar{\kappa}_2; \\ \tau_3 &= \frac{3}{35} \frac{M}{l} - \frac{3EI}{5l^2} \bar{\kappa}_2, \mu_3 = -\frac{1}{35} M + \frac{EI}{5l} \bar{\kappa}_2; \quad \tau_4 = -\frac{18}{35} \frac{M}{l} + \frac{3EI}{5l^2} \bar{\kappa}_2, \mu_4 = \frac{6}{35} M - \frac{EI}{5l} \bar{\kappa}_2; (g) \\ \tau_5 &= \frac{3}{35} \frac{M}{l} - \frac{3EI}{5l^2} \bar{\kappa}_2, \mu_5 = -\frac{1}{35} M + \frac{EI}{5l} \bar{\kappa}_2\end{aligned}$$

Per determinare tensioni reattive e reazioni vincolari occorre imporre l'equilibrio del sistema in Fig. (c). Le equazioni di equilibrio dei nodi 2, 4 e 6, le prime secondo le due direzioni e le ultime secondo la sola orizzontale, non contengono reazioni (Fig. d); da queste si ricava:

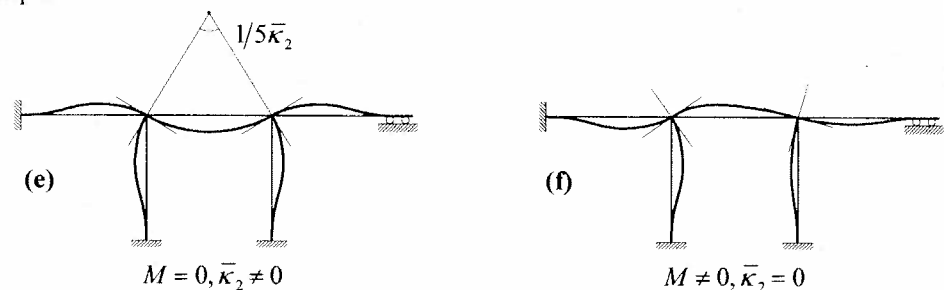
$$\sigma_1 = \tau_4 + \tau_5, \quad \sigma_2 = \tau_5, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = \tau_2 - \tau_1, \quad \sigma_5 = \tau_3 - \tau_2 \quad (h)$$

Dalle restanti equazioni di equilibrio si ottengono le reazioni vincolari:

$$X_A = -\sigma_1, \quad Y_A = -\tau_1, \quad X_C = \tau_4, \quad Y_C = -\sigma_4, \quad X_D = \tau_5, \quad Y_D = -\sigma_5, \quad Y_B = \tau_3 \quad (i)$$

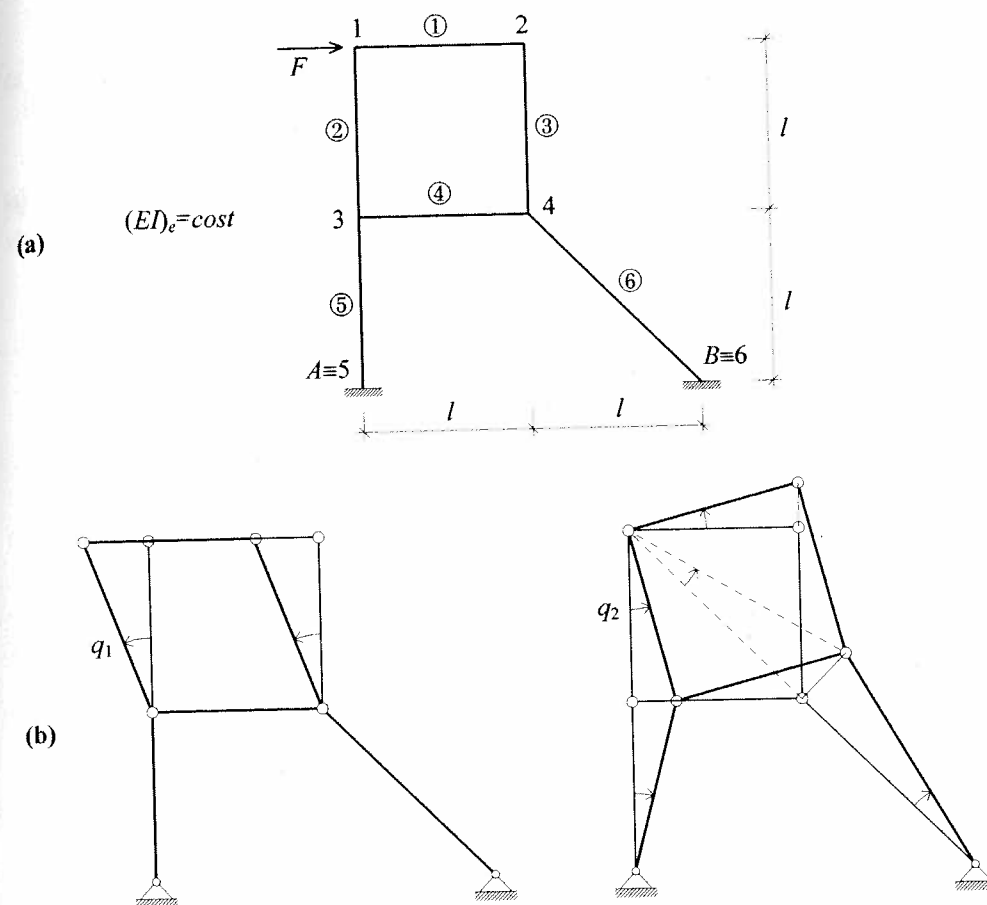


Nelle Fig. (e) ed (f) sono diagrammate le deformate elastiche corrispondenti nell'ordine alla curvatura anelastica e alla coppia. La deformata complessiva è somma delle due deformate componenti.



- **Osservazione 24.** Lo stato tensionale reattivo del sistema dell'Esercizio 17 è unico in quanto il sistema reticolare associato è cinematicamente determinato (si veda l'Osservazione 22). Se lo stesso sistema è modificato sostituendo il glifo in B con un incastro, lo stato tensionale attivo resta immutato (in quanto $u_B=0$ nel telaio inestensibile), ma quello reattivo è indeterminato. Esiste infatti uno stato di sforzo assiale nelle travi orizzontali che è equilibrato con reazioni orizzontali arbitrarie applicate dai vincoli in A e B.

Esercizio 18: Determinare lo stato di tensione nel sistema in Fig. (a), costituito da travi inestensibili.



Il sistema reticolare associato ha grado di libertà $l=2$; si assumono quali parametri lagrangiani le ampiezze dei due modi cinematici (Fig. b), nonché le rotazioni dei nodi liberi: $q = \{q_1, q_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}^T$. Alle rotazioni dei nodi sono associate le deformazioni:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \theta_2 - \theta_1, \quad \gamma_1 = -\theta_1 l; \quad \kappa_2 = \theta_3 - \theta_1, \quad \gamma_2 = -\theta_1 l; \quad \kappa_3 = \theta_4 - \theta_2, \quad \gamma_3 = -\theta_2 l \\ \kappa_4 &= \theta_4 - \theta_3, \quad \gamma_4 = -\theta_3 l; \quad \kappa_5 = -\theta_3, \quad \gamma_5 = -\theta_3 l; \quad \kappa_6 = -\theta_4, \quad \gamma_6 = -\theta_4 l \sqrt{2}\end{aligned} \quad (a)$$

Ai modi cinematici sono associate solo deformazioni a taglio:

$$\gamma_1 = \gamma_4 = l q_2, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = l (q_1 + q_2), \quad \gamma_5 = -l q_2, \quad \gamma_6 = -l \sqrt{2} q_2 \quad (b)$$

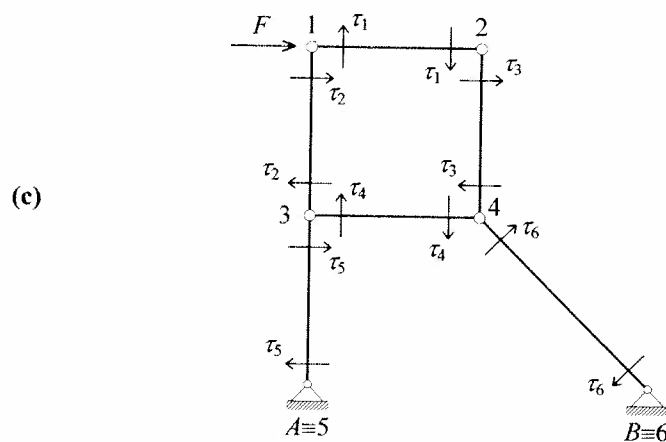
Sostituendo le (a) e (b) nel legame (44) si ha:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 12 \frac{EI}{l^2} q_2 - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_2), & \mu_1 &= -6 \frac{EI}{l} q_2 + 2 \frac{EI}{l} (\theta_1 + 2\theta_2); \\
 \tau_2 &= 12 \frac{EI}{l^2} (q_1 + q_2) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_3), & \mu_2 &= -6 \frac{EI}{l} (q_1 + q_2) + 2 \frac{EI}{l} (\theta_1 + 2\theta_3); \\
 \tau_3 &= 12 \frac{EI}{l^2} (q_1 + q_2) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_2 + \theta_4), & \mu_3 &= -6 \frac{EI}{l} (q_1 + q_2) + 2 \frac{EI}{l} (\theta_2 + 2\theta_4); \\
 \tau_4 &= 12 \frac{EI}{l^2} q_2 - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_3 + \theta_4), & \mu_4 &= -6 \frac{EI}{l} q_2 + 2 \frac{EI}{l} (\theta_3 + 2\theta_4); \\
 \tau_5 &= -12 \frac{EI}{l^2} q_2 - 6 \frac{EI}{l^2} \theta_3, & \mu_5 &= 6 \frac{EI}{l} q_2 + 2 \frac{EI}{l} \theta_3; \\
 \tau_6 &= -6 \frac{EI}{l^2} q_2 - 3 \frac{EI}{l^2} \theta_4, & \mu_6 &= 3\sqrt{2} \frac{EI}{l} q_2 + \sqrt{2} \frac{EI}{l} \theta_4;
 \end{aligned}
 \quad (c)$$

Le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi liberi 1-4 si scrivono (Eq. 35):

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \tau_1 l) + (\mu_2 + \tau_2 l) &= 0; & -\mu_1 + (\mu_3 + \tau_3 l) &= 0 \\
 -\mu_2 + (\mu_4 + \tau_4 l) + (\mu_5 + \tau_5 l) &= 0; & -\mu_3 - \mu_4 + (\mu_6 + \tau_6 l \sqrt{2}) &= 0
 \end{aligned}
 \quad (d)$$

Per ottenere le equazioni di equilibrio lagrangiane associate ai modi di Fig. (b) si applica l'ELV al sistema reticolare associato, assumendo come sistema di forze (reali) quello di Fig. (c), costituito dalle forze di taglio e dalle forze attive, e come campo di spostamento virtuale una combinazione generica di quelli di Fig. (b) (con δq_i in luogo di q_i).



Per un generico campo di spostamento l'ELV si scrive (si veda l'Osservazione 20 e l'Esercizio 16):

$$F \delta u_1 = \sum_{e=1}^6 \tau_e \delta \gamma_e \quad (e)$$

Poiché dalle (b) è:

$$\delta \gamma_1 = \delta \gamma_4 = l \delta q_2, \quad \delta \gamma_2 = \delta \gamma_3 = l (\delta q_1 + \delta q_2), \quad \delta \gamma_5 = -l \delta q_2, \quad \delta \gamma_6 = -l \sqrt{2} \delta q_2 \quad (f)$$

ed inoltre $\delta u_1 = -l \delta q_1$, la (e) si scrive:

$$-l (\tau_2 + \tau_3 + F) \delta q_1 + l (-\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 + \sqrt{2} \tau_6) \delta q_2 = 0 \quad \forall (\delta q_1, \delta q_2) \quad (g)$$

da cui si ottengono due condizioni di equilibrio:

$$\tau_2 + \tau_3 + F = 0; \quad -\tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 + \sqrt{2} \tau_6 = 0 \quad (h)$$

Facendo sistema delle (d) ed (h), espresse in termini dei parametri lagrangiani (Eq. c), si perviene al seguente problema:

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 & -6 & -12 \\ 2 & 8 & 0 & 2 & -6 & -12 \\ 2 & 0 & 12 & 2 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 8+2\sqrt{2} & -6 & 3\sqrt{2}-12 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & 24 & 24 \\ -12 & -12 & -6 & 3\sqrt{2}-12 & 24 & 60+6\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Fl \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= -0.0273 \frac{Fl^2}{EI}, & \theta_2 &= -0.0272 \frac{Fl^2}{EI}, & \theta_3 &= -0.0252 \frac{Fl^2}{EI}, & \theta_4 &= -0.0257 \frac{Fl^2}{EI} \\
 q_1 &= -0.0821 \frac{Fl^2}{EI}, & q_2 &= 0.0141 \frac{Fl^2}{EI}
 \end{aligned}
 \quad (l)$$

a cui corrispondono le tensioni attive:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 0.496F, & \mu_1 &= -0.248Fl; & \tau_2 &= -0.501F, & \mu_2 &= 0.253Fl; & \tau_3 &= -0.499F, & \mu_3 &= 0.251Fl; \\
 \tau_4 &= 0.475F, & \mu_4 &= -0.238Fl; & \tau_5 &= -0.018F, & \mu_5 &= 0.034Fl; & \tau_6 &= -0.007F, & \mu_6 &= 0.023Fl;
 \end{aligned}
 \quad (m)$$

Lo stato di tensione reattivo (unico) si determina procedendo come nell'esercizio precedente.

Esercizio 19: Applicando l'Osservazione 23 si risolva il problema elastico relativo al sistema dell'Esercizio 18.

Tenuto conto delle orientazioni delle basi locali, le coppie interne si esprimono in termini degli spostamenti nodali utilizzando le (45₂) e (45₄):

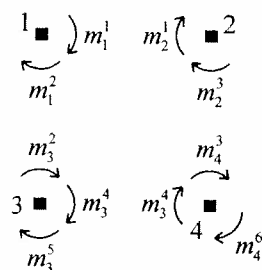
$$\begin{aligned}
 m_1^1 &= \frac{EI}{l} (4\theta_1 + 2\theta_2) + 6 \frac{EI}{l^2} (v_1 - v_2), & m_1^2 &= \frac{EI}{l} (4\theta_1 + 2\theta_3) + 6 \frac{EI}{l^2} (u_1 - u_3), \\
 m_2^1 &= \frac{EI}{l} (2\theta_1 + 4\theta_2) + 6 \frac{EI}{l^2} (v_1 - v_2), & m_2^3 &= \frac{EI}{l} (4\theta_2 + 2\theta_4) + 6 \frac{EI}{l^2} (u_2 - u_4), \\
 m_3^2 &= \frac{EI}{l} (2\theta_1 + 4\theta_3) + 6 \frac{EI}{l^2} (u_1 - u_3), & m_3^4 &= \frac{EI}{l} (4\theta_3 + 2\theta_4) + 6 \frac{EI}{l^2} (v_3 - v_4), \\
 m_3^5 &= 4 \frac{EI}{l} \theta_3 + 6 \frac{EI}{l^2} u_3, & m_4^3 &= \frac{EI}{l} (4\theta_4 + 2\theta_2) + 6 \frac{EI}{l^2} (u_2 - u_4), \\
 m_4^4 &= \frac{EI}{l} (2\theta_3 + 4\theta_4) + 6 \frac{EI}{l^2} (v_3 - v_4), & m_4^6 &= 4 \frac{EI}{l} \theta_4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{EI}{l^2} (u_4 + v_4)
 \end{aligned} \quad (n)$$

mentre le forze agenti in direzione trasversale alle travi, con le (45₁) e (45₃), si scrivono:

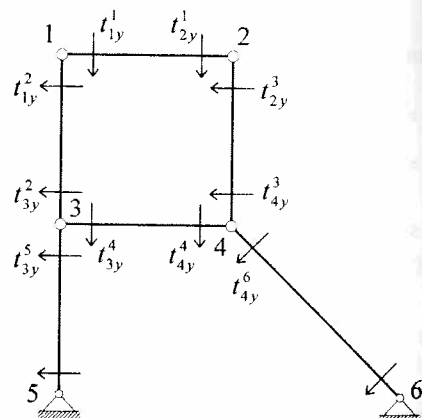
$$\begin{aligned}
 t_{1v}^2 &= 12 \frac{EI}{l^3} (u_1 - u_3) + 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_3), & t_{1v}^1 &= 12 \frac{EI}{l^3} (v_1 - v_2) + 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_2) \\
 t_{2v}^1 &= 12 \frac{EI}{l^3} (v_2 - v_1) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_2), & t_{2v}^3 &= 12 \frac{EI}{l^3} (u_2 - u_4) + 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_2 + \theta_4) \\
 t_{3v}^2 &= 12 \frac{EI}{l^3} (u_3 - u_1) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_1 + \theta_3), & t_{3v}^5 &= 12 \frac{EI}{l^3} u_3 + 6 \frac{EI}{l^2} \theta_3 \\
 t_{3v}^4 &= 12 \frac{EI}{l^3} (v_3 - v_4) + 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_3 + \theta_4), & t_{4v}^3 &= 12 \frac{EI}{l^3} (u_4 - u_2) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_2 + \theta_4) \\
 t_{4v}^4 &= 12 \frac{EI}{l^3} (v_4 - v_3) - 6 \frac{EI}{l^2} (\theta_3 + \theta_4), & t_{4v}^6 &= 3 \frac{EI}{l^3} (u_4 + v_4) + 3 \frac{EI}{l^2} \theta_4
 \end{aligned} \quad (o)$$

In esse, le traslazioni dei nodi della struttura devono essere espresse in termini di coordinate lagrangiane q_1, q_2 ; dalla Fig. b dell'Esercizio 18 segue che:

$$u_1 = -q_1 l, \quad v_1 = 0; \quad u_2 = -q_1 l, \quad v_2 = q_2 l; \quad u_3 = q_2 l, \quad v_3 = 0; \quad u_4 = q_2 l, \quad v_4 = q_2 l \quad (p)$$



(d)



(e)

Le forze di richiamo elastiche che le aste trasmettono ai nodi sono indicate, con il loro verso positivo, nelle Fig. (d) ed (e). Le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi liberi 1÷4 si scrivono (Fig. d):

$$m_1^1 + m_1^2 = 0, \quad m_2^1 + m_2^3 = 0, \quad m_3^2 + m_3^4 + m_3^5 = 0, \quad m_4^3 + m_4^4 + m_4^6 = 0 \quad (q)$$

mentre quelle relative ai nodi di Fig. (b) possono ottenersi dall'applicazione del TLV, che fornisce:

$$\begin{aligned}
 F \delta u_1 &= t_{1v}^1 \delta v_1 + t_{1v}^2 \delta u_1 + t_{2v}^1 \delta v_2 + t_{2v}^3 \delta u_2 + t_{3v}^2 \delta u_3 + t_{3v}^4 \delta v_3 + t_{4v}^3 \delta u_4 + t_{4v}^6 \delta v_4 + \\
 &+ t_{4v}^6 (\delta u_4 + \delta v_4) \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned} \quad (r)$$

Nella (r) gli spostamenti virtuali δu_j e δv_j ($j=1,2,3,4$) si ottengono applicando alle (p) l'operatore δ ; si ha:

$$\begin{aligned}
 \delta u_1 &= -\delta q_1 l, \quad \delta v_1 = 0; \quad \delta u_2 = -\delta q_1 l, \quad \delta v_2 = \delta q_2 l; \\
 \delta u_3 &= \delta q_2 l, \quad \delta v_3 = 0; \quad \delta u_4 = \delta q_2 l, \quad \delta v_4 = \delta q_2 l
 \end{aligned} \quad (s)$$

Sostituendo nelle Eq. (q) e (r) le (n), (o), (p) ed (s) ed imponendo alle (r) di valere per ogni δq_i ($i=1,2$), seguono le equazioni di equilibrio (i) dell'Esercizio 18. Queste ultime, risolte, forniscono gli spostamenti generalizzati (l). Sostituendo nelle (p), (n) ed (o) e applicando le (39₄÷39₆) si ricavano le tensioni espresse dalle (m).

Introduzione ai problemi geometricamente non lineari: spostamenti finiti e teoria linearizzata

1. Il problema elastico geometricamente non lineare

1.1 Limiti della teoria lineare

Il problema elastico trattato nei precedenti capitoli è stato formulato in un ambito puramente lineare; in particolare le equazioni di congruenza sono state determinate nell'ipotesi di *spostamenti infinitesimi*, le equazioni di equilibrio sono state imposte nella *configurazione indeformata del sistema*, e la legge costitutiva è stata assunta lineare. La teoria che discende da queste ipotesi è detta *teoria lineare* ed è caratterizzata da proporzionalità tra cause ed effetti nonché additività di cause e di effetti (principio di sovrapposizione).

La teoria lineare può essere applicata con successo per descrivere una larghissima classe di fenomeni meccanici non solo da un punto di vista qualitativo, ma anche quantitativo. Tuttavia esistono particolari fenomenologie, peraltro di notevole interesse strutturale, che non possono essere descritte *neppure qualitativamente* da essa. In questi casi risulta necessario abbandonare alcune delle ipotesi semplificative e formulare un *modello non lineare* più complesso del semplice modello lineare.

Le teorie non lineari si distinguono per la messa in conto delle *non linearità geometriche* del sistema o delle *non linearità del materiale* (o di entrambe). Le prime nascono da un'analisi cinematica in cui gli spostamenti sono assunti di grandezza finita; le seconde descrivono un comportamento del materiale più ricco di quello semplicemente elastico lineare. Uno studio approfondito della problematica delle teorie non lineari esula dagli scopi di questo testo e trova posto in sedi specializzate. Ci si limiterà pertanto a fornire un cenno sulla formulazione del problema elastico di sistemi

geometricamente non lineari. Successivamente si farà discendere da questa formulazione una teoria semplificata, detta *teoria linearizzata*, sufficiente a descrivere aspetti meccanici qualitativamente importanti che non possono essere descritti dalla teoria lineare, come l'equilibrio di *sistemi labili presollecitati* (quali prototipi discreti di strutture a filo o a membrana), e i fenomeni di *biforcazione dell'equilibrio*.

1.2 Spostamenti e deformazioni finiti

Quando gli spostamenti dei punti non sono trascurabili rispetto alle dimensioni dei corpi, non è più applicabile l'ipotesi di spostamenti infinitesimi; sussiste allora un regime di *spostamenti finiti*, o di grandi spostamenti (Fig. 1). Lo spostamento \mathbf{u}_r di un generico punto P_r è esprimibile, attraverso la FGSR (1.2), come una *funzione non lineare* degli spostamenti generalizzati $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_0, \theta)$ del corpo a cui appartiene. In particolare, una sua componente η_r secondo una data retta r , è

$$\eta_r = \eta_r(\mathbf{u}) \quad (1)$$

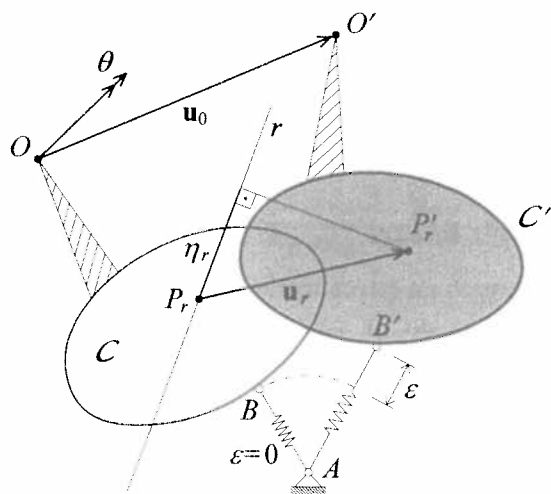


Fig. 1 Spostamenti e deformazioni finiti; C configurazione naturale, C' configurazione variata

Analogamente, le deformazioni che gli organi elastici subiscono nel passaggio dalla configurazione naturale C (in cui sono nulle) alla configurazione variata C' , sono espresse da una *funzione di congruenza non lineare* $\mathbf{d}(\mathbf{u})$ degli spostamenti generalizzati

$$\varepsilon = \mathbf{d}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{d}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

Ad esempio, per una molla estensionale PQ (Fig. 2), l'allungamento ε si calcola come

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |\mathbf{P}'\mathbf{Q}'| - |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{PQ} + \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P| - |\mathbf{PQ}| \\ &= \left[(l_x + u_Q - u_P)^2 + (l_y + v_Q - v_P)^2 + (l_z + w_Q - w_P)^2 \right]^{1/2} - l \end{aligned} \quad (3)$$

dove $l = |\mathbf{PQ}|$ è la lunghezza iniziale della molla, avente proiezioni l_x, l_y e l_z sugli assi. Esprimendo poi gli spostamenti dei punti P e Q in funzione degli spostamenti generalizzati, si ottiene la (2).

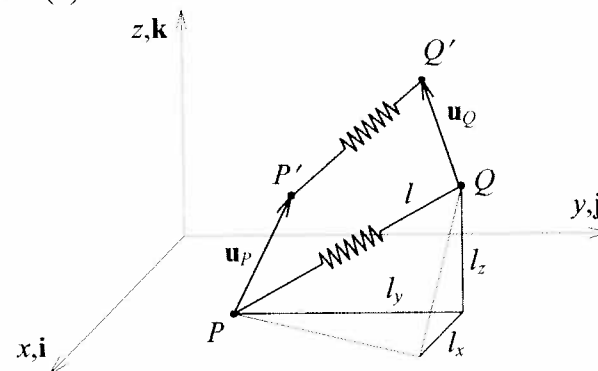


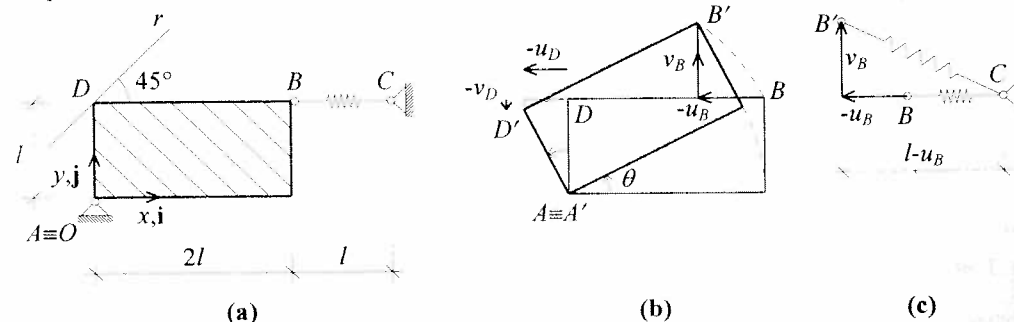
Fig. 2 Allungamento finito di una molla

- **Osservazione 1.** In regime di spostamenti finiti, la deformazione ε di un organo elastico è funzione non lineare degli spostamenti dei nodi dell'organo, i quali a loro volta sono funzioni non lineari degli spostamenti generalizzati.
- **Osservazione 2.** In presenza di vincoli le (1) e (2) si scrivono:

$$\eta_r = \eta_r(\mathbf{q}), \quad \varepsilon = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{q}), \quad \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

dove \mathbf{q} sono i parametri lagrangiani del sistema. Dunque, quanto sopra detto per i sistemi non vincolati vale anche per i sistemi vincolati, salvo sostituire agli spostamenti generalizzati \mathbf{u} i parametri lagrangiani \mathbf{q} . Tuttavia, se questa operazione è concettualmente semplice, è operativamente assai difficile. Infatti, i parametri lagrangiani sono variabili libere di spostamento che soddisfano *condizioni di vincolo non lineari*, del tipo delle Eq. (1.34), e quindi spesso *non sono determinabili in forma chiusa*. Pertanto, nello sviluppo della teoria di questo capitolo si farà riferimento a sistemi non vincolati, adottando la notazione ad essi relativa. Alcune applicazioni, invece, saranno riferite a semplici sistemi vincolati per i quali la determinazione dei parametri lagrangiani è immediata.

Esercizio 1: Determinare, in regime di grandi spostamenti, la componente η_r dello spostamento del punto D secondo la retta r indicata in Fig. (a). Calcolare poi l'allungamento della molla.



Il corpo rigido piano ruota di un angolo finito θ intorno ad $O \equiv A$. I punti D e B descrivono archi di circonferenza di centro O e raggi l e $5^{1/2}l$, rispettivamente (Fig. b). La FGSR (1.2), applicata ad una rotazione piana di centro $O \equiv A$, si scrive:

$$\mathbf{u}_p = (\cos \theta - 1)\mathbf{OP} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{OP} \quad (a)$$

con \mathbf{k} versore ortogonale al piano. Proiettata sulla base i, j (Fig. a) fornisce:

$$u_p = x(\cos \theta - 1) - y \sin \theta, \quad v_p = x \sin \theta + y(\cos \theta - 1) \quad (b)$$

Per il punto D si hanno le componenti di spostamento:

$$u_D = -l \sin \theta, \quad v_D = l(\cos \theta - 1) \quad (c)$$

che proiettate su r forniscono:

$$\eta_r = (u_D + v_D) \frac{\sqrt{2}}{2} = (\cos \theta - \sin \theta - 1)l \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (d)$$

Per il punto B si ha:

$$u_B = 2l(\cos \theta - 1) - l \sin \theta, \quad v_B = l(\cos \theta - 1) + 2l \sin \theta \quad (e)$$

Per calcolare l'allungamento della molla si fa riferimento alla Fig. (c); si ha:

$$\varepsilon = \overline{CB'} - \overline{CB} = \sqrt{(l - u_B)^2 + v_B^2} - l \quad (f)$$

Sostituendo le (e) si esprime ε in funzione di θ .

- **Osservazione 3.** In regime non lineare, l'allungamento di una molla dipende, oltre che dagli spostamenti di estremità longitudinali, anche da quelli trasversali, a differenza del caso lineare (si ricordi l'Osservazione 1.3). Con riferimento alla molla dell'Esercizio 1, se si sviluppa la (f) per piccoli u_B e v_B si ha:

$$\varepsilon = -u_B + \frac{1}{2}v_B^2 + \dots$$

che mostra come lo spostamento trasversale v_B fornisca un contributo del secondo ordine all'allungamento, trascurato nella teoria lineare.

1.3 L'equilibrio nella configurazione variata

Le condizioni di equilibrio di un sistema rigido a deformabilità concentrata sono costituite da un sistema di equazioni lineari nelle tensioni incognite σ (Eq. 5.19):

$$\mathbf{E}\sigma = \mathbf{f} \quad (4)$$

Nella teoria lineare i coefficienti della matrice di equilibrio \mathbf{E} assumono valori noti, legati alla geometria indeformata del sistema: si pensi ad esempio ai coseni direttori degli assi degli organi elastici, oppure ai bracci delle tensioni rispetto ai poli dei momenti, che nella teoria lineare sono appunto valutati nella configurazione naturale, assunta quale di riferimento del sistema (Fig. 3).

Analogamente, le forze generalizzate $\mathbf{f} = (\mathbf{F}_0, \mathbf{M})$ sono combinazioni lineari a coefficienti noti delle forze \mathbf{F}_r effettivamente applicate (cfr. Osservazione 3.5):

$$\mathbf{f} = \sum_r \mathbf{b}_r F_r \quad (5)$$

dove \mathbf{b}_r è il vettore di riduzione della forza \mathbf{F}_r al polo O solidale al corpo (Fig. 3a); esso contiene i coseni direttori della retta di azione e le coordinate del punto di applicazione di \mathbf{F}_r , tutti valutati nella configurazione di riferimento.

In realtà, come si è già osservato (Osservazione 5.7), la condizione di equilibrio tra forze attive e forze interne si realizza nella configurazione variata C' (Fig. 3b) dove la geometria (coseni direttori, coordinate dei punti) non è nota, bensì è funzione degli spostamenti generalizzati incogniti \mathbf{u} . Tuttavia le equazioni cardinali della statica sono lineari nelle forze; perciò le condizioni di equilibrio nella configurazione deformata si scrivono ancora come le (4) e (5), dove però le grandezze geometriche sono funzioni di \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u})\sigma &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \sum_r \mathbf{b}_r(\mathbf{u})F_r \end{aligned} \quad (6)$$

Le (6) rappresentano la formulazione non lineare diretta dell'equilibrio; esse tengono conto dell'influenza della deformazione degli organi elastici sull'equilibrio dei corpi.

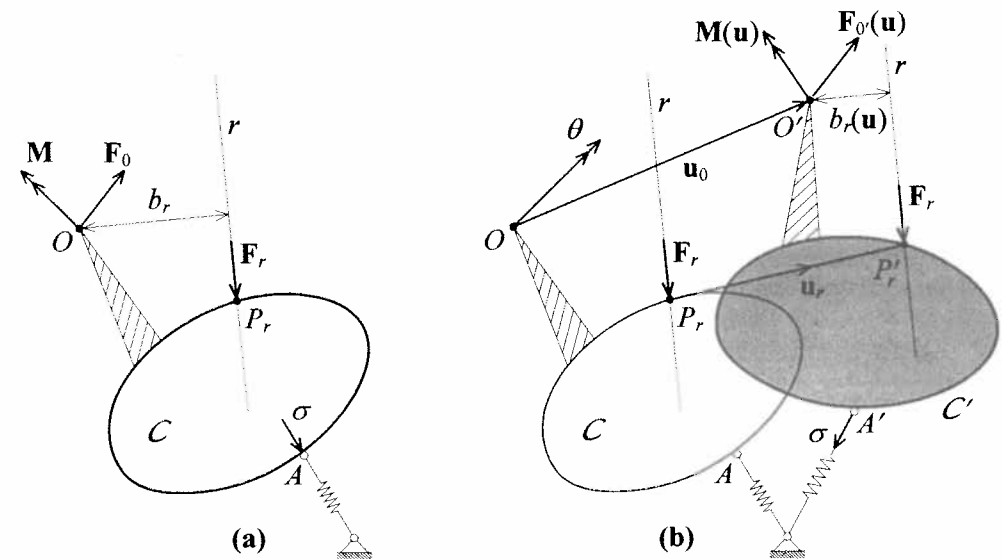


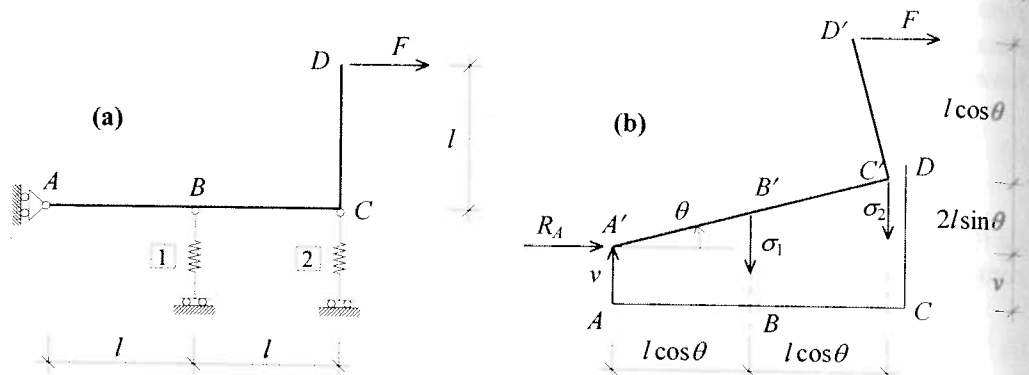
Fig. 3 Equilibrio: (a) nella configurazione naturale, (b) nella configurazione variata

- **Osservazione 4.** Nella (6₂) si è supposto che le forze non dipendano dalla configurazione (si veda la Fig. 3b, dove \mathbf{F}_r si mantiene parallela a se stessa).
- **Osservazione 5.** La (6₂) esprime il sistema delle forze \mathbf{F}_r ridotte al polo O' , la cui posizione è funzione degli spostamenti: $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\mathbf{F}_0(\mathbf{u}), \mathbf{M}(\mathbf{u})) \equiv (\mathbf{F}_0, \mathbf{M}(\mathbf{u}))$. Ad esempio il braccio di \mathbf{F}_r rispetto ad O' , indicato in Fig. (3b), è funzione della rotazione del corpo.
- **Osservazione 6.** Se il sistema è vincolato, coerentemente con l'Osservazione 2, \mathbf{u} , $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ ed $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ vanno sostituiti rispettivamente con \mathbf{q} , $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{p}(\mathbf{q})$.

Esercizio 2: Si scrivano le condizioni di equilibrio nella configurazione variata del sistema in Fig. (a); si confrontino poi le equazioni con quelle della teoria lineare. Si discuta il caso in cui gli estremi delle molle sono fissi al suolo.

La configurazione variata, indicata in Fig. (b), è individuata dai parametri lagrangiani v e θ . Sul sistema agiscono le tensioni σ_1 e σ_2 , dirette verticalmente, la forza attiva F e la reazione orizzontale R_A . Imponendo l'equilibrio alla traslazione secondo la verticale e l'equilibrio dei momenti rispetto alla posizione variata A' del punto A (cfr. Osservazione 5), si ha:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \quad (\sigma_1 + 2\sigma_2)l \cos \theta + Fl(2\sin \theta + \cos \theta) = 0 \quad (a)$$



Nella teoria lineare l'equilibrio è imposto nella configurazione naturale; posto $\theta=0$ nelle precedenti si ha:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0, \quad (\sigma_1 + 2\sigma_2)l + Fl = 0 \quad (b)$$

L'effetto del cambiamento di geometria si risente sulla seconda equazione; tuttavia, se gli estremi delle molle sono fissati al suolo, la direzione delle tensioni σ_1 e σ_2 non è più verticale, ma è funzione di θ , cosicché anche la prima equazione dipende da θ .

1.4 La formulazione diretta del problema elastico geometricamente non lineare

Il problema elastico geometricamente non lineare è governato dalle equazioni di congruenza (2), dalle equazioni di equilibrio (6) e dal legame costitutivo, assunto ancora lineare:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u})\sigma = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \varepsilon = \mathbf{d}(\mathbf{u}), \quad \sigma = \mathbf{C}\varepsilon \quad (7)$$

dove:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \sum_r \mathbf{b}_r(\mathbf{u})F_r \quad (8)$$

Il metodo più naturale per risolverlo è quello degli spostamenti. Combinando le (7) si ottiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{C}\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

Esse esprimono l'equilibrio del sistema nella configurazione variata in termini di spostamento.

- **Osservazione 7.** Poiché le (9) sono non lineari in \mathbf{u} , non è assicurata l'unicità della soluzione, come invece accade nella teoria lineare.

Esercizio 3: Si formuli il problema elastico per il sistema dell'Esercizio 2, assunte le molle di uguale rigidezza c .

Le equazioni di congruenza sono:

$$\varepsilon_1 = v + l \sin \theta, \quad \varepsilon_2 = v + 2l \sin \theta \quad (a)$$

Le tensioni corrispondenti valgono:

$$\sigma_1 = c(v + l \sin \theta), \quad \sigma_2 = c(v + 2l \sin \theta) \quad (b)$$

Sostituendo nelle equazioni di equilibrio (a) dell'Esercizio 2 si ha:

$$c(2v + 3l \sin \theta) = 0, \quad cl(3v + 5l \sin \theta) \cos \theta + Fl(2 \sin \theta + \cos \theta) = 0 \quad (c)$$

Dalla prima si ricava $\sin \theta = -2v/(3l)$; sostituendo nella seconda, e assunto $|\theta| < \pi/2$ (cioè $\cos \theta > 0$), si ha:

$$4\tilde{F}\tilde{v} + \sqrt{1 - \frac{4}{9}\tilde{v}^2}(\tilde{v} - 3\tilde{F}) = 0 \quad (d)$$

avendo indicato con \tilde{v} ed \tilde{F} le grandezze adimensionali

$$\tilde{v} = \frac{v}{l}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{cl} \quad (e)$$

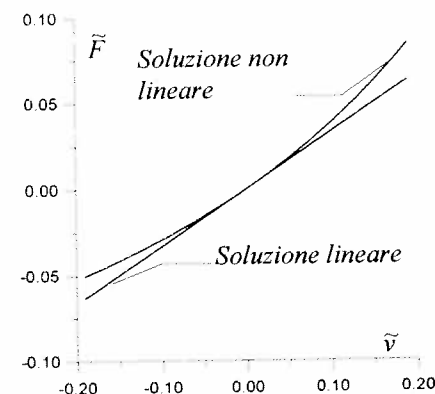
L'equazione (d) è trascendente nell'incognita \tilde{v} , e può essere risolta solo numericamente. Tuttavia, poiché l'equazione è lineare rispetto ad \tilde{F} , può essere risolta rispetto a quest'ultima:

$$\tilde{F} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{9}\tilde{v}^2}}{-4\tilde{v} + 3\sqrt{1 - \frac{4}{9}\tilde{v}^2}} \tilde{v} \quad (f)$$

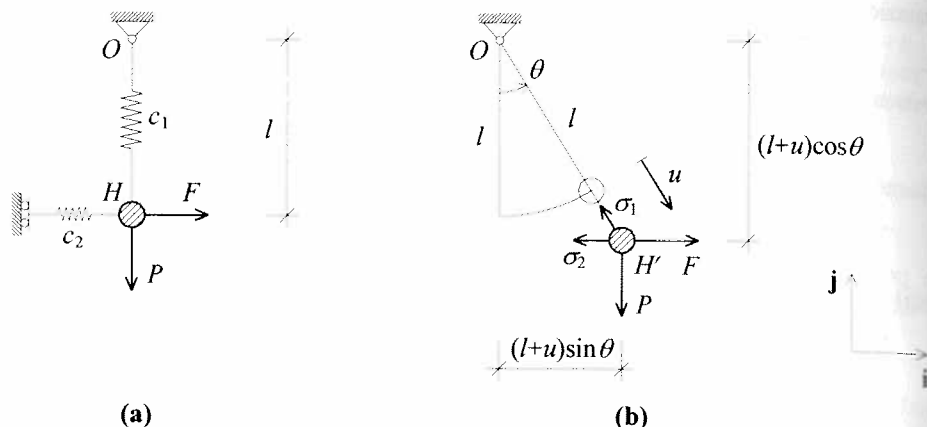
Per $\tilde{v} \ll 1$ (ovvero per $v \ll l$) la radice quadrata può essere approssimata con l'unità, cosicché l'equazione (f) fornisce la soluzione del corrispondente problema lineare:

$$\tilde{F} = \frac{1}{3}\tilde{v} \quad (g)$$

In figura sono messe a confronto le soluzioni lineare (g) e non lineare (f). Dall'esame della figura si nota che, per piccoli valori di \tilde{F} , il problema lineare costituisce un'ottima approssimazione del corrispondente problema non lineare. Tuttavia, per valori grandi di \tilde{F} le due soluzioni differiscono in modo apprezzabile.



Esercizio 4: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si scrivano le equazioni non lineari di equilibrio in termini di spostamenti.



Si assumano u e θ (Fig. b) come spostamenti generalizzati (riferimento polare, dove è più semplice esprimere la deformazione della molla verticale). Le equazioni di equilibrio associate richiedono l'annullamento della risultante delle forze nella direzione di u e del momento delle forze rispetto ad O . Nella configurazione variata si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sin \theta \\ 0 & (l+u)\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} \sin \theta \\ (l+u)\cos \theta \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ -(l+u)\sin \theta \end{Bmatrix} \quad (a)$$

La matrice a primo membro è l'operatore di equilibrio $\mathbf{E}(\mathbf{u})$, dipendente dagli spostamenti u e θ ; i vettori a secondo membro sono i vettori $\mathbf{b}_r(\mathbf{u})$ (Eq. 5); le (a) sono del tipo (6₁).

Le equazioni di congruenza sono:

$$\varepsilon_1 = u, \quad \varepsilon_2 = (l+u)\sin \theta \quad (b)$$

Tenuto conto del legame elastico $\sigma_1 = c_1 \varepsilon_1$, $\sigma_2 = c_2 \varepsilon_2$, le (a) si scrivono:

$$c_1 u + c_2 (l+u)\sin^2 \theta = F \sin \theta + P \cos \theta \quad (c)$$

$$c_2 (l+u)^2 \sin \theta \cos \theta = F(l+u)\cos \theta - P(l+u)\sin \theta$$

Esse costituiscono un sistema di due equazioni non lineari in due incognite, la cui soluzione può essere determinata solo numericamente.

1.5 Spostamenti infinitesimi del sistema deformato

In vista della formulazione del teorema dei lavori virtuali (Par. 1.8) e al fine di mostrare certe proprietà di dualità (Par. 1.7), è d'interesse sovrapporre allo stato deformato del sistema un campo di spostamenti virtuali infinitamente piccoli.

Sia C' la configurazione variata assunta dal sistema, descritta dal vettore degli spostamenti generalizzati $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \theta)^T$, misurati a partire dalla configurazione naturale (di riferimento) C (Fig. 4). A seguito dello spostamento \mathbf{u} , il punto materiale P_r subisce uno spostamento \mathbf{u}_r , occupando una nuova posizione P'_r ; sia η_r la componente di \mathbf{u}_r secondo una data retta (fissa) dello spazio.

Si assegni poi un campo di spostamenti virtuali $\delta \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}_0, \delta \theta)^T$ che porti il sistema dalla

configurazione C' alla configurazione (infinitamente vicina) C'' .

- Osservazione 8.** Gli spostamenti generalizzati $\delta \mathbf{u}$ sono le traslazioni $\delta \mathbf{u}_0$ di O' e le rotazioni $\delta \theta$ intorno a tre assi passanti per O' , posizione variata di O (si veda poi l'Esercizio 5).

Corrispondentemente il punto materiale P_r subisce uno spostamento $\delta \mathbf{u}_r$, portandosi da P'_r in P''_r . Si vuole calcolare la componente $\delta \eta_r$ di $\delta \mathbf{u}_r$ secondo la fissata retta r .

Poiché è $\eta_r = \eta_r(\mathbf{u})$, differenziando si ha:

$$\delta \eta_r = \mathbf{a}_r^T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \quad (10)$$

dove si è posto:

$$\mathbf{a}_r(\mathbf{u}) = \frac{\partial \eta_r(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad a_{rj} := \frac{\partial \eta_r}{\partial u_j} \quad (11)$$

con $\mathbf{a}_r(\mathbf{u})$ vettore di influenza su η_r degli spostamenti generalizzati.

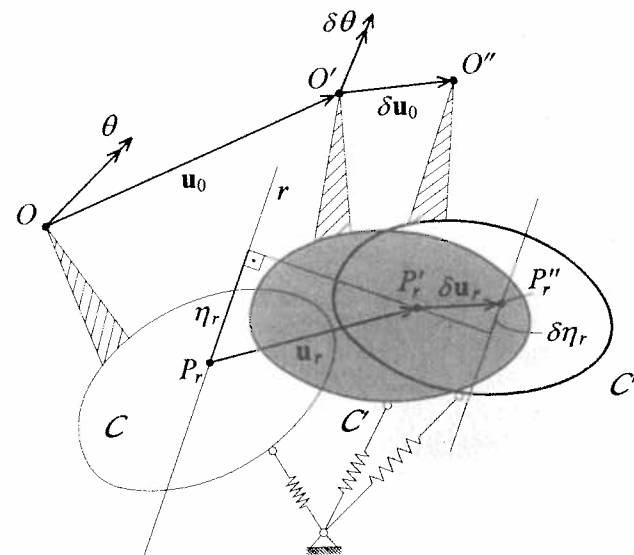
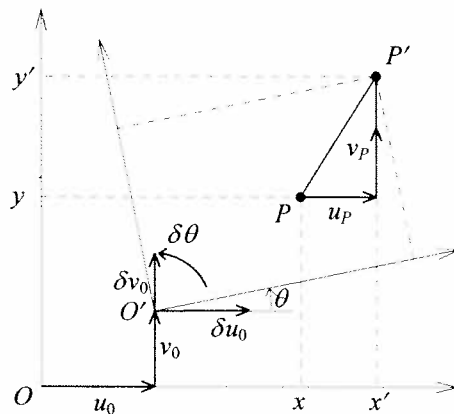


Fig. 4 Spostamenti infinitesimi sovrapposti alla configurazione variata C'

- Osservazione 9.** La (10) è analoga alla $\eta_r = \mathbf{a}_r^T \mathbf{u}$, discussa nell'Osservazione 3.5, dove però \mathbf{a}_r è relativo alla configurazione di riferimento.
- Osservazione 10.** Nota C' , il vettore $\mathbf{a}_r(\mathbf{u})$ può naturalmente essere costruito ignorando le relazioni non lineari $\eta_r = \eta_r(\mathbf{u})$. Basta infatti applicare al sistema nella configurazione variata i metodi della cinematica lineare, come sarà illustrato nell'Esercizio 6.

Esercizio 5: Dimostrare che la variazione di uno spostamento rigido piano finito ridotto ad un polo O , è uno spostamento rigido piano infinitesimo ridotto al polo O' , posizione variata di O .



Con riferimento alle notazioni in figura, la FGSR (1.2) in forma scalare si scrive:

$$u_p = u_0 + x(\cos \theta - 1) - y \sin \theta, \quad v_p = v_0 + x \sin \theta + y(\cos \theta - 1) \quad (a)$$

A seguito dello spostamento (u_0, v_0, θ) , il punto $P(x, y)$ si porta in $P'(x', y')$, di coordinate:

$$x' = x + u_p = u_0 + x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = y + v_p = v_0 + x \sin \theta + y \cos \theta \quad (b)$$

Facendo la variazione delle (a) e utilizzando le (b) si ha:

$$\begin{aligned} \delta u_p &= \delta u_0 - (x \sin \theta + y \cos \theta) \delta \theta = \delta u_0 - (y' - v_0) \delta \theta \\ \delta v_p &= \delta v_0 + (-y \sin \theta + x \cos \theta) \delta \theta = \delta v_0 + (x' - u_0) \delta \theta \end{aligned} \quad (c)$$

Le (c) rappresentano uno spostamento rigido infinitesimo ridotto al polo O' .

Esercizio 6: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 4 si determini la componente orizzontale $\eta = u_H$ dello spostamento del punto H di applicazione delle forze, congruente con spostamenti infinitesimi δu e $\delta \theta$ assegnati a partire dallo stato variato. Si applichi prima la (10), poi l'Osservazione 10.

Poiché è

$$\eta = (l+u) \sin \theta \quad (a)$$

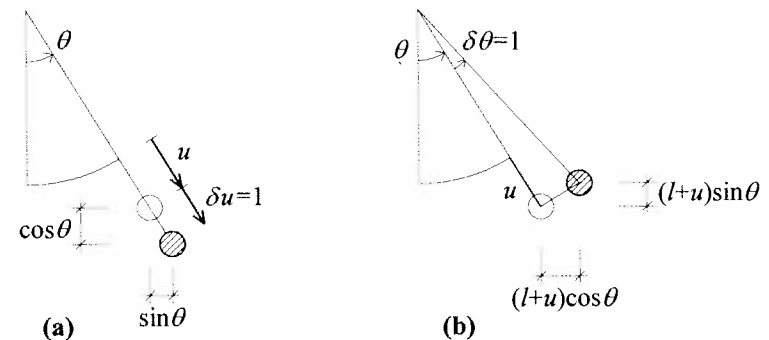
differenziando si ha:

$$\delta \eta = \begin{bmatrix} \sin \theta & (l+u) \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta \theta \end{Bmatrix} \quad (b)$$

da cui

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sin \theta & (l+u) \cos \theta \end{bmatrix}^T \quad (c)$$

Applicando invece i metodi della cinematica lineare, si costruisce $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ per elementi. Assegnando uno spostamento generalizzato per volta ($\delta u=1, \delta \theta=0$; $\delta u=0, \delta \theta=1$) si hanno i campi di spostamento rispettivamente in Fig. (a) e (b). Le componenti orizzontali dello spostamento di H sono gli elementi di $\mathbf{a}(\mathbf{u})$.



- **Osservazione 11.** Nell'Esercizio 6, a prima vista, sembra violata l'Osservazione 8. Così non è, in quanto (u, θ) rappresentano traslazioni del punto materiale descritte in un riferimento polare, e non una traslazione ed una rotazione.

1.6 La matrice di congruenza infinitesima del sistema deformato

Procedendo come nel paragrafo precedente, si voglia determinare lo stato di deformazione infinitesima $\delta \epsilon$ congruente con il campo di spostamenti infinitesimi $\delta \mathbf{u} = (\delta u_0, \delta \theta)$, assegnato a partire dalla configurazione variata C' , individuata dagli spostamenti generalizzati \mathbf{u} (Fig. 5).

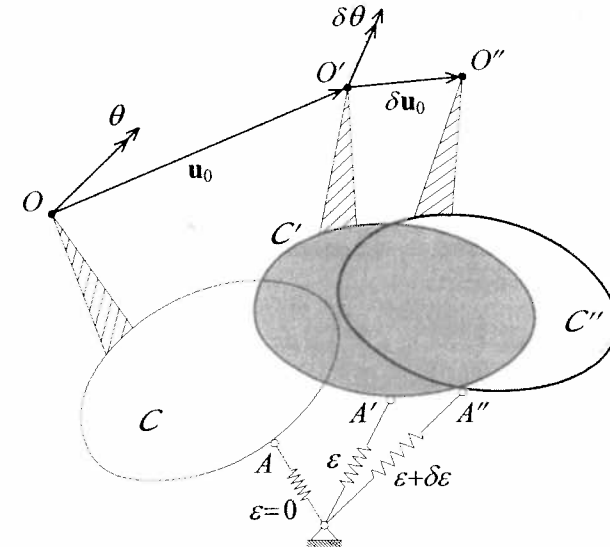


Fig. 5 Spostamenti $\delta \mathbf{u}$ e deformazioni infinitesime $\delta \epsilon$ sovrapposti ad uno stato variato C'

Poiché è $\epsilon = \mathbf{d}(\mathbf{u})$ (Eq. 2), differenziando si ha:

$$\delta \epsilon = \mathbf{D}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \quad (12)$$

dove si è posto:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) := \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad D_{ij} := \frac{\partial d_i}{\partial u_j} \quad (13)$$

Nella (12) $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ è una matrice che fornisce le deformazioni infinitesime $\delta\epsilon$ congruenti con gli spostamenti infinitesimi $\delta\mathbf{u}$, assegnati a partire dallo stato variato \mathbf{u} ; essa rappresenta la matrice di congruenza infinitesima del sistema deformato.

- **Osservazione 12.** Nota \mathbf{C}' , la matrice $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ può naturalmente essere costruita anche ignorando le equazioni di congruenza non lineari (2). Basta infatti applicare al sistema nella configurazione variata i metodi della cinematica lineare, come l'Esercizio 7 che segue illustra.

Esercizio 7: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 4 si determini la matrice di congruenza infinitesima del sistema deformato applicando prima la (12) e poi l'Osservazione 12.

Dalle (b) dell'Esercizio (4) è

$$\mathbf{d} = \{u \quad (l+u)\sin\theta\}^T \quad (a)$$

applicando la (12) si ha:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial u} & \frac{\partial d_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_2}{\partial u} & \frac{\partial d_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & (l+u)\cos\theta \end{bmatrix} \quad (b)$$

Se invece si applicano i metodi della cinematica lineare si può costruire $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ per colonne. Con riferimento alle Fig. (a) e (b) dell'Esercizio 6, per $\delta u=1$ e $\delta\theta=0$ si ha $\epsilon_1=1$, $\epsilon_2=\sin\theta$; per $\delta u=0$ e $\delta\theta=1$ si ha $\epsilon_1=0$, $\epsilon_2=(l+u)\cos\theta$. Le deformazioni così ottenute sono le colonne di $\mathbf{D}(\mathbf{u})$.

1.7 Dualità

Analogamente a quanto dimostrato nell'Osservazione 3.5 con riferimento allo stato indeformato, tra il vettore d'influenza dello spostamento $\mathbf{a}_r(\mathbf{u})$, che appare nell'Equazione (10), e il vettore di riduzione al polo $\mathbf{b}_r(\mathbf{u})$, presente nell'Equazione (6), sussiste la proprietà di dualità

$$\mathbf{a}_r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_r(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \quad (14)$$

Il primo vettore raccoglie infatti i coefficienti della combinazione lineare che esprime la componente di spostamento infinitesimo $\delta\eta_r$ (Fig. 4) in funzione degli spostamenti generalizzati (infinitesimi) riferiti al polo O' (Osservazione 8) e misurati a partire dalla configurazione variata \mathbf{C}' . Il secondo rappresenta il contributo della forza \mathbf{F}_r , duale dello spostamento $\delta\eta_r$, agente nella stessa configurazione variata, al vettore delle forze generalizzate attive riferite allo stesso polo O' (Osservazione 5). Un esempio è offerto dall'Esercizio 6, dove il vettore $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ trovato (Eq. c) coincide con il vettore $\mathbf{b}(\mathbf{u})$ che rappresenta il contributo della forza duale F alle forze attive generalizzate (Eq. a) dell'Esercizio 4. Stante le (11) e (14) può dunque scriversi che:

$$\mathbf{b}_r(\mathbf{u}) = \frac{\partial \eta_r(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad b_{rj} = \frac{\partial \eta_r}{\partial u_j} \quad (15)$$

Un'altra proprietà di dualità lega la matrice di congruenza infinitesima $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ (13) e la

matrice di equilibrio $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ del sistema deformato; è infatti:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}^T(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \quad (16)$$

come si è già dimostrato nella teoria lineare per un generico sistema di corpi rigidi ed organi elastici. Assegnato \mathbf{u} , infatti, il sistema assume una data configurazione: in questa $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ esprime l'equilibrio tra le tensioni agenti (indipendentemente dalle cause che le hanno prodotte), e le forze attive; $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ esprime invece le deformazioni infinitesime misurate a partire da quella configurazione. Poiché, come si è detto, entrambi i problemi, cinematico e statico, sono riferiti agli stessi poli O' , la (16) è soddisfatta. Ad esempio la matrice $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ dell'Esercizio 4 (Eq. a) e la matrice $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ dell'Esercizio 7 (Eq. b) verificano questa proprietà. Stanti le (13) e (16) è:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right)^T, \quad E_{ij} = \frac{\partial d_j}{\partial u_i} \quad (17)$$

1.8 Il teorema dei lavori virtuali: la formulazione integrale dell'equilibrio

Le due proprietà di dualità, (15) e (17), permettono di dimostrare la validità del TLV anche in campo non lineare. Si consideri un sistema di forze e tensioni equilibrato nella configurazione variata \mathbf{C}' (Eq. 6₁), tali cioè che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u})\sigma = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (18)$$

ed un campo di spostamenti virtuali $\delta\mathbf{u}$ e deformazioni virtuali $\delta\epsilon$ congruenti assegnati a partire da \mathbf{C}' , tali cioè che (Eq. 12):

$$\mathbf{D}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} = \delta\epsilon \quad (19)$$

Il lavoro virtuale esterno risulta:

$$L_e = \sum_r F_r \delta\eta_r = \sum_r F_r \left(\frac{\partial \eta_r}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta\mathbf{u} = \left(\sum_r F_r \mathbf{b}_r(\mathbf{u}) \right)^T \delta\mathbf{u} = [\mathbf{f}(\mathbf{u})]^T \delta\mathbf{u} \quad (20)$$

avendo usato la (15) e poi la (6₂); può perciò esprimersi in termini di forze generalizzate. Utilizzando poi le (18), (16) e (19) si ha:

$$L_e = [\mathbf{f}(\mathbf{u})]^T \delta\mathbf{u} = \sigma^T [\mathbf{E}(\mathbf{u})]^T \delta\mathbf{u} = \sigma^T \mathbf{D}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} = \sigma^T \delta\epsilon = L_i \quad (21)$$

Risulta perciò dimostrata l'ELV.

L'ELV può essere utilizzata per formulare l'equilibrio (corollario degli spostamenti virtuali). Imponendo che sia:

$$[\mathbf{f}(\mathbf{u})]^T \delta\mathbf{u} = \sigma^T \delta\epsilon \quad \forall (\delta\mathbf{u}, \delta\epsilon) \quad \mathbf{D}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} = \delta\epsilon \quad (22)$$

si ricava, con facili passaggi, la condizione di equilibrio (18).

Esercizio 8: Applicando la formulazione integrale, si ottengano le equazioni di equilibrio non lineari del sistema dell'Esercizio 4.

A partire dalla generica configurazione variata (Fig. (b) dell'Esercizio 4) si assegnano degli spostamenti virtuali (Fig. (a) e (b) dell'Esercizio 6). Il punto H subisce uno spostamento virtuale di componenti:

$$\delta u_H = \sin \theta \delta u + (l + u) \cos \theta \delta \theta, \quad \delta v_H = -\cos \theta \delta u + (l + u) \sin \theta \delta \theta \quad (a)$$

e le molle subiscono deformazioni:

$$\delta \varepsilon_1 = \delta u, \quad \delta \varepsilon_2 = \sin \theta \delta u + (l + u) \cos \theta \delta \theta \quad (b)$$

Il lavoro virtuale esterno è:

$$L_e = F \delta u_H - P \delta v_H = (F \sin \theta + P \cos \theta) \delta u + (l + u)(F \cos \theta - P \sin \theta) \delta \theta \quad (c)$$

Il lavoro virtuale interno è:

$$L_i = \sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 \sin \theta) \delta u + \sigma_2 (l + u) \cos \theta \delta \theta \quad (d)$$

Eguagliando i due lavori si ha (ELV):

$$[(\sigma_1 + \sigma_2 \sin \theta) - (F \sin \theta + P \cos \theta)] \delta u + (l + u)[\sigma_2 \cos \theta - F \cos \theta + P \sin \theta] \delta \theta = 0 \quad (\forall \delta u, \delta \theta) \quad (e)$$

da cui si riottengono le equazioni di equilibrio (a) dell'Esercizio 4.

1.9 Il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Il teorema di stazionarietà dell'EPT, dimostrato nel Par. 6.2.5 in ambito strettamente lineare, conserva la sua validità in campo non lineare. L'EPT è definita come:

$$U(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \quad (23)$$

dove

$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\varepsilon(\mathbf{u})]^T \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (24)$$

è l'energia potenziale elastica, e

$$W(\mathbf{u}) = \sum_r F_r \eta_r(\mathbf{u}) \quad (25)$$

è il potenziale dei carichi, uguale al lavoro compiuto dalle forze \mathbf{F}_r (supposte indipendenti dalla posizione \mathbf{u}) negli spostamenti η_r dei punti di applicazione. Sostituendo ad $\varepsilon(\mathbf{u})$ le condizioni di congruenza non lineari (2), si ha:

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} [\mathbf{d}(\mathbf{u})]^T \mathbf{C} \mathbf{d}(\mathbf{u}) - \sum_r F_r \eta_r(\mathbf{u}) \quad (26)$$

- **Osservazione 13.** L'EPT è in generale una *funzione trascendente* degli spostamenti generalizzati \mathbf{u} , a differenza del caso lineare (Eq. 6.23) in cui è semplicemente una forma quadratica. Ciò è conseguenza delle non linearità geometriche che intervengono sia nelle equazioni di congruenza $\varepsilon = \mathbf{d}(\mathbf{u})$, che nelle relazioni $\eta_r = \eta_r(\mathbf{u})$.

Imponendo la stazionarietà di $U(\mathbf{u})$ si ha:

$$\delta U(\mathbf{u}) = [\delta \mathbf{d}(\mathbf{u})]^T \mathbf{C} \mathbf{d}(\mathbf{u}) - \sum_r F_r \delta \eta_r(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (27)$$

Stanti le proprietà di dualità (17) e (15) è:

$$\delta \mathbf{d}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = [\mathbf{E}(\mathbf{u})]^T \delta \mathbf{u}, \quad \delta \eta_r(\mathbf{u}) = \left[\frac{\partial \eta_r(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u} = [\mathbf{b}_r(\mathbf{u})]^T \delta \mathbf{u} \quad (28)$$

per cui la (27) si scrive:

$$\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{C} \mathbf{d}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u})] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (29)$$

avendo usato la (6₂). Dalle (29) seguono le equazioni di equilibrio non lineari (9) espresse in termini di spostamenti.

- **Osservazione 14.** A differenza della teoria lineare non è più assicurato che U atinga un minimo in un punto di equilibrio, potendo questo essere anche un massimo o un punto non estremo. Questa circostanza influenza la *qualità dell'equilibrio*, che può essere *stabile* o *instabile*. Un cenno su questo problema sarà dato nel seguito (cfr. Par. 11.4.6).

Esercizio 9: Seguendo la formulazione variazionale si ottengano le equazioni di equilibrio non lineari del sistema dell'Esercizio 4, espresse in termini di spostamento.

L'EPT si scrive:

$$U = \frac{1}{2} (c_1 \varepsilon_1^2 + c_2 \varepsilon_2^2) - F u_H + P v_H \quad (a)$$

dove ε_1 , ε_2 , u_H e v_H sono funzioni non lineari degli spostamenti generalizzati u e θ :

$$\varepsilon_1 = u, \quad \varepsilon_2 = (l + u) \sin \theta, \quad u_H = (l + u) \sin \theta, \quad v_H = l - (l + u) \cos \theta \quad (b)$$

Sostituendo nell'EPT, a meno di una costante inessenziale, si ha:

$$U = \frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_2 (l + u)^2 \sin^2 \theta - F(l + u) \sin \theta - P(l + u) \cos \theta \quad (c)$$

Per la stazionarietà di U devono annullarsi le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u} &= c_1 u + c_2 (l + u) \sin^2 \theta - F \sin \theta - P \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= c_2 (l + u)^2 \sin \theta \cos \theta - F(l + u) \cos \theta + P(l + u) \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

che costituiscono le cercate condizioni di equilibrio, già ottenute nell'Esercizio 4.

2. La teoria linearizzata

2.1 L'analisi incrementale

Le equazioni non lineari dell'equilibrio descrivono tutte le possibili soluzioni del problema elastico. Tuttavia, per strutture complesse, sono di difficile scrittura ed ancora di più difficile soluzione. Nell'ottica di una soluzione approssimata del problema risulta più agevole la seguente strategia: anziché far agire il carico direttamente con il suo valore finale, lo si fraziona in piccoli incrementi e si segue l'evoluzione del sistema. In questo modo il cambiamento di geometria corrispondente ad ogni incremento (passo) di carico è piccolo, cosicché si possono ricercare posizioni di equilibrio infinitamente prossime a quella determinata al passo precedente, e perciò governate da equazioni lineari nell'incremento di spostamento. Il problema non lineare è quindi ricondotto alla soluzione di una successione di problemi lineari. Ciascuno di questi, però, è relativo ad un sistema presollecitato in quanto sottoposto a tutti gli incrementi di carico precedenti; deve essere quindi specificamente formulato. Il metodo, detto di *analisi incrementale*, è suscettibile di diversi raffinamenti tecnici; tuttavia la sua descrizione esula dagli scopi di questo testo. Qui ha interesse invece formulare e risolvere il *problema linearizzato dell'equilibrio di un sistema presollecitato* (che può essere visto come il singolo passo del metodo illustrato): la teoria che ne discende è detta *teoria linearizzata*. La formulazione permetterà di studiare i fenomeni di cui si è detto nel Par. 1.1 e che verranno analizzati nel successivo Cap. 10.

2.2 Il problema elastico incrementale

Il problema si pone in questi termini. È data una struttura la cui configurazione naturale è C (Fig. 6a). Applicato un sistema di forze $\bar{\mathbf{F}} = \{\bar{\mathbf{F}}_r\}$ ($r=1,2,\dots$), la struttura si porta in una configurazione equilibrata e congruente \bar{C} in cui le tensioni sono $\bar{\sigma}$, le deformazioni $\bar{\varepsilon}$ e gli spostamenti, misurati a partire da C , sono $\bar{\mathbf{u}}$ (Fig. 6b). Valgono perciò le (7) e (8) calcolate in \bar{C} :

$$\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{f}}, \quad \bar{\sigma} = \mathbf{C} \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \mathbf{d}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (30)$$

dove $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) = [\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})]^T$ è la matrice di congruenza infinitesima in \bar{C} (trasposta della matrice di equilibrio); per la (17), è anche uguale a:

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \quad (31)$$

Inoltre è:

$$\bar{\mathbf{f}} = \sum_r \bar{\mathbf{b}}_r \bar{\mathbf{F}}_r \quad (32)$$

con $\bar{\mathbf{b}}_r = \mathbf{b}_r(\bar{\mathbf{u}})$. Tutte le grandezze relative a \bar{C} sono assunte note. \bar{C} è detta *configurazione di presollecitazione* ed è assunta come configurazione di riferimento; $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ ed $\bar{\mathbf{F}}_r$ sono rispettivamente dette la *pretensione*, la *predeformazione* e le *forze di presollecitazione*.

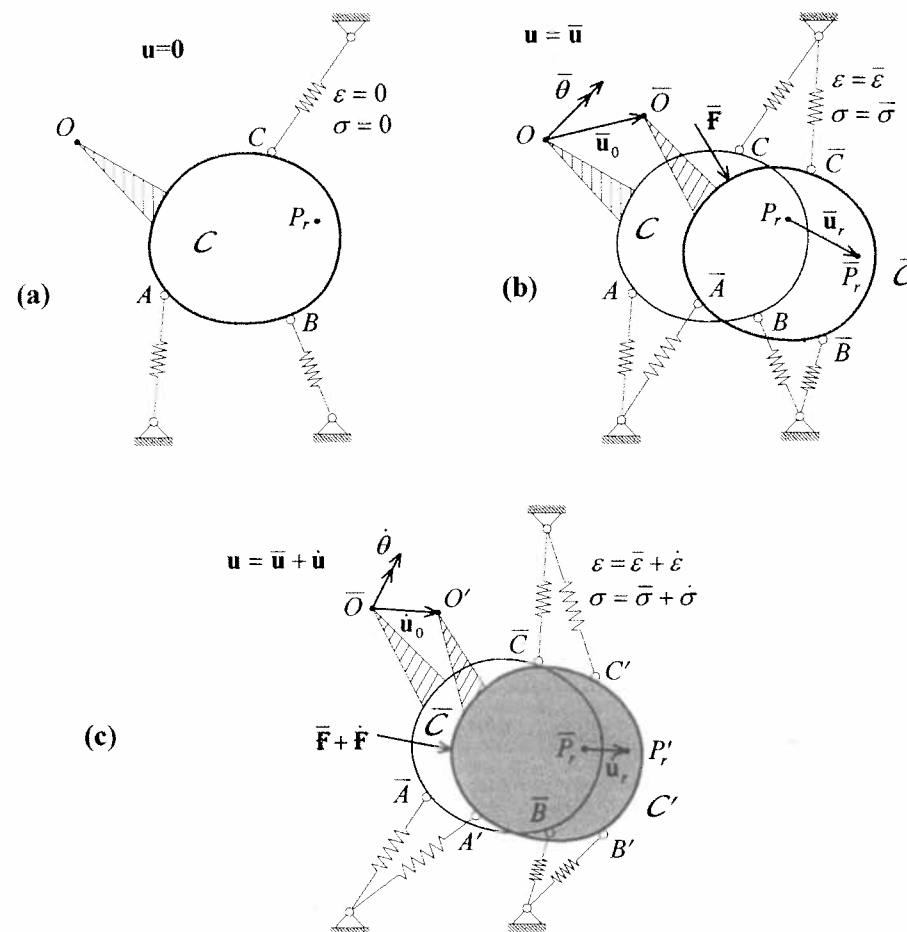


Fig. 6 (a) Configurazione naturale C ; (b) configurazione di presollecitazione \bar{C} ; (c) configurazione variata C'

- **Osservazione 15.** A differenza della teoria non lineare, dove la configurazione di riferimento è quella naturale, nella teoria linearizzata la configurazione di riferimento è quella presollecitata.

Sul sistema presollecitato agiscono poi delle *forze incremental* $\dot{\mathbf{F}} = \{\dot{\mathbf{F}}_s\}$ ($s=1,2,\dots$). Il sistema muta la propria geometria e trova una nuova configurazione di equilibrio C' detta *configurazione variata* (Fig. 6c).

- **Osservazione 16.** Con riferimento al sistema dell'Esercizio 4, assunta P come presollecitazione ed F come forza incrementale, la configurazione naturale è quella di Fig. (a); la configurazione di riferimento è rettilinea, in cui la molla 1 si è allungata di P/c_1 ; la configurazione variata è quella di Fig. (b).

Nella configurazione variata C' il problema elastico è governato dalle (7):

$$[D(u)]^T \sigma = f(u), \quad \sigma = C\varepsilon, \quad \varepsilon = d(u) \quad (33)$$

dove $D(u) = [E(u)]^T = \partial d / \partial u$ è la matrice di congruenza infinitesima in C' (trasposta della matrice di equilibrio) e dove u , ε e σ sono misurati a partire da C . Nelle (33₁)

$$f(u) = \sum_r b_r(u) \bar{F}_r + \sum_s b_s(u) \dot{F}_s \quad (34)$$

sono le forze generalizzate, date dalla somma di due contributi, delle forze di presollecitazione e delle forze incrementali, tutte riferite alla posizione attuale dei poli di riduzione.

In C' le tensioni σ , le deformazioni ε e gli spostamenti u possono essere espressi nella forma incrementale:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \dot{\sigma}, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}, \quad u = \bar{u} + \dot{u} \quad (35)$$

dove $\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}$ ed \dot{u} sono gli incrementi rispettivamente di tensione, deformazione e spostamento, relativi al passaggio del sistema da \bar{C} a C' .

Il problema elastico incrementale si pone in questi termini: *noti gli spostamenti \bar{u} , le deformazioni $\bar{\varepsilon}$ e le tensioni $\bar{\sigma}$ che soddisfano le (30) (relative allo stato di presollecitazione), determinare gli incrementi di spostamento \dot{u} , di deformazione $\dot{\varepsilon}$ e di tensione $\dot{\sigma}$ che soddisfano le (33) (relative allo stato variato).*

2.3 La linearizzazione negli incrementi: l'equilibrio adiacente

A questo punto si introduce un'ipotesi fondamentale: *gli incrementi di forza \dot{F}_s e i corrispondenti incrementi di tensione $\dot{\sigma}$, deformazione $\dot{\varepsilon}$ e di spostamento \dot{u} sono tutti piccoli dello stesso ordine.* Le equazioni del problema elastico (33) possono quindi essere linearizzate negli incrementi (da cui il nome *teoria linearizzata*). Poiché C' è infinitamente vicina a \bar{C} è anche detta *configurazione adiacente* e lo stato di equilibrio ad essa relativo è pure detto *stato di equilibrio adiacente*.

Si incominci con il linearizzare le equazioni di equilibrio (33₁), nonché le (34). Stante la (35₃), la matrice di congruenza $D(u)$ ed i coefficienti $b_r(u)$ possono anch'essi essere espressi nella forma incrementale:

$$D(u) = \bar{D} + \dot{D}, \quad b_r(u) = \bar{b}_r + \dot{b}_r \quad (36)$$

dove, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è:

$$\dot{D} = \sum_{k=1}^n \bar{D}_k \dot{u}_k, \quad \dot{b}_r = \sum_{k=1}^n \bar{b}_{rk} \dot{u}_k \quad (37)$$

con

$$\bar{D}_k = \frac{\partial D}{\partial u_k} \bigg|_{u=\bar{u}}, \quad \bar{b}_{rk} = \frac{\partial b_r}{\partial u_k} \bigg|_{u=\bar{u}} \quad (38)$$

• **Osservazione 17.** La matrice \bar{D}_k rappresenta l'incremento della matrice di congruenza infinitesima D del sistema, conseguente al passaggio dalla configurazione di presollecitazione a quella adiacente, individuata da $\dot{u}_k = 1$ e $\dot{u}_j = 0$ per $j \neq k$. La sommatoria che appare nella (37₁) esprime dunque l'incremento \dot{D} della matrice D come sovrapposizione di effetti (si veda poi l'Esercizio 11). Analoga interpretazione sussiste per i vettori b_{rk} .

• **Osservazione 18.** Poiché le operazioni di trasposizione e derivazione sono permutabili, è anche $\bar{E}_k = \bar{D}_k^T$, con $\bar{E}_k = \partial E / \partial u_k |_{u=\bar{u}}$.

Utilizzando le (36), l'equazione di equilibrio (33₁) si scrive:

$$(\bar{D}^T + \dot{D}^T)(\bar{\sigma} + \dot{\sigma}) = \bar{f} + \sum_r \bar{b}_r \bar{F}_r + \sum_s (\bar{b}_s + \dot{b}_s) \dot{F}_s \quad (39)$$

Tenuto conto dell'equilibrio preesistente (Eq. 30₁) e linearizzando negli incrementi si ha:

$$\bar{D}^T \dot{\sigma} + \dot{D}^T \bar{\sigma} = \sum_r \dot{b}_r \bar{F}_r + \sum_s \bar{b}_s \dot{F}_s \quad (40)$$

• **Osservazione 19.** Le equazioni di equilibrio incrementale (40) hanno la seguente struttura: gli incrementi di tensione $\dot{\sigma}$ sono riferiti alla geometria iniziale (cioè i punti di applicazione e le direzioni delle forze sono valutati in \bar{C}); le tensioni preesistenti $\bar{\sigma}$ sono invece riferite al cambiamento di geometria (cioè alle variazioni delle coordinate dei punti di applicazione e delle direzioni delle forze). Una circostanza analoga si verifica per le forze attive: gli incrementi di forza \dot{F}_s sono riferiti alla geometria iniziale, le forze preesistenti \bar{F}_s al cambiamento di geometria.

2.4 Le equazioni dell'equilibrio adiacente in termini di spostamento

Per esprimere le (40) in termini di spostamenti incrementali occorre usare le (37) che, per quanto detto nell'Osservazione 17, forniscono \dot{D} e \dot{b}_r come funzioni lineari di \dot{u} , ed inoltre porre nella forma incrementale, oltre alla (33₁), anche le (33₂) e (33₃). Per queste ultime si ha:

$$\dot{\sigma} = C \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \bar{D} \dot{u} \quad (41)$$

in quanto, tenuto conto della (31), è:

$$d(u) = d(\bar{u} + \dot{u}) = d(\bar{u}) + \frac{\partial d}{\partial u} \bigg|_{u=\bar{u}} \dot{u} = \bar{\varepsilon} + \bar{D} \dot{u} \quad (42)$$

dove $\bar{\varepsilon} = d(\bar{u})$. Sostituendo le (41) nella (40), si ha:

$$\bar{D}^T C \bar{D} \dot{u} + \sum_{k=1}^n \dot{u}_k \left(\bar{D}_k^T \bar{\sigma} - \sum_r \bar{b}_{rk} \bar{F}_r \right) = \sum_s \bar{b}_s \dot{F}_s \quad (43)$$

Le (43) possono essere riscritte in forma compatta come:

$$K \dot{u} + G \dot{u} = \dot{f} \quad (44)$$

dove:

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{D}} \quad (45)$$

è la matrice di rigidezza elastica,

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_\sigma + \mathbf{G}_r$$

$$\mathbf{G}_\sigma = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_1^T \bar{\sigma} & \bar{\mathbf{D}}_2^T \bar{\sigma} & \dots & \bar{\mathbf{D}}_n^T \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{G}_r = - \begin{bmatrix} \sum_r \bar{\mathbf{b}}_{r1} \bar{F}_r & \sum_r \bar{\mathbf{b}}_{r2} \bar{F}_r & \dots & \sum_r \bar{\mathbf{b}}_{rn} \bar{F}_r \end{bmatrix}$$

è la matrice di rigidezza geometrica, ed

$$\dot{\mathbf{f}} = \sum_s \bar{\mathbf{b}}_s \dot{F}_s \quad (47)$$

è il vettore delle forze generalizzate incrementali. Le (44) sono le equazioni linearizzate di equilibrio di un corpo presollecitato espresse in termini di spostamento; sono anche dette equazioni di equilibrio della teoria linearizzata.

- **Osservazione 20.** La matrice di rigidezza elastica \mathbf{K} (Eq. 45) è identica alla matrice di rigidezza della teoria lineare; è valutata però nella configurazione di presollecitazione, anziché in quella naturale. Essa tiene conto del solo contributo degli incrementi di tensione riferiti alla vecchia geometria.
- **Osservazione 21.** Se si ignora lo stato di presollecitazione e si applica la teoria lineare, nelle equazioni (44) si perde il contributo $\mathbf{G}\dot{\mathbf{u}}$, legato alla matrice di rigidezza geometrica. Questa dunque caratterizza la teoria linearizzata, e la differenza dalla teoria lineare. Il suo significato meccanico verrà discusso nel Cap. 10.
- **Osservazione 22.** La matrice di rigidezza geometrica \mathbf{G} , come la matrice di rigidezza elastica \mathbf{K} , è simmetrica

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T \quad (48)$$

Nulla invece può dirsi circa la definitezza in segno. Per dimostrare la (48) occorre innanzitutto osservare che, dalle (38), l'elemento \bar{D}_{ijk} della matrice $\bar{\mathbf{D}}_k$ e l'elemento \bar{b}_{rjk} del vettore $\bar{\mathbf{b}}_{rk}$ sono:

$$\bar{D}_{ijk} = \left. \frac{\partial D_{ij}}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}, \quad \bar{b}_{rjk} = \left. \frac{\partial b_{rj}}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}$$

Stanti le proprietà di dualità (17) e (15) segue che:

$$\bar{D}_{ijk} = \left. \frac{\partial^2 d_i}{\partial u_k \partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \left. \frac{\partial^2 d_i}{\partial u_j \partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \bar{D}_{ikj}$$

$$\bar{b}_{rjk} = \left. \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial u_k \partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \left. \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial u_j \partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \bar{b}_{rkj}$$

Ora, dalle (46), è:

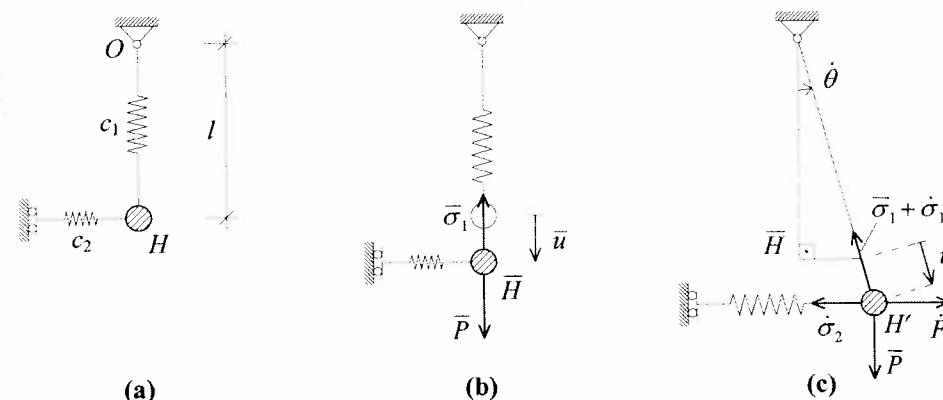
$$G_{ij} = \sum_{h=1}^n \bar{D}_{hij} \bar{\sigma}_h - \sum_r \bar{b}_{rij} \bar{F}_r$$

Poiché il secondo e terzo indice di \bar{D}_{hij} e \bar{b}_{rij} sono scambiabili, è:

$$G_{ij} = G_{ji}$$

da cui \mathbf{G} è simmetrica.

Esercizio 10: Considerato il sistema in Fig. (a), presollecitato dalla forza \bar{P} (Fig. b), si risolva il problema elastico incrementale quando sul sistema agisca la forza \dot{F} (Fig. c).



Nella configurazione di presollecitazione (Fig. b) si ha:

$$\bar{u} = \bar{P}/c_1, \quad \bar{\theta} = 0; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{u}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 0; \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{P}, \quad \bar{\sigma}_2 = 0 \quad (a)$$

Le equazioni di equilibrio non lineari sono già state scritte nell'Esercizio 4 (Eq. (a)). Posto:

$$u = \bar{u} + \dot{u}, \quad \theta = \bar{\theta} + \dot{\theta}, \quad \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_1, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_2 \quad (b)$$

esse si scrivono nella forma (39):

$$\begin{bmatrix} 1 & \sin \dot{\theta} \\ 0 & (\bar{l} + \dot{u}) \cos \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \dot{F} \begin{Bmatrix} \sin \dot{\theta} \\ (\bar{l} + \dot{u}) \cos \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \bar{P} \begin{Bmatrix} \cos \dot{\theta} \\ -(\bar{l} + \dot{u}) \sin \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (c)$$

in cui si è posto $\bar{l} = l + \bar{u}$, lunghezza della molla verticale nella configurazione di riferimento. Tenuto conto che $\sin \dot{\theta} \cong \dot{\theta}$, $\cos \dot{\theta} \cong 1$, e linearizzando negli incrementi, le equazioni di equilibrio (c) si pongono nella forma (40):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \\ 0 & \dot{u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \dot{F} \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{l} \end{Bmatrix} - \bar{P} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Le equazioni di congruenza (b) dell'Esercizio 4, in forma incrementale sono:

$$\bar{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_1 = \bar{u} + \dot{u}, \quad \bar{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2 = (\bar{l} + \dot{u}) \sin \dot{\theta} \quad (e)$$

Linearizzando negli incrementi e sostituendo le (a₃), (a₄) si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (f)$$

del tipo (41₂) (si noti la dualità). Utilizzando il legame costitutivo si ha:

$$\dot{\sigma}_1 = c_1 \dot{u}, \quad \dot{\sigma}_2 = c_2 \bar{l} \dot{\theta} \quad (g)$$

che, sostituite nelle equazioni di equilibrio incrementale, forniscono:

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \bar{l}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \bar{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{F} \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{l} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Esse sono del tipo (44), con $G_\sigma = 0$, $G_r \neq 0$. Risolvendo si ha:

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{F}}{c_2 \bar{l} + \bar{P}} \quad (i)$$

e quindi, dalle (f) e (g):

$$\dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{F} \bar{l}}{c_2 \bar{l} + \bar{P}}; \quad \dot{\sigma}_1 = 0, \quad \dot{\sigma}_2 = \frac{\dot{F}}{1 + \bar{P}/(c_2 \bar{l})} \quad (l)$$

- **Osservazione 23.** Nelle equazioni di equilibrio incrementali dell'Esercizio (10), appare una lunghezza, $\bar{l} = l + \bar{u}$, che tiene conto dell'effetto del cambio di geometria dovuto alla presollecitazione. Tuttavia, se la struttura è sufficientemente rigida, è $\bar{u} \ll l$, cosicché $\bar{l} \cong l$; in tal caso è lecito confondere la configurazione di presollecitazione con quella naturale. Ciò ovviamente non vuol dire che si trascurano le presollecitazioni (che invece sono presenti e danno luogo alla matrice geometrica) ma soltanto che si trascurano gli effetti geometrici prodotti dalle presollecitazioni. L'approssimazione è comunemente usata nelle applicazioni; essa consiste nell'assumere $\bar{u} \cong 0$, cosicché nelle (42)÷(44) è:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) \cong \mathbf{D}(\mathbf{0}), \quad \bar{\mathbf{D}}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \cong \left. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}, \quad \bar{\mathbf{b}}_{rk} = \left. \frac{\partial \mathbf{b}_r}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \cong \left. \frac{\partial \mathbf{b}_r}{\partial u_k} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}}$$

2.5 La scrittura diretta delle condizioni di equilibrio adiacente

La teoria linearizzata sviluppata nei paragrafi precedenti presuppone la conoscenza della cinematica non lineare del sistema, espressa dalla funzione di congruenza (2) $\mathbf{d}(\mathbf{u})$ e dalle relazioni (1) $\eta_r(\mathbf{u})$ che, come si è detto, sono di difficile scrittura. Tuttavia di queste viene fatto un uso limitato, in quanto esse intervengono nella formulazione solo attraverso le loro derivate prime e seconde. In particolare le derivate prime (matrice $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{D}}^T$ e vettori $\bar{\mathbf{b}}_r$) compaiono nelle definizioni della matrice di rigidezza elastica \mathbf{K} (Eq. 45) e nel vettore delle forze incrementali (Eq. 47); le derivate seconde (matrici $\bar{\mathbf{D}}_k$ e vettori $\bar{\mathbf{b}}_{rk}$), compaiono nella definizione della matrice di rigidezza geometrica (Eq. 46). L'analisi non lineare appare dunque esuberante, rispetto agli obiettivi che si perseguono. D'altra parte le derivate prime sono le stesse che compaiono nella teoria lineare, per le quali è dunque sufficiente studiare la cinematica lineare nell'intorno della configurazione di riferimento; le derivate seconde, invece, possono essere più agevolmente calcolate analizzando ancora la cinematica lineare del sistema, ma nell'intorno della configurazione variata, come si è discusso nelle Osservazioni 17 e 18. Costruite infatti le matrici $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}})$ e $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}})$, la loro differenza fornisce $\bar{\mathbf{D}}$; analogo discorso vale per \mathbf{b}_r . L'esercizio che segue chiarisce il procedimento.

Esercizio 11: Si risolva il problema dell'Esercizio 10 evitando la scrittura delle equazioni non lineari di equilibrio e di congruenza.

Si calcolano i diversi termini che compaiono nell'equazione incrementale di equilibrio (40). Si studia dapprima la cinematica lineare nell'intorno della configurazione presollecitata (Fig. (b) dell'Esercizio 10). Si ha (Fig. d):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \quad (m)$$

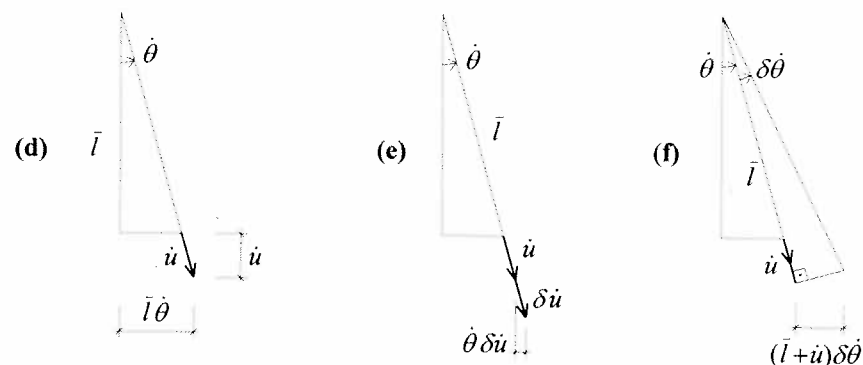
già ottenuta nell'Esercizio 10 (Eq. f). Si studia poi la cinematica lineare nell'intorno della configurazione adiacente (Fig. d). Sovrapposta a questa uno spostamento infinitesimo $(\delta \dot{u}, \delta \dot{\theta})$, procedendo per sovrapposizione di effetti, si hanno i campi di spostamento in Fig. (e) ($\delta \dot{u} \neq 0, \delta \dot{\theta} = 0$) ed (f) ($\delta \dot{u} = 0, \delta \dot{\theta} \neq 0$). Le deformazioni infinitesime associate sono:

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{\theta} & \bar{l} + \dot{u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \dot{u} \\ \delta \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{\theta} & \bar{l} + \dot{u} \end{bmatrix} \quad (n)$$

dove \mathbf{D} è la matrice cinematica in \mathcal{C}' . Poiché $\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}$ è:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} + \dot{u} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta} & \dot{u} \end{bmatrix} \quad (o)$$

che esprime \mathbf{D} (o equivalentemente la sua trasposta \mathbf{E}) come sovrapposizione di effetti (si vedano le Osservazioni 17 e 18).



L'operatore incrementale di equilibrio è dunque:

$$\dot{\mathbf{D}}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \\ 0 & \dot{u} \end{bmatrix} \quad (p)$$

Per calcolare i vettori $\bar{\mathbf{b}}_F$ e $\bar{\mathbf{b}}_P$ relativi, rispettivamente alle forze incrementali \dot{F} e di presolleccitazione \bar{P} , occorre calcolare il contributo delle forze (poste d'intensità unitaria) alle equazioni di equilibrio alla traslazione nella direzione longitudinale della molla 1 e alla rotazione intorno ad O. Per la forza incrementale \dot{F} si fa riferimento alla configurazione di presolleccitazione \bar{C} (Fig. b, cfr. Osservazione 19); si ottiene:

$$\bar{\mathbf{b}}_F = \{0 \quad \bar{l}\}^T \quad (q)$$

Per la forza di presolleccitazione \bar{P} , nella configurazione di riferimento è:

$$\bar{\mathbf{b}}_P = \{1 \quad 0\}^T \quad (r)$$

mentre nella configurazione adiacente (Fig. c), è:

$$\mathbf{b}_P = \{1 \quad -\bar{l}\dot{\theta}\}^T \quad (s)$$

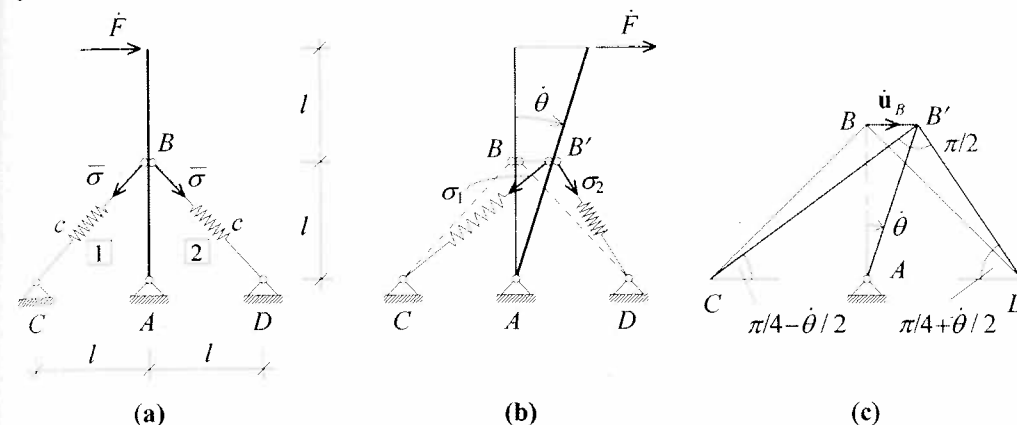
Per differenza si ha:

$$\dot{\mathbf{b}}_P = \mathbf{b}_P - \bar{\mathbf{b}}_P = \{0 \quad -\bar{l}\dot{\theta}\}^T \quad (t)$$

Sostituendo le (m₂), (p), (q) e (t) nell'Equazione (40) si riottiene la (d) dell'Esercizio 10, da dove si procede nello stesso modo.

- **Osservazione 24.** Il procedimento descritto e poi esemplificato nell'Esercizio 11 si presta ad una facile implementazione in un programma di calcolo automatico (questo calcolerà tra le altre grandezze, $n+1$ matrici cinematiche, o di equilibrio, di altrettanti sistemi deformati in cui sia stato attivato uno spostamento unitario \dot{u}_i per volta). È inoltre servito a chiarire che, nella teoria linearizzata, lo studio della cinematica non lineare può essere sostituito da un'analisi cinematica lineare nell'intorno della configurazione deformata. Tuttavia, nelle applicazioni manuali relative a sistemi semplici, una volta individuata la generica configurazione adiacente, è più facile scrivere in essa direttamente le equazioni di equilibrio, esprimendo le tensioni e le forze in forma incrementale e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo. L'esercizio che segue illustra il metodo.

Esercizio 12: Nel sistema in Fig. (a), le molle sono soggette ad una pretensione $\bar{\sigma}$ (stato di coazione). Si risolva il problema elastico incrementale quando sul sistema agisce la forza \dot{F} .



Si assume la rotazione θ quale parametro lagrangiano. Nello stato presolleccitato (Fig. a) è $\theta = 0$, cosicché lo stato adiacente (Fig. b) è individuato da $\dot{\theta} = \dot{\theta}$. A seguito della rotazione infinitesima θ il punto B si sposta orizzontalmente di $\dot{u}_B = \dot{\theta}l$ (Fig. c). Proiettando \dot{u}_B nelle direzioni originarie delle molle si determinano le deformazioni incrementali:

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} l \dot{\theta}, \quad \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \dot{\theta}, \quad (a)$$

Per calcolare le rotazioni delle molle si proietta \dot{u}_B in direzione normale e si divide per la lunghezza (indeformata) della molla; si trova:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \frac{\dot{\theta}}{2} \quad (b)$$

Nella configurazione adiacente le tensioni valgono:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + c \dot{\epsilon}_1 = \bar{\sigma} + \frac{\sqrt{2}}{2} c l \dot{\theta}, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma} + c \dot{\epsilon}_2 = \bar{\sigma} - \frac{\sqrt{2}}{2} c l \dot{\theta} \quad (c)$$

L'equazione di equilibrio lagrangiana è l'equazione dei momenti rispetto ad A. Nella configurazione adiacente si scrive:

$$\sigma_1 l \sin(\pi/4 - \dot{\theta}/2) - \sigma_2 l \sin(\pi/4 + \dot{\theta}/2) - 2l\dot{F} = 0 \quad (d)$$

Tenuto conto delle (c) e che:

$$\sin(\pi/4 \pm \dot{\theta}/2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm \dot{\theta}/2) + O(\dot{\theta}^2) \quad (e)$$

sostituendo nelle (d) e linearizzando si ha:

$$\left(cl^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} l \bar{\sigma} \right) \dot{\theta} = 2l\dot{F} \quad (f)$$

da cui:

$$\dot{\theta} = \frac{2l\dot{F}}{\left(cl^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} l \bar{\sigma} \right)} \quad (g)$$

Si noti che in questo caso il termine geometrico è negativo. Da un punto di vista meccanico ciò si spiega osservando che, nella configurazione adiacente, il braccio rispetto ad A della pretesione $\bar{\sigma}$ agente sul tratto $B'D$ è maggiore di quello agente sul tratto $B'C$; poiché detta pretesione dà un contributo al momento in A dello stesso segno della forza incrementale, \bar{F} , l'azione della pretesione sul sistema è in questo caso di tipo instabilizzante. Questa problematica verrà affrontata nel Cap. 10.

2.6 La formulazione integrale dell'equilibrio

Nel Par. 1.8 si è discussa l'applicazione del TLV ai problemi geometricamente non lineari. Questo può naturalmente essere specializzato alla teoria linearizzata, che è la più semplice teoria non lineare. Nella configurazione variata C' le forze di presollecitazione \bar{F}_r , le forze incrementali \bar{F}_s e le tensioni $\sigma = \bar{\sigma} + \dot{\sigma}$ si fanno equilibrio; assegnato un campo di spostamenti $\delta \mathbf{u}$ virtuali che porta il sistema da C' a C'' (Fig. 7), vale l'ELV:

$$\sum_r \bar{F}_r \delta \eta_r + \sum_s \bar{F}_s \delta \eta_s = \sigma^T \delta \varepsilon \quad (49)$$

dove $\delta \eta_r$, $\delta \eta_s$ sono gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle forze, congruenti con $\delta \mathbf{u}$ (Eq. 10):

$$\delta \eta_r = \mathbf{a}_r^T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} = \mathbf{b}_r^T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \quad (50)$$

ed inoltre $\delta \varepsilon$ è la deformazione congruente con $\delta \mathbf{u}$, data dalla (12):

$$\delta \varepsilon = \mathbf{D}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \quad (51)$$

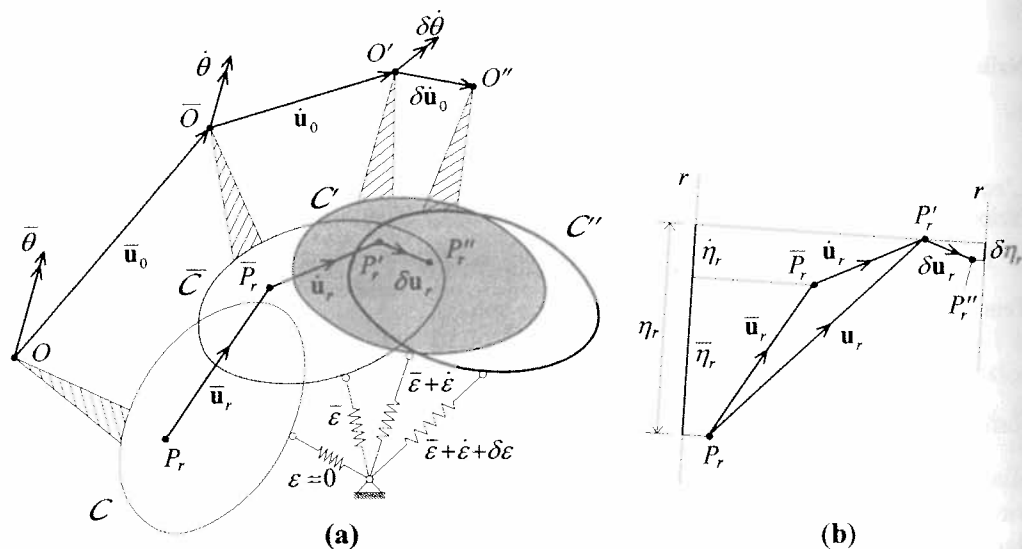


Fig. 7 Spostamenti virtuali $\delta \mathbf{u}$, assegnati alla configurazione C' : (a) configurazioni successive, (b) componenti di spostamento secondo una retta

Le (50) e (51) descrivono la cinematica virtuale del sistema nell'intorno di C' ; essa richiede il calcolo dei vettori $\mathbf{b}_r(\mathbf{u})$ e della matrice di congruenza infinitesima $\mathbf{D}(\mathbf{u})$.

Poiché, comunque, per ipotesi C' è infinitamente vicina a \bar{C} (teoria linearizzata), queste grandezze possono essere calcolate come sviluppo in serie a partire da $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{b}_r(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_r(\bar{\mathbf{u}}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{b}_r}{\partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_k = \bar{\mathbf{b}}_r + \dot{\mathbf{b}}_r \quad (52)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{D}(\bar{\mathbf{u}}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_k = \bar{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{D}}$$

avendo usato le (37). Corrispondentemente, dalle (50) e (51) si ha:

$$\delta \eta_r = \delta \bar{\eta}_r + \delta \dot{\eta}_r, \quad \delta \varepsilon = \delta \bar{\varepsilon} + \delta \dot{\varepsilon} \quad (53)$$

dove:

$$\delta \bar{\eta}_r = \bar{\mathbf{b}}_r^T \delta \bar{\mathbf{u}}, \quad \delta \dot{\eta}_r = \dot{\mathbf{b}}_r^T \delta \bar{\mathbf{u}}, \quad \delta \bar{\varepsilon} = \bar{\mathbf{D}} \delta \bar{\mathbf{u}}, \quad \delta \dot{\varepsilon} = \dot{\mathbf{D}} \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (54)$$

Nelle (54) $\delta \bar{\eta}_r$ e $\delta \bar{\varepsilon}$ rappresentano rispettivamente spostamenti e deformazioni virtuali assegnati a partire da \bar{C} , anziché da C' ; mentre $\delta \dot{\eta}_r$ e $\delta \dot{\varepsilon}$ rappresentano delle correzioni che tengono conto del fatto che spostamenti e deformazioni virtuali vanno invece assegnati a partire da C' .

- **Osservazione 25.** Gli spostamenti $\delta \bar{\eta}_r$ e $\delta \bar{\varepsilon}$ possono essere calcolati come differenza tra le relazioni che esprimono la cinematica lineare nell'intorno di C' e di \bar{C} . Questo è il procedimento che si è seguito nel Par. 2.5 (cfr. Esercizio 11) per calcolare $\dot{\mathbf{b}}_r$ e $\dot{\mathbf{D}}$ (cioè proprio $\delta \dot{\eta}_r$ e $\delta \dot{\varepsilon}$).

Espresso σ nella forma incrementale $\sigma = \bar{\sigma} + \dot{\sigma}$, e sostituendo le (53) nell'ELV (49), si ha:

$$\sum_r \bar{F}_r (\delta \bar{\eta}_r + \delta \dot{\eta}_r) + \sum_s \bar{F}_s (\delta \bar{\eta}_s + \delta \dot{\eta}_s) = (\bar{\sigma} + \dot{\sigma})^T (\delta \bar{\varepsilon} + \delta \dot{\varepsilon}) \quad (55)$$

Tenuto conto che:

$$\sum_r \bar{F}_r \delta \dot{\eta}_r = \bar{\sigma}^T \delta \dot{\varepsilon} \quad (56)$$

rappresenta l'ELV per il sistema presollecitato sottoposto a spostamenti e deformazioni congruenti infinitesimi assegnati da \bar{C} , la (55) si scrive:

$$\sum_r \bar{F}_r \delta \bar{\eta}_r + \sum_s \bar{F}_s \delta \bar{\eta}_s = \bar{\sigma}^T \delta \bar{\varepsilon} + \dot{\sigma}^T \delta \bar{\varepsilon} \quad (57)$$

avendo trascurato i termini di ordine superiore. La (57) costituisce la forma incrementale dell'equazione dei lavori virtuali.

- **Osservazione 26.** L'ELV nella forma incrementale (57) è costituita da quattro termini. Il secondo e il quarto sono quelli classici della teoria lineare, e rappresentano il lavoro virtuale compiuto dalle forze e tensioni incrementali, \bar{F}_s e $\dot{\sigma}$, negli spostamenti e deformazioni $\delta \bar{\eta}_s$ e $\delta \bar{\varepsilon}$, misurati dalla configurazione di riferimento

\bar{C} . I rimanenti due termini rappresentano il lavoro compiuto dalle forze e tensioni di presollecitazione, \bar{F}_r e $\bar{\sigma}$, nelle correzioni degli spostamenti e deformazioni, quando questi ultimi sono calcolati a partire da C' .

L'ELV (57) può essere utilizzata per ricavare le equazioni di equilibrio (40) (formulazione integrale dell'equilibrio), imponendo che essa valga per ogni spostamento virtuale $\delta \bar{\mathbf{u}}$ congruente. Infatti, sostituendo le (54), la (57) si scrive:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}^T \left(\sum_r \bar{F}_r \bar{\mathbf{b}}_r + \sum_s \bar{F}_s \bar{\mathbf{b}}_s - \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\sigma} - \bar{\mathbf{D}}^T \dot{\sigma} \right) = 0 \quad \forall \delta \bar{\mathbf{u}} \quad (58)$$

da cui la (40). Per ottenere le equazioni di equilibrio in termini di spostamento $\bar{\mathbf{u}}$, basta usare le (37) e tenere conto che $\dot{\sigma} = \mathbf{C}\dot{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{D}\dot{\bar{\mathbf{u}}}$.

2.7 Applicazioni della formulazione integrale

Per ottenere le equazioni incrementali di equilibrio secondo la formulazione integrale si procede come segue.

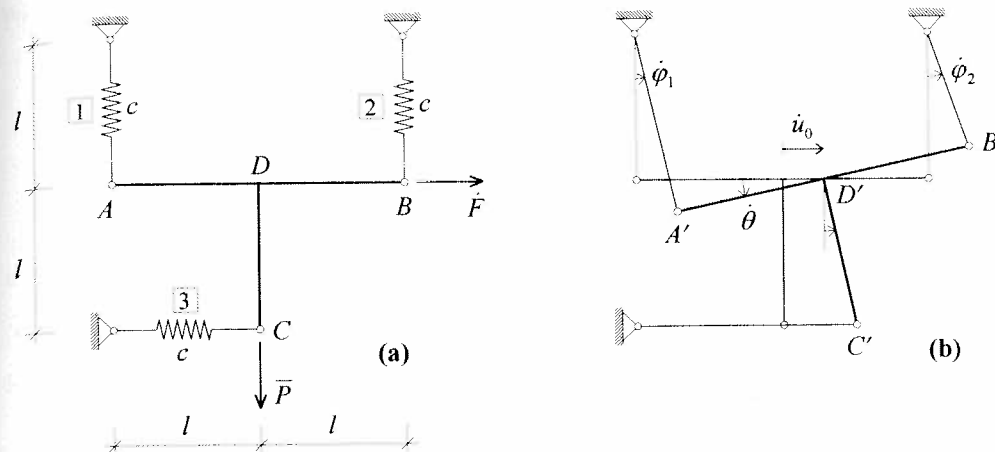
- I. Si studia la cinematica lineare nell'intorno di \bar{C} e si determinano le deformazioni reali $\dot{\varepsilon} = \bar{\mathbf{D}}\dot{\bar{\mathbf{u}}}$, le deformazioni virtuali $\delta \dot{\varepsilon} = \bar{\mathbf{D}}\delta \dot{\bar{\mathbf{u}}}$ (formalmente analoghe alle precedenti) nonché gli spostamenti virtuali $\delta \dot{\eta}_r$ e $\delta \dot{\eta}_s$, rispettivamente duali delle forze di presollecitazione e delle forze incrementali.
- II. Si studia la cinematica lineare nell'intorno di C' e si determinano gli spostamenti virtuali $\delta \eta_r$ dei punti di applicazione delle forze di presollecitazione e le deformazioni virtuali $\delta \varepsilon$; per differenza si calcolano le correzioni $\delta \dot{\eta}_r = \delta \eta_r - \delta \dot{\eta}_r$ e le deformazioni $\delta \dot{\varepsilon} = \delta \varepsilon - \delta \dot{\varepsilon}$.
- III. Si sostituisce nell'ELV incrementale (57) e si impone che essa valga per ogni $\delta \bar{\mathbf{u}}$; si ottiene così l'equazione di equilibrio incrementale.
- IV. Esprimendo le tensioni incrementali in termini di spostamenti incrementali, $\dot{\sigma} = \mathbf{C}\dot{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{D}\dot{\bar{\mathbf{u}}}$, si ottengono le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti.

- **Osservazione 27.** La formulazione integrale richiede lo studio della sola cinematica lineare, sia nell'intorno di \bar{C} che di C' , in accordo con la scrittura diretta dell'equilibrio adiacente (cfr. Osservazione 24).

Esercizio 13: Utilizzando il TLV si formuli il problema elastico incrementale per il sistema in Fig. (a).

Si trascurano gli spostamenti di presollecitazione \mathbf{u}_0 (cfr. Osservazione 23). Nella configurazione di riferimento è $\bar{\sigma}_1 = \bar{P}/2$, $\bar{\sigma}_2 = \bar{P}/2$, $\bar{\sigma}_3 = 0$. La configurazione adiacente è individuata dalle traslazioni \dot{u}_0, \dot{v}_0 di $O \equiv D$ e dalla rotazione $\dot{\theta}$. Tuttavia è facile verificare che lo spostamento \dot{v}_0 è nullo; infatti, se così non fosse, \dot{v}_0 produrrebbe variazioni di tensione nelle molle 1 e 2 che altererebbero l'equilibrio preesistente nella direzione verticale. Si assume pertanto direttamente $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_0, \dot{\theta})$ (Fig. b). L'ELV (57) si scrive:

$$-\bar{P}\delta \dot{v}_C + \dot{F}\delta \dot{u}_B = \bar{\sigma}_1 \delta \dot{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \delta \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\sigma}_1 \delta \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\sigma}_2 \delta \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\sigma}_3 \delta \dot{\varepsilon}_3 \quad (a)$$



Dalla cinematica lineare intorno a \bar{C} si ha (passo I):

$$\dot{\varepsilon}_1 = l\dot{\theta}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -l\dot{\theta}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \dot{u}_0 + l\dot{\theta} \quad (b)$$

a cui corrispondono gli incrementi di tensione

$$\dot{\sigma}_1 = cl\dot{\theta}, \quad \dot{\sigma}_2 = -cl\dot{\theta}, \quad \dot{\sigma}_3 = c(\dot{u}_0 + l\dot{\theta}) \quad (c)$$

Le rotazioni delle molle valgono:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{\dot{u}_0}{l}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{\dot{u}_0}{l}, \quad \dot{\phi}_3 = 0 \quad (d)$$

Si assegnano poi spostamenti virtuali $\delta \dot{u}_0$ e $\delta \dot{\theta}$. Se questi sono dati nell'intorno di \bar{C} , la cinematica è formalmente analoga a quella delle grandezze reali (si ricordi l'Osservazione 6.9); si ha:

$$\delta \dot{v}_C = 0, \quad \delta \dot{u}_B = \delta \dot{u}_0; \quad \delta \dot{\varepsilon}_1 = l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{\varepsilon}_2 = -l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{\varepsilon}_3 = \delta \dot{u}_0 + l\delta \dot{\theta} \quad (e)$$

Assegnandoli invece nell'intorno di C' (passo II) si hanno gli spostamenti nelle Fig. (c) e (d), dove si è proceduto per sovrapposizione di effetti. Dall'analisi della cinematica si ha:

$$\delta \dot{v}_C = l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{u}_B = \delta \dot{u}_0 - l\delta \dot{\theta}; \quad \delta \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\phi}_1 \delta \dot{u}_0 + l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\phi}_2 \delta \dot{u}_0 - l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{\varepsilon}_3 = \delta \dot{u}_0 + l\delta \dot{\theta} \quad (f)$$

Sottraendo a queste ultime le (e), e tenendo conto delle (d), si ottiene (passo II):

$$\delta \dot{v}_C = l\delta \dot{\theta}, \quad \delta \dot{u}_B = -l\delta \dot{\theta}; \quad \delta \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{u}_0}{l} \delta \dot{u}_0, \quad \delta \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{u}_0}{l} \delta \dot{u}_0, \quad \delta \dot{\varepsilon}_3 = 0 \quad (g)$$

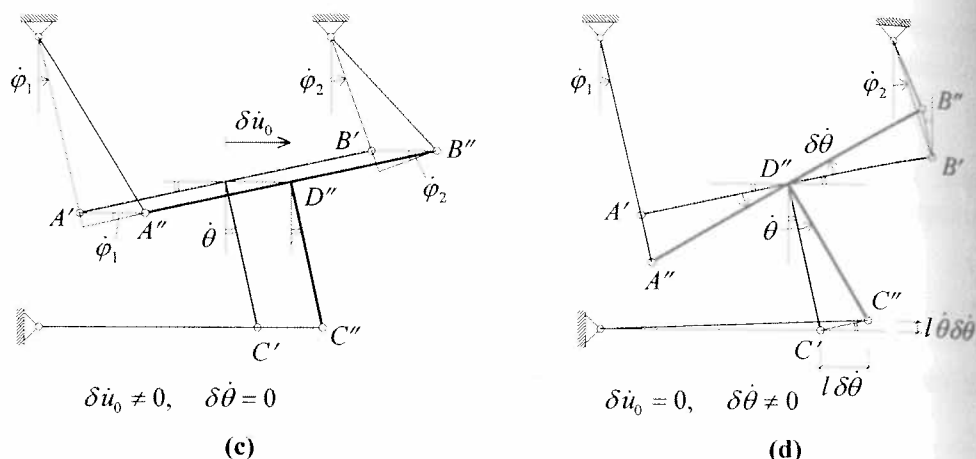
Sostituendo le (g) ed (e) nella (a), ed imponendo che quest'ultima sia soddisfatta per ogni $\delta \dot{u}_0$ e $\delta \dot{\theta}$, seguono le equazioni di equilibrio (passo III):

$$\dot{F} = \bar{P} \frac{\dot{u}_0}{l} + \dot{\sigma}_3, \quad -\bar{P}l\dot{\theta} = \dot{\sigma}_1 l - \dot{\sigma}_2 l + \dot{\sigma}_3 l \quad (a)$$

Esprimendo le tensioni incrementali in termini di spostamenti incrementali (passo IV) si ottiene:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & l \\ c & 3l^2 \end{bmatrix} + \bar{P} \begin{bmatrix} 1/l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{F} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

che è del tipo (44).



2.8 La formulazione variazionale dell'equilibrio

Si specializza alla teoria linearizzata il metodo variazionale discusso nel Par. 1.9 relativamente al problema non lineare. Si è detto che le equazioni non lineari dell'equilibrio, espresse in termini di spostamento, possono essere ottenute imponendo la stazionarietà della funzione energia potenziale totale. Questa si scrive:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon - \sum_r \bar{F}_r \eta_r - \sum_s \dot{F}_s (\eta_s - \bar{\eta}_s) \quad (59)$$

dove, nell'esprimere il lavoro delle forze incrementali \dot{F}_s , si è tenuto conto del fatto che esse sono applicate a partire dalla configurazione di presollecitazione. In generale l'EPT è una funzione trascendente degli spostamenti $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}$, e quindi, essendo $\bar{\mathbf{u}}$ noto, degli spostamenti incrementali $\dot{\mathbf{u}}$. Tuttavia, nella teoria linearizzata è sufficiente assumere per U un'espressione approssimata. Infatti, poiché si vogliono ottenere equazioni lineari negli incrementi di spostamento $\dot{\mathbf{u}}$, l'energia potenziale totale deve essere una funzione quadratica degli stessi spostamenti $\dot{\mathbf{u}}$; ciò può essere ottenuto sviluppando U in serie fino ai termini del secondo ordine, trascurando cioè quelli di ordine superiore. Sviluppando quindi in serie nell'intorno di $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, le componenti della deformazione $\varepsilon_i = d_i(\mathbf{u})$ e gli spostamenti $\eta_{r,s} = \eta_{r,s}(\mathbf{u})$ dei punti di applicazione delle forze, si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \bar{\varepsilon}_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial d_i}{\partial u_j} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 d_i}{\partial u_j \partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_j \dot{u}_k \\ \eta_r &= \bar{\eta}_r + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_r}{\partial u_j} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial u_j \partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \dot{u}_j \dot{u}_k \end{aligned} \quad (60)$$

Posto:

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial u_j} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}, \quad \bar{D}_{ijk} = \bar{D}_{ikj} = \frac{\partial^2 d_i}{\partial u_j \partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} \quad (61)$$

$$\bar{b}_{rj} = \frac{\partial \eta_r}{\partial u_j} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}, \quad \bar{b}_{rjk} = \bar{b}_{rkj} = \frac{\partial^2 \eta_r}{\partial u_j \partial u_k} \bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}$$

in cui, in accordo alle (31) e (38), è:

$$\bar{\mathbf{D}} = [\bar{D}_{ij}], \quad \bar{\mathbf{D}}_k = [\bar{D}_{ijk}], \quad \bar{\mathbf{b}}_r = \{\bar{b}_{rj}\}, \quad \bar{\mathbf{b}}_{rk} = \{\bar{b}_{rjk}\} \quad (62)$$

le (60) si scrivono:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i + \sum_{j=1}^n \bar{D}_{ij} \dot{u}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{D}_{ijk} \dot{u}_j \dot{u}_k \quad (63)$$

$$\eta_r = \bar{\eta}_r + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{rj} \dot{u}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{b}_{rjk} \dot{u}_j \dot{u}_k$$

Più sinteticamente, raccogliendo le componenti ε_i nel vettore ε , le (63) si scrivono:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}, \quad \eta_r = \bar{\eta}_r + \dot{\eta}_r + \ddot{\eta}_r \quad (64)$$

dove, ricordando le (37), è:

$$\dot{\varepsilon} = \bar{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{u}}, \quad \ddot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{u}}, \quad \dot{\eta}_r = \bar{\mathbf{b}}_r^T \dot{\mathbf{u}}, \quad \ddot{\eta}_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{b}}_r^T \dot{\mathbf{u}} \quad (65)$$

Nelle (65) le grandezze senza punti sono calcolate in $\bar{\mathbf{C}}$ (e quindi non dipendono dagli spostamenti incrementali), quelle con un punto sono funzioni lineari di $\dot{\mathbf{u}}$ e quelle con due punti sono funzioni quadratiche di $\dot{\mathbf{u}}$.

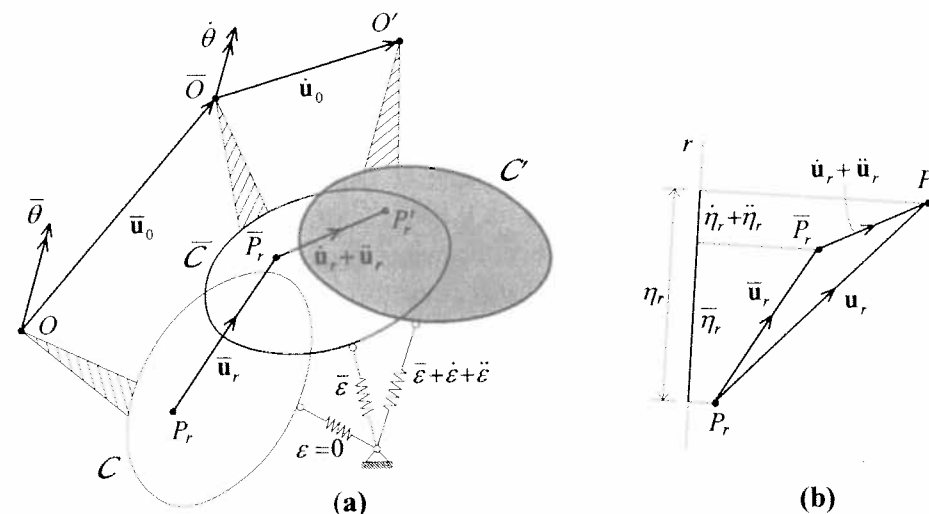


Fig. 8 (a) Configurazioni successive, (b) componenti di spostamento secondo una retta r

Il significato geometrico di $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\eta}_r$ ed $\ddot{\varepsilon}$, $\ddot{\eta}_r$ è schematizzato in Fig. 8. Assegnati a partire da \bar{C} degli spostamenti incrementali $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\theta})$, lo spostamento \mathbf{u}_r del generico punto P_r (o una sua componente η_r), subisce un incremento che è una funzione non lineare di $\dot{\mathbf{u}}$; $\dot{\mathbf{u}}_r$ (ovvero $\dot{\eta}_r$) rappresenta la parte del primo ordine (lineare in $\dot{\mathbf{u}}$); $\ddot{\mathbf{u}}_r$ (ovvero $\ddot{\eta}_r$), la parte del secondo ordine (quadratica in $\dot{\mathbf{u}}$). Analogamente per le deformazioni, che subiscono un incremento $\dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}$.

- **Osservazione 28.** Si notino le differenze tra le Fig. 7 (formulazione integrale) e 8 (formulazione variazionale). In Fig. 7 C' è assunta vicina a \bar{C} , cosicché la cinematica degli spostamenti incrementali è lineare; in Fig. 8 C' è a distanza finita da \bar{C} , cosicché la stessa cinematica è non lineare. Il metodo variazionale, quindi, a differenza di quello diretto e quello integrale, richiede lo sviluppo di un'analisi cinematica non lineare, sia pure limitata al secondo ordine.

Sostituendo gli sviluppi in serie (64) nell'EPT (59) si ha:

$$U = \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon})^T C(\bar{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}) - \sum_r \bar{F}_r(\bar{\eta}_r + \dot{\eta}_r + \ddot{\eta}_r) - \sum_s \dot{F}_s(\dot{\eta}_s + \ddot{\eta}_s) \quad (66)$$

Raccogliendo i termini dello stesso ordine in $\dot{\mathbf{u}}$ e trascurando i termini cubici e quartici si ha:

$$U = \bar{U} + \dot{U} + \ddot{U} \quad (67)$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^T C \bar{\varepsilon} - \sum_r \bar{F}_r \bar{\eta}_r \\ \dot{U} &= \dot{\varepsilon}^T C \bar{\varepsilon} - \sum_r \bar{F}_r \dot{\eta}_r \\ \ddot{U} &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^T C \dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}^T C \bar{\varepsilon} - \sum_r \bar{F}_r \ddot{\eta}_r - \sum_s \dot{F}_s \dot{\eta}_s \end{aligned} \quad (68)$$

avendo assunto \dot{F}_s piccolo del primo ordine, in accordo alle ipotesi della teoria linearizzata. Nelle (68) \bar{U} è una costante inessenziale che rappresenta l'EPT in \bar{C} , e può quindi essere posta uguale a zero. Inoltre anche \dot{U} risulta essere uguale a zero, per il TLV: essa, infatti, esprime la differenza tra il lavoro virtuale compiuto dalle forze \bar{F}_r e dalle tensioni equilibrate $\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}$ rispettivamente in un campo di spostamenti $\dot{\eta}_r$ e deformazioni $\dot{\varepsilon}$ congruenti. È perciò $U = \ddot{U}$, ovvero:

$$U = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^T C \dot{\varepsilon} + \bar{\sigma}^T \ddot{\varepsilon} - \sum_r \bar{F}_r \ddot{\eta}_r - \sum_s \dot{F}_s \dot{\eta}_s \quad (69)$$

- **Osservazione 29.** L'EPT (69) è costituita da quattro contributi. Il primo e l'ultimo sono quelli classici della teoria lineare: essi rappresentano rispettivamente l'energia potenziale elastica di un sistema non presollecitato, sottoposto a deformazioni infinitesime $\dot{\varepsilon}$, nonché il lavoro compiuto dalle forze incrementali \dot{F}_s ne-

gli spostamenti infinitesimi $\dot{\eta}_s$. Il secondo ed il terzo termine, invece, assenti nella teoria lineare, dipendono dallo stato di presollecitazione. Essi rappresentano rispettivamente il lavoro compiuto dalle pretensioni $\bar{\sigma}$ nelle componenti quadratiche delle deformazioni $\ddot{\varepsilon}$, ed il lavoro delle forze di presollecitazione \bar{F}_r nelle componenti del secondo ordine $\ddot{\eta}_r$ dello spostamento. Questi ultimi due termini, che dunque caratterizzano la teoria linearizzata, sono anche detti *termini geometrici* dell'EPT.

Imponendo che l'EPT (69) sia stazionaria si ha:

$$\delta U = \delta \dot{\varepsilon}^T C \dot{\varepsilon} + \bar{\sigma}^T \delta \ddot{\varepsilon} - \sum_r \bar{F}_r \delta \ddot{\eta}_r - \sum_s \dot{F}_s \delta \dot{\eta}_s = 0 \quad (70)$$

formalmente identica all'ELV (57). Le variazioni $\delta \dot{\varepsilon}$, $\delta \dot{\eta}_r$, $\delta \ddot{\varepsilon}$, $\delta \ddot{\eta}_r$, si ottengono differenziando le (65). Si ha:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\varepsilon} &= \bar{\mathbf{D}} \delta \dot{\mathbf{u}}, \quad \delta \dot{\eta}_s = \bar{\mathbf{b}}_s^T \delta \dot{\mathbf{u}} \\ \delta \ddot{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{D}} \delta \ddot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{D}} \delta \ddot{\mathbf{u}}, \quad \delta \ddot{\eta}_r = \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{b}}_r^T \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{b}}_r^T \delta \ddot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{b}}_r^T \delta \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (71)$$

Per dimostrare le ultime uguaglianze si procede come segue. Poiché

$$\bar{\mathbf{D}} = \sum_k \dot{u}_k \bar{\mathbf{D}}_k, \quad \delta \bar{\mathbf{D}} = \sum_k \delta \dot{u}_k \bar{\mathbf{D}}_k \quad (72)$$

l'i-esima componente del vettore $\delta \ddot{\varepsilon}$ si scrive:

$$\delta \ddot{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j (\delta \dot{u}_k \bar{D}_{ijk} \dot{u}_j + \dot{u}_k \bar{D}_{ijk} \delta \dot{u}_j) = \sum_k \sum_j \bar{D}_{ijk} \dot{u}_k \delta \dot{u}_j \quad (73)$$

avendo sfruttato la simmetria di \bar{D}_{ijk} (cfr. Osservazione 22). I due contributi nella (73) sono perciò uguali. Analogamente, poiché:

$$\bar{\mathbf{b}}_r = \sum_k \dot{u}_k \bar{\mathbf{b}}_{rk}, \quad \delta \bar{\mathbf{b}}_r = \sum_k \delta \dot{u}_k \bar{\mathbf{b}}_{rk} \quad (74)$$

la (71) si scrive:

$$\delta \ddot{\eta}_r = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j (\delta \dot{u}_k \bar{b}_{rjk} \dot{u}_j + \dot{u}_k \bar{b}_{rjk} \delta \dot{u}_j) = \sum_k \sum_j \bar{b}_{rjk} \dot{u}_k \delta \dot{u}_j \quad (75)$$

avendo sfruttato la simmetria di \bar{b}_{rjk} (cfr. Osservazione 22). I due contributi nella (71) sono perciò uguali. Le (71) sono identiche alle (54), per cui la (70), come l'ELV, fornisce le condizioni di equilibrio nella configurazione variata.

- **Osservazione 30.** L'operatore δ ha nei due procedimenti, integrale e variazionale, due diversi significati. Nel procedimento integrale indica che la grandezza a cui è applicato ha un carattere virtuale; nel procedimento variazionale indica il risultato dell'operazione di *variazione*, come definita dal calcolo (simbolico) delle variazioni. Tuttavia, grandezze virtuali e variazioni assumono la stessa espressione, co-

me si è visto confrontando le (54) e (71). L'eguaglianza è banalmente verificata nella teoria lineare (si veda l'Osservazione 6.9), ma non è ovvia nella teoria non lineare.

2.9 Applicazioni della formulazione variazionale

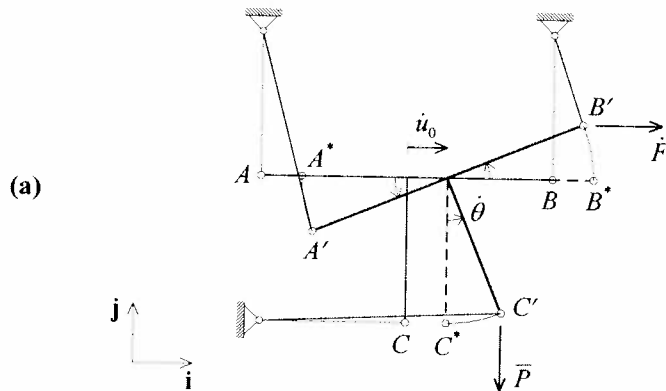
Per ottenere le equazioni incrementali di equilibrio secondo la formulazione variazionale occorre procedere come segue.

- I. Si studia la *cinematica non lineare* nell'intorno di \bar{C} , esprimendo in particolare gli spostamenti η_r ed η_s dei punti di applicazione delle forze, nonché le deformazioni ε , come funzione di $\dot{\mathbf{u}}$.
- II. Si sviluppano in serie η_r , η_s ed ε sino ai termini del secondo ordine in $\dot{\mathbf{u}}$, scrivendoli nella forma (64), ed individuando in particolare $\dot{\eta}_{r,s}$, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\eta}_r$, $\dot{\varepsilon}$.
- III. Si sostituiscono queste grandezze nell'EPT (69) e si impone che questa sia stazionaria rispetto ad $\dot{\mathbf{u}}$; si ottengono così le equazioni di equilibrio incrementali in termini di spostamento.

Esercizio 14: Si formuli il problema elastico incrementale per il sistema dell'Esercizio 13 utilizzando il teorema dell'EPT.

Si assumono come spostamenti generalizzati la traslazione orizzontale di $O \equiv D$, \dot{u}_0 e la rotazione intorno ad O , $\dot{\theta}$. A differenza della formulazione integrale occorre considerare una rotazione finita. La configurazione variata è illustrata in Fig. (a) (in cui si è considerata prima la traslazione e poi la rotazione). L'EPT (69) si scrive

$$U = \frac{1}{2} c (\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2) + \bar{\sigma}_1 \dot{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \dot{\varepsilon}_2 + \bar{P} \dot{v}_C - \dot{F} \dot{u}_B \quad (a)$$



Dalla Fig. (a), si trova (passo I):

$$\begin{aligned} u_A &= \dot{u}_0 + l(1 - \cos \theta), & v_A &= -l \sin \theta \\ u_B &= \dot{u}_0 - l(1 - \cos \theta), & v_B &= l \sin \theta \\ u_C &= \dot{u}_0 + l \sin \theta, & v_C &= l(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (b)$$

Le deformazioni delle molle valgono (cfr. Eq. (3))

$$\varepsilon_1 = \left[(l - v_A)^2 + u_A^2 \right]^{1/2} - l, \quad \varepsilon_2 = \left[(l - v_B)^2 + u_B^2 \right]^{1/2} - l, \quad \varepsilon_3 = \left[(l + u_C)^2 + v_C^2 \right]^{1/2} - l \quad (c)$$

Sviluppando in serie le (b) (passo II) ed indicando con un punto i termini del primo ordine (lineari in \dot{u}_0 e $\dot{\theta}$) e con due punti quelli del secondo ordine (quadratici in \dot{u}_0 e $\dot{\theta}$) si ha, ricordando che $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{u}_0, & \ddot{\varepsilon}_1 &= l \dot{\theta}^2/2, & \dot{v}_A &= -l \dot{\theta}, & \ddot{v}_A &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \dot{u}_0, & \ddot{\varepsilon}_2 &= -l \dot{\theta}^2/2, & \dot{v}_B &= l \dot{\theta}, & \ddot{v}_B &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{u}_0 + l \dot{\theta}, & \ddot{\varepsilon}_3 &= 0, & \dot{v}_C &= 0, & \ddot{v}_C &= l \dot{\theta}^2/2 \end{aligned} \quad (d)$$

Sviluppando in serie le (c) si ha (cfr. Osservazione 3)

$$\varepsilon_1 = -v_A + \frac{1}{2} \frac{u_A^2}{l}, \quad \varepsilon_2 = -v_B + \frac{1}{2} \frac{u_B^2}{l}, \quad \varepsilon_3 = u_C + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{l} \quad (e)$$

Sostituendo le (d) nelle precedenti relazioni e separando i termini di diverso ordine si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\dot{v}_A = l \dot{\theta}, & \ddot{\varepsilon}_1 &= -\ddot{v}_A + \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_A^2}{l} = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_0^2}{l} \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\dot{v}_B = -l \dot{\theta}, & \ddot{\varepsilon}_2 &= -\ddot{v}_B + \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_B^2}{l} = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}_0^2}{l} \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \dot{u}_C = \dot{u}_0 + l \dot{\theta}, & \ddot{\varepsilon}_3 &= \ddot{u}_C + \frac{1}{2} \frac{\dot{v}_C^2}{l} = 0 \end{aligned} \quad (f)$$

Sostituendo nell'EPT (a) si ha, con $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{P}/2$ (passo III):

$$U = \frac{1}{2} c (3l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{u}_0^2 + 2l \dot{u}_0 \dot{\theta}) + \frac{1}{2} \bar{P} (\dot{u}_0^2/l + l \dot{\theta}^2) - \dot{F} \dot{u}_0 \quad (g)$$

In forma matriciale:

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 & \dot{\theta} \end{Bmatrix} \left(c \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & 3l^2 \end{bmatrix} + \bar{P} \begin{bmatrix} 1/l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} - \dot{F} \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Imponendo la stazionarietà di U si ricava:

$$\left(c \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & 3l^2 \end{bmatrix} + \bar{P} \begin{bmatrix} 1/l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \dot{F} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

che è identica a quella trovata nell'Esercizio 13.

Sistemi presollecitati: rigidezza geometrica e biforcazione dell'equilibrio

1. Teoria linearizzata

1.1 Premessa

Nel capitolo precedente si è formulato il problema elastico geometricamente non lineare, da cui si è fatta discendere la teoria lineare dei sistemi presollecitati (o problema elastico incrementale), detta anche *teoria linearizzata*. Qui, dopo aver brevemente richiamato le ipotesi e le formulazioni di questa teoria, si pone principalmente l'attenzione sull'interpretazione meccanica delle equazioni e sugli aspetti fenomenologici che esse descrivono. A differenza del Cap. 9, dove si è considerato un generico sistema non vincolato, qui si fa riferimento esplicito ai sistemi vincolati.

1.2 Posizione del problema

Il problema elastico incrementale per un sistema vincolato si pone in questi termini.

- (a) La struttura inizialmente occupa la configurazione naturale \mathcal{C} in cui i parametri lagrangiani \mathbf{q} , le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$, le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$, e le reazioni \mathbf{r} sono nulle (Fig. 1a).
- (b) Sotto l'azione di un sistema di *forze di presollecitazione* $\bar{\mathbf{F}}_r$, la struttura si porta in una configurazione $\bar{\mathcal{C}}$, detta di presollecitazione. In essa sussiste uno *stato di predeformazione* $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, uno stato di *pretensione* $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e uno stato reattivo $\bar{\mathbf{r}}$ (Fig. 1b). $\bar{\mathcal{C}}$ viene assunta quale *configurazione di riferimento*; essa è individuata dalle coordinate lagrangiane $\bar{\mathbf{q}}$, misurate a partire dalla configurazione naturale \mathcal{C} .

- (c) Sul sistema intervengono poi piccole *forze incremental*i, o di disturbo, $\bar{\mathbf{F}}_s$, che inducono piccoli *incrementi di deformazione e tensione* $\dot{\epsilon}$ e $\dot{\sigma}$, nonché di reazioni vincolari $\dot{\mathbf{r}}$, cosicché $\epsilon = \bar{\epsilon} + \dot{\epsilon}$, $\sigma = \bar{\sigma} + \dot{\sigma}$, $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}$ (Fig. 1c). La struttura occupa una nuova configurazione di equilibrio C' , detta *adiacente*, infinitamente vicina a \bar{C} , individuata dagli spostamenti $\dot{\mathbf{q}}$, misurati a partire da \bar{C} .

Noto lo stato di presollecitazione $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\epsilon}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{r}})$, il problema elastico consiste nella determinazione delle grandezze incremental*i* $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\epsilon}, \dot{\sigma}, \dot{\mathbf{r}})$.

- **Osservazione 1.** La configurazione di presollecitazione \bar{C} è, in linea di principio, a distanza arbitraria da C . I parametri lagrangiani $\bar{\mathbf{q}}$ descrivono perciò uno spostamento finito (Fig. 1b), a differenza dei parametri $\dot{\mathbf{q}}$ che descrivono uno spostamento infinitesimo (Fig. 1c). Tuttavia, nelle applicazioni, \bar{C} viene spesso confusa con C (cfr. Osservazione 9.23); si assume cioè che, a causa della elevata rigidità della struttura, le forze $\bar{\mathbf{F}}_r$ non producano modifiche significative di geometria ($\bar{\mathbf{q}} \approx 0$).

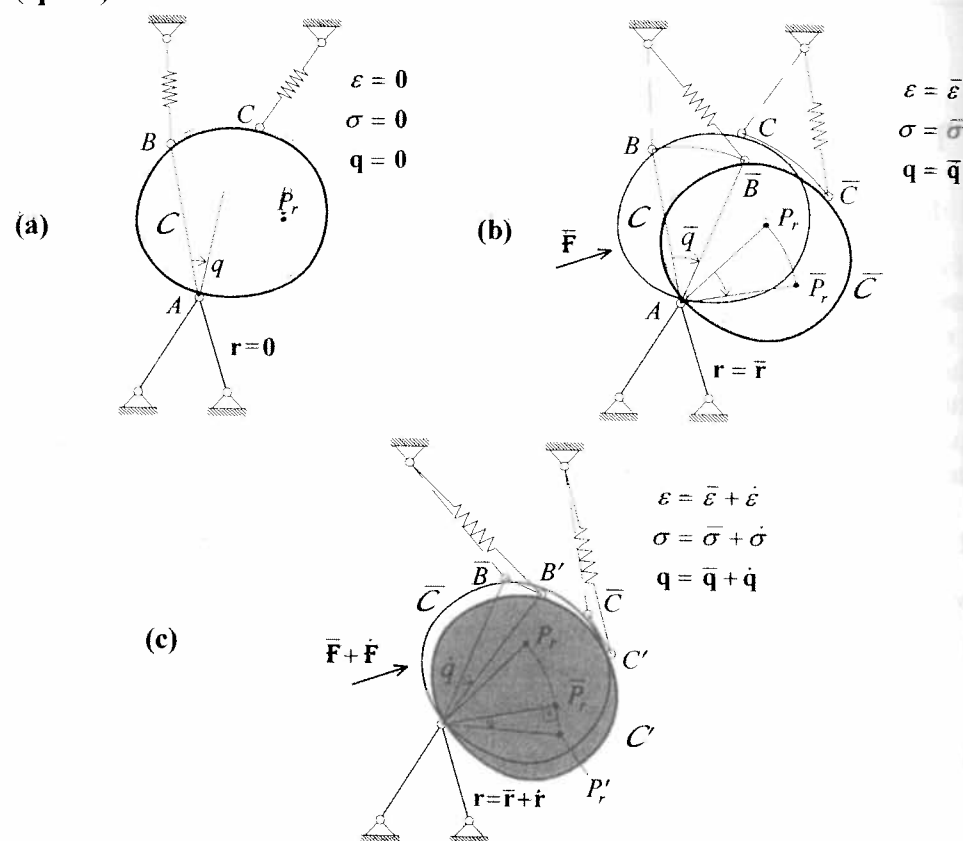


Fig. 1 Problema elastico incrementale per un sistema vincolato: (a) configurazione naturale C ; (b) configurazione di presollecitazione \bar{C} ; (c) configurazione variata C'

1.3 Le equazioni del problema

Il problema è governato dalle seguenti equazioni:

- (a) equazioni di congruenza (lineari) che legano gli incrementi di spostamento e di deformazione:

$$\dot{\epsilon} = \bar{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

in cui $\bar{\mathbf{D}}$ è la matrice di congruenza del sistema vincolato calcolata nella configurazione di riferimento \bar{C} (si è ommesso il circonflesso);

- (b) equazioni costitutive (lineari), che legano gli incrementi di tensione e di deformazione:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} \dot{\epsilon} \quad (2)$$

- (c) equazioni di equilibrio lagrangiane *imposte nella configurazione adiacente incognita*:

$$(\bar{\mathbf{D}}^T + \dot{\mathbf{D}}^T)(\bar{\sigma} + \dot{\sigma}) = \bar{\mathbf{f}} + \sum_r \bar{\mathbf{b}}_r \bar{\mathbf{F}}_r + \sum_s (\bar{\mathbf{b}}_s + \dot{\mathbf{b}}_s) \dot{\mathbf{F}}_s \quad (3)$$

dove $\dot{\mathbf{D}}^T = [\dot{\mathbf{D}}(\dot{\mathbf{q}})]^T$ è l'incremento della matrice di equilibrio e $\bar{\mathbf{b}}_r = \bar{\mathbf{b}}_r(\bar{\mathbf{q}})$, $\dot{\mathbf{b}}_s = \dot{\mathbf{b}}_s(\dot{\mathbf{q}})$ sono gli incrementi dei vettori di riduzione ai poli delle forze, dipendenti linearmente da $\dot{\mathbf{q}}$. Tenuto conto dell'equilibrio preesistente, e linearizzando negli incrementi, le (3) si scrivono (equazioni incremental*i* di equilibrio):

$$\bar{\mathbf{D}}^T \dot{\sigma} + \dot{\mathbf{D}}^T \bar{\sigma} = \sum_r \bar{\mathbf{b}}_r \bar{\mathbf{F}}_r + \sum_s \bar{\mathbf{b}}_s \dot{\mathbf{F}}_s \quad (4)$$

- **Osservazione 2.** La matrice $\dot{\mathbf{D}}^T$ tiene conto del fatto che le *direzioni e i bracci* delle tensioni $\sigma = \bar{\sigma} + \dot{\sigma}$ nella configurazione C' sono funzione degli spostamenti $\dot{\mathbf{q}}$; i vettori $\bar{\mathbf{b}}_r$, $\dot{\mathbf{b}}_s$ tengono conto dei *soli bracci* delle forze attive, dal momento che queste, per ipotesi, mantengono costanti le direzioni.
- **Osservazione 3.** La teoria linearizzata differisce dalla teoria lineare solo nella scrittura delle equazioni di equilibrio. Nella teoria lineare l'equilibrio è imposto nella configurazione di riferimento, cosicché l'effetto di eventuali presollecitazioni è nullo (vale cioè la sovrapposizione degli effetti); nella teoria linearizzata, invece, le condizioni di equilibrio sono imposte nella configurazione variata (incognita), cosicché *presollecitazioni e pretensioni appaiono nelle equazioni di equilibrio* insieme agli incrementi di forza e di tensione. Nella teoria linearizzata, quindi, non vale la sovrapposizione degli effetti.

1.4 Formulazione agli spostamenti

Esprimendo le equazioni di equilibrio (4) in termini di coordinate lagrangiane tramite le (1) e (2), si ottengono le equazioni (cfr. Eq. 9.44):

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} \quad (5)$$

dove:

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (6)$$

è la matrice $l \times l$ di rigidezza elastica del sistema vincolato nella configurazione di presollecitazione \bar{C} ; \mathbf{G} è la matrice $l \times l$ di rigidezza geometrica, tale che:

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}^T \bar{\sigma} - \sum_r \dot{\mathbf{b}}_r \bar{F}_r \quad (7)$$

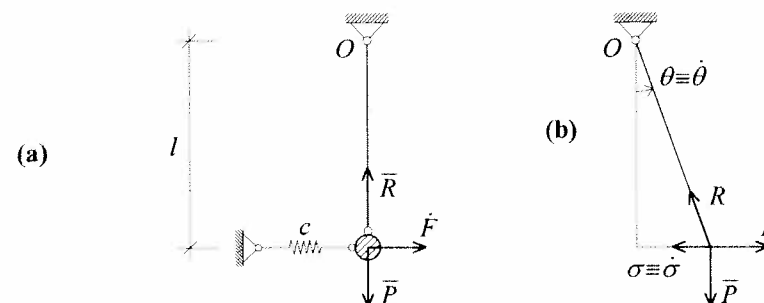
ed inoltre:

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_s \bar{\mathbf{b}}_s \dot{F}_s \quad (8)$$

è il vettore $l \times 1$ delle forze incrementali generalizzate, calcolate nella configurazione \bar{C} . Le (5) costituiscono le equazioni di equilibrio lagrangiane della teoria linearizzata espresse in termini di coordinate lagrangiane.

- **Osservazione 4.** La matrice di rigidezza geometrica, come quella elastica è simmetrica, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$; nulla può dirsi circa singolarità e definitezza in segno (cfr. Osservazione 9.22).
- **Osservazione 5.** Le (5) stabiliscono che le forze incrementali $\dot{\mathbf{p}}$ sono equilibrate dalla somma della reazione strutturale elastica $\dot{\mathbf{p}}_e := \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}$, e dalla reazione strutturale geometrica $\dot{\mathbf{p}}_g := \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}$, entrambe proporzionali agli spostamenti incrementali $\dot{\mathbf{q}}$. Si osservi che le reazioni strutturali andrebbero più correttamente definite con il segno negativo, qui omissso per convenienza.
- **Osservazione 6.** Le (5) si differenziano dalle analoghe condizioni di equilibrio della teoria lineare per la sola presenza della reazione strutturale geometrica. Questa dipende da due contributi: dalla pretensione $\bar{\sigma}$ e dalle forze di presollecitazione \bar{F}_r (cfr. Osservazione 9.21). Entrambi i contributi sono il risultato di un cambiamento di geometria, quantificato dall'incremento della matrice di equilibrio, \mathbf{D}^T , e dall'incremento dei vettori di riduzione ai poli, $\dot{\mathbf{b}}_r$. Può concludersi che la reazione geometrica rappresenta la risultante di un sistema di forze e tensioni inizialmente equilibrate, sottoposto ad una perturbazione geometrica.
- **Osservazione 7.** Le forze di presollecitazione appaiono nella parte omogenea delle equazioni di equilibrio (come coefficienti di rigidezza geometrica). Se esse variano durante il processo di carico (ad esempio crescono insieme alle forze incrementali) la rigidezza varia e il comportamento del sistema è non lineare. In definitiva le equazioni della teoria linearizzata sono lineari negli spostamenti, ma bilineari nelle variabili carico e spostamento.

Esercizio 1: Con riferimento al sistema in Fig. (a), costituito da un pendolo inestensibile collegato ad un organo elastico: (a) si risolva il problema dell'equilibrio incrementale; (b) si risolva il problema applicando la teoria lineare; (c) si traccino le curve forza incrementale-spostamento nei tre seguenti casi: (I) $\bar{P} = 0$, (II) $\bar{P} = \text{cost}$, (III) $\bar{P} = \alpha \dot{F}$, con $\alpha = \text{cost}$.



(a) Si considera il pendolo come corpo puntiforme vincolato da una biella. Si assume la rotazione θ della biella come parametro lagrangiano. Sotto l'azione della forza di presollecitazione \bar{P} (Fig. a), la reazione della biella è $\bar{R} = \bar{P}$, mentre la tensione della molla è nulla, $\bar{\sigma} = 0$; inoltre è $\theta = 0$ (cioè le configurazioni naturale e di presollecitazione coincidono). Nella configurazione adiacente (Fig. b), individuata da $\theta \equiv \dot{\theta}$, la reazione R , la tensione $\sigma \equiv \dot{\sigma}$, la forza di presollecitazione \bar{P} e la forza incrementale \dot{F} devono farsi equilibrio. L'equazione di equilibrio lagrangiana richiede l'annullamento dei momenti rispetto al punto di sospensione O ; si ha:

$$-\bar{P}l\dot{\theta} - \dot{\sigma}l + \dot{F}l = 0 \quad (a)$$

Poiché $\dot{\sigma} = c\dot{\epsilon} = cl\dot{\theta}$, la (a) si scrive:

$$(cl + \bar{P})\dot{\theta} = \dot{F} \quad (b)$$

del tipo (5). Risolvendo si ha:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{F}}{cl + \bar{P}} \quad (c)$$

da cui:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{F}}{c} \frac{1}{1 + \bar{P}/(cl)}, \quad \dot{\sigma} = \dot{F} \frac{1}{1 + \bar{P}/(cl)} \quad (d)$$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale si ricava la reazione vincolare:

$$R = \bar{P}/\cos\theta \cong \bar{P} \quad (e)$$

da cui $R = \bar{R}$, cioè l'incremento \dot{R} della reazione vincolare è nullo.

(b) Nella teoria lineare l'equilibrio è imposto in \bar{C} ; nelle (c) e (d) è quindi assente il termine in \bar{P} che ha braccio nullo rispetto ad O ; è perciò:

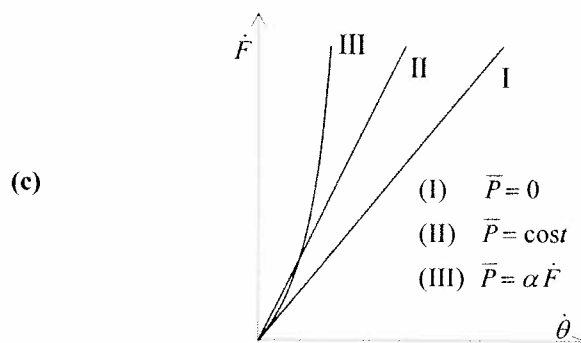
$$\dot{\theta} = \frac{\dot{F}}{cl}, \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{F}}{c}, \quad \dot{\sigma} = \dot{F}, \quad R = \bar{P} \quad (f)$$

(c) Nel caso $\bar{P} = 0$ non c'è effetto geometrico, cosicché le soluzioni lineare (Eq. f.) e linearizzata (Eq. c) coincidono (curva I in Fig. c). Nel caso $\bar{P} = \text{cost}$ la rigidezza geometrica incre-

menta quella elastica, cosicché la soluzione linearizzata si ottiene da quella lineare riducendola del fattore $[1 + P/(cl)]^{-1}$ (curva II in Fig. c). Nel caso in cui \bar{P} è proporzionale a \dot{F} , la rigidezza geometrica cresce con la forza, cosicché il legame forza-spostamento (Eq. c) è non lineare:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{F}}{cl} \frac{1}{1 + \alpha \dot{F}/(cl)} \quad (g)$$

La (g) è diagrammata in Fig. (c) (curva III). Le curve I e III sono tangenti nell'origine.



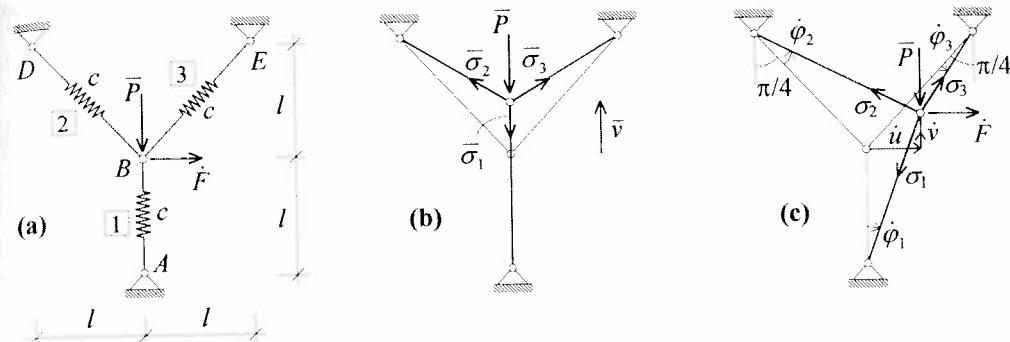
• **Osservazione 8.** Dall'Esercizio 1 si traggono le considerazioni che seguono:

(a) Poiché $\dot{\theta}$ è piccolo, in \bar{C} la proiezione verticale della forza R (Fig. b) è circa uguale ad R , mentre la proiezione orizzontale è pari ad $R\dot{\theta}$. L'equilibrio in direzione verticale, che sussisteva nella configurazione di riferimento (Fig. a) prima dell'applicazione di \dot{F} , non è perciò disturbato dalla variazione (infinitesima) di geometria; ciò spiega perché $\dot{R} = 0$. L'effetto della variazione di geometria si risente invece nella nascita della componente orizzontale $\bar{R}\dot{\theta} = \bar{P}\dot{\theta}$, contraria alla forza \dot{F} . $\bar{P}\dot{\theta}$ rappresenta perciò una forza proporzionale allo spostamento che si oppone alla variazione di geometria; è cioè del tipo delle forze di richiamo elastico. Il coefficiente di proporzionalità non è però una costante elastica ma una forza (o tensione) che dipende dallo stato di pre-sollecitazione. Questo è il motivo per cui la forza di richiamo è detta geometrica, in quanto non dipende dalle caratteristiche elastiche del sistema, ma solo dalla geometria.

(b) In generale la rigidezza geometrica è tanto maggiore quanto maggiore è la pre-sollecitazione. Nell'esempio dell'Esercizio 1 la rigidezza geometrica cresce con \bar{P} e si annulla con esso (curve I e II in Fig. c).

(c) Nell'esempio, l'effetto geometrico è irrigidente, cioè la rigidezza geometrica si somma a quella elastica; come risultato, spostamenti, deformazioni e tensioni sono più piccoli di quelli che si determinano con la teoria lineare. Comunque, come si è già visto nell'Esercizio 9.12, e come si vedrà nel Par. 3, esistono casi in cui l'effetto geometrico è di segno opposto a quello elastico.

Esercizio 2: Con riferimento al sistema in Fig. (a), presollecitato dalla forza \bar{P} , si determini, nell'ipotesi dell'Osservazione 1: (a) lo stato di presollecitazione e (b) le matrici di rigidezza elastica e geometrica nella configurazione di presollecitazione.



(a) Occorre determinare gli spostamenti (\bar{u}, \bar{v}) del nodo B nonché le tensioni $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ negli organi elastici indotte dalla forza \bar{P} . Poiché il sistema è simmetrico ed è caricato simmetricamente, la soluzione deve rispettare la simmetria; è perciò $\bar{u} = 0$ (Fig. b). Le deformazioni corrispondenti a \bar{v} sono:

$$\bar{\epsilon}_1 = \bar{v}, \quad \bar{\epsilon}_2 = \bar{\epsilon}_3 = -\bar{v}\sqrt{2}/2 \quad (a)$$

Corrispondentemente le tensioni valgono:

$$\bar{\sigma}_1 = c\bar{v}, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = -c\bar{v}\sqrt{2}/2 \quad (b)$$

Per determinare in modo esatto lo stato di presollecitazione occorrerebbe imporre le condizioni di equilibrio in \bar{C} ; tuttavia, se si ammette che \bar{v} sia piccolo (Osservazione 1), è sufficiente imporre l'equilibrio nella configurazione naturale (analisi lineare). Proiettando forze e tensioni sulla verticale si ha:

$$(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3) \frac{\sqrt{2}}{2} - \bar{\sigma}_1 - \bar{P} = 0 \quad (c)$$

ovvero, in termini di spostamento:

$$-2c\bar{v} - \bar{P} = 0 \quad (d)$$

da cui si ricava, nell'ordine:

$$\bar{v} = -\frac{\bar{P}}{2c}, \quad \bar{\sigma}_1 = -\frac{\bar{P}}{2}, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = \bar{P} \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (e)$$

(b) Si assuma $\bar{C} = C$. A partire dalla configurazione naturale si assegnano gli spostamenti \dot{u} e \dot{v} al nodo B (Fig. c). A questi corrispondono le deformazioni:

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{v}, \quad \dot{\epsilon}_2 = (\dot{u} - \dot{v})\sqrt{2}/2, \quad \dot{\epsilon}_3 = -(\dot{u} + \dot{v})\sqrt{2}/2 \quad (f)$$

nonché le rotazioni delle molle. Queste ultime, al primo ordine, si calcolano come rapporto tra lo spostamento in direzione normale alle molle e la lunghezza (iniziale) delle molle stesse; si ha:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{u}/l, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{(\dot{u} + \dot{v})\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}l} = \frac{\dot{u} + \dot{v}}{2l}, \quad \dot{\phi}_3 = \frac{(\dot{u} - \dot{v})\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}l} = \frac{\dot{u} - \dot{v}}{2l} \quad (g)$$

Alle deformazioni incrementali (f) corrispondono le tensioni incrementali:

$$\dot{\sigma}_1 = c\dot{v}, \quad \dot{\sigma}_2 = c(\dot{u} - \dot{v})\sqrt{2}/2, \quad \dot{\sigma}_3 = -c(\dot{u} + \dot{v})\sqrt{2}/2 \quad (h)$$

per cui, nella configurazione adiacente, le tensioni valgono $\sigma_i = \bar{\sigma}_i + \dot{\sigma}_i$ ($i=1,2,3$). Imponendo l'equilibrio in questa configurazione (Fig. c) si ha:

$$\begin{bmatrix} -\sin\phi_1 & -\sin(\pi/4 + \phi_2) & \sin(\pi/4 - \phi_3) \\ -\cos\phi_1 & \cos(\pi/4 + \phi_2) & \cos(\pi/4 - \phi_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ -\bar{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

Poiché $\sin(\pi/4 \pm \phi_i) = \sqrt{2}/2(1 \pm \phi_i)$ e $\cos(\pi/4 \pm \phi_i) = \sqrt{2}/2(1 \mp \phi_i)$, le (i), linearizzate negli incrementi, si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ -\bar{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (l)$$

Tenuto conto dell'equilibrio preesistente (Eq. (c), (e_{2,3})), le (l) si semplificano come segue:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\phi_1 & -\phi_2\sqrt{2}/2 & -\phi_3\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\phi_2\sqrt{2}/2 & \phi_3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

e risultano della forma dell'Eq. (4). Sostituendo a $\bar{\sigma}_i$, $\dot{\sigma}_i$ e ϕ_i rispettivamente le espressioni (e_{2,3}), (h) e (g), le (m) si scrivono come segue in termini di spostamenti:

$$\left(\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix} + \frac{\bar{P}}{4l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

Le (n) sono del tipo (5): la matrice dei coefficienti indipendente da \bar{P} è la matrice di rigidezza elastica \mathbf{K} ; la matrice proporzionale a \bar{P} è la matrice di rigidezza geometrica \mathbf{G} .

- **Osservazione 9.** Si noti che nell'Esercizio 1 l'effetto geometrico è legato alle forze preesistenti (terzo termine dell'Eq. 4), mentre nell'Esercizio 2 è legato alle tensioni preesistenti (secondo termine dell'Eq. 4). Nell'Esercizio 1, infatti, stante la presenza del vincolo, le tensioni di presollecitazione sono identicamente nulle; nell'Esercizio 2, invece, è nullo l'incremento del vettore di riduzione al polo delle forze generalizzate, dal momento che le equazioni cardinali della statica esprimono solo l'equilibrio alla traslazione (cfr. Osservazione 2). In sistemi generici possono essere presenti entrambi i contributi, in accordo all'Osservazione 6.

2. Sistemi labili presollecitati

L'effetto geometrico della presollecitazione rende possibile l'equilibrio anche di sistemi labili. Il cambiamento di geometria produce infatti reazioni strutturali che, in taluni casi, possono equilibrare le forze di disturbo. Un esempio particolarmente semplice di questo comportamento meccanico è offerto dal pendolo matematico piano sottoposto al peso \bar{P} della massa (Fig. 2a) e ad una forza di disturbo orizzontale \dot{F} (Fig. 2b).

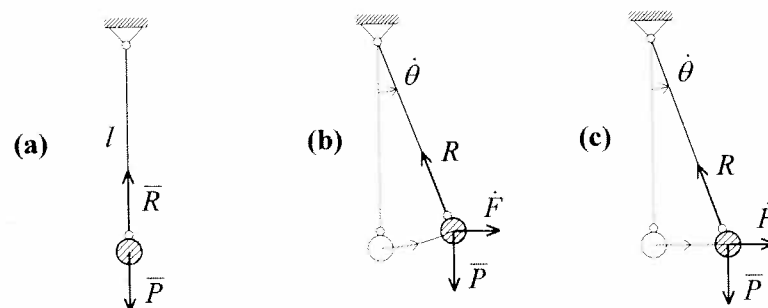


Fig. 2 Pendolo matematico piano: (a) configurazione di riferimento, (b) configurazione variata generica, (c) configurazione adiacente

In base all'analisi sviluppata nella teoria lineare si potrebbe concludere che poiché il pendolo è un sistema labile l'equilibrio è impossibile. L'asserzione è manifestamente errata e va corretta come segue: poiché il pendolo è un sistema labile l'equilibrio è impossibile nella configurazione di riferimento. La teoria lineare, infatti, prevede l'imposizione dell'equilibrio nello stato indeformato; ciò naturalmente non esclude che l'equilibrio possa sussistere in una (o più) configurazioni diverse da quella di riferimento (Fig. 2b). Limitandosi a considerare configurazioni adiacenti a quella di riferimento (Fig. 2c) e procedendo come nell'Esercizio 1, si trova facilmente:

$$\dot{\theta} = \dot{F}/\bar{P}, \quad R = \bar{R} = \bar{P} \quad (9)$$

Generalizzando questo risultato a sistemi a più g.d.l. possono distinguersi due casi.

- (a) Le reazioni strutturali elastiche sono identicamente nulle. Le equazioni di equilibrio (5) si scrivono allora:

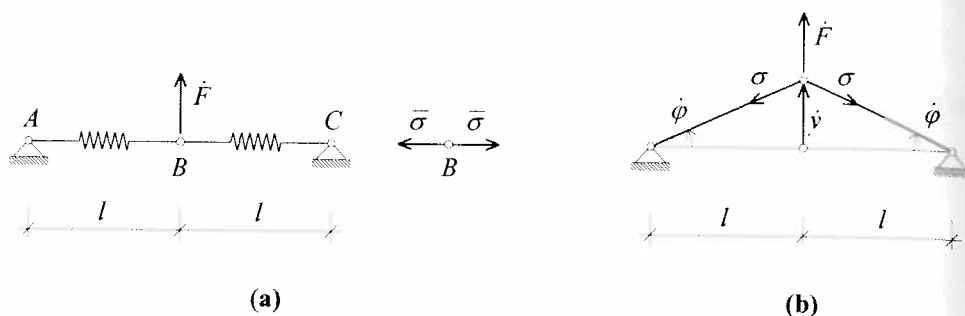
$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} \quad (10)$$

Se \mathbf{G} è non singolare la (10) ammette la soluzione unica $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}^{-1}\dot{\mathbf{p}}$, che individua la configurazione di equilibrio. Ricadono in questa classe i sistemi rigidi presollecitati, quale ad esempio il pendolo.

- (b) Le reazioni strutturali elastiche sono non nulle, ma la matrice \mathbf{K} è singolare. Se $\mathbf{K} + \mathbf{G}$ è non singolare, le (5) ammettono la soluzione unica $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{K} + \mathbf{G})^{-1}\dot{\mathbf{p}}$. Ad esempio, ricade in questa classe il pendolo con filo elastico, la cui reazione strutturale elastica è sempre diretta lungo il filo, e quindi ha componente nulla nella direzione ortogonale.

Sistemi continui quali il filo teso e la membrana tesa sono sistemi labili (o degeneri) che, grazie alla presollecitazione, possono sopportare carichi trasversali. I sistemi degli Esercizi 3÷6 che seguono possono interpretarsi come versioni discrete del filo e della membrana tesi.

Esercizio 3: Si determini la rigidezza geometrica del sistema labile in Fig. (a), costituito da due molle pretese da una tensione $\bar{\sigma}$ (stato di coazione), sottoposto ad una forza trasversale di disturbo \dot{F} .

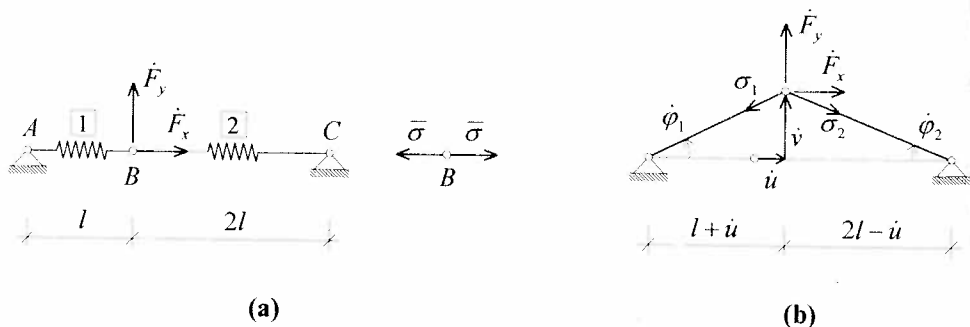


Nella configurazione di riferimento (Fig. a) le due tensioni $\bar{\sigma}$ si fanno equilibrio. La configurazione adiacente, stante la simmetria del sistema, è descritta dal solo spostamento verticale \dot{v} , al quale corrispondono rotazioni delle molle $\dot{\phi} = \dot{v}/l$ (Fig. b). Nello stato deformato gli allungamenti e delle molle sono nulli (al primo ordine in \dot{v}); le tensioni, quindi, rimangono invariate: $\sigma = \bar{\sigma}$. La condizione di equilibrio alla traslazione verticale in C si scrive:

$$2 \frac{\bar{\sigma}}{l} \dot{v} = \dot{F}$$

La rigidezza geometrica è quindi $g := 2\bar{\sigma}/l$, ed è proporzionale alla pretensione $\bar{\sigma}$.

Esercizio 4: Si consideri ancora il sistema dell'Esercizio 1 in cui le due molle, di uguale rigidezza c , hanno però diversa lunghezza (Fig. a); inoltre si considerino forze incrementali nelle due direzioni. Si determinino le matrici \mathbf{K} e \mathbf{G} , si discuta il loro carattere, e si consideri poi il caso particolare $\dot{F}_x = 0$.



Poiché il sistema è asimmetrico (geometricamente e per disposizione dei carichi), occorre considerare entrambe le componenti di spostamento di B, \dot{u} e \dot{v} (Fig. b). Le equazioni di con-

gruenza (1) si scrivono:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

La matrice di congruenza $\bar{\mathbf{D}}$, di dimensioni 2×2 , è singolare: il sistema è perciò degenero. Le rotazioni delle molle corrispondenti valgono, al primo ordine:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{v}/l, \quad \dot{\phi}_2 = \dot{v}/(2l) \quad (b)$$

Gli incrementi di tensione sono:

$$\dot{\sigma}_1 = c\dot{u}, \quad \dot{\sigma}_2 = -c\dot{u} \quad (c)$$

cosicché le tensioni in C risultano:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma} + c\dot{u}, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma} - c\dot{u} \quad (d)$$

Le equazioni di equilibrio in C si scrivono (Fig. b):

$$-\sigma_1 + \sigma_2 + \dot{F}_x = 0, \quad -\sigma_1 \dot{\phi}_1 - \sigma_2 \dot{\phi}_2 + \dot{F}_y = 0 \quad (e)$$

Esprimendole in termini di spostamento con le (b) e (d), si ha:

$$\begin{aligned} -(\bar{\sigma} + c\dot{u}) + (\bar{\sigma} - c\dot{u}) + \dot{F}_x &= 0 \\ -(\bar{\sigma} + c\dot{u}) \frac{\dot{v}}{l} - (\bar{\sigma} - c\dot{u}) \frac{\dot{v}}{2l} + \dot{F}_y &= 0 \end{aligned} \quad (f)$$

da cui, linearizzando negli incrementi, si ottiene:

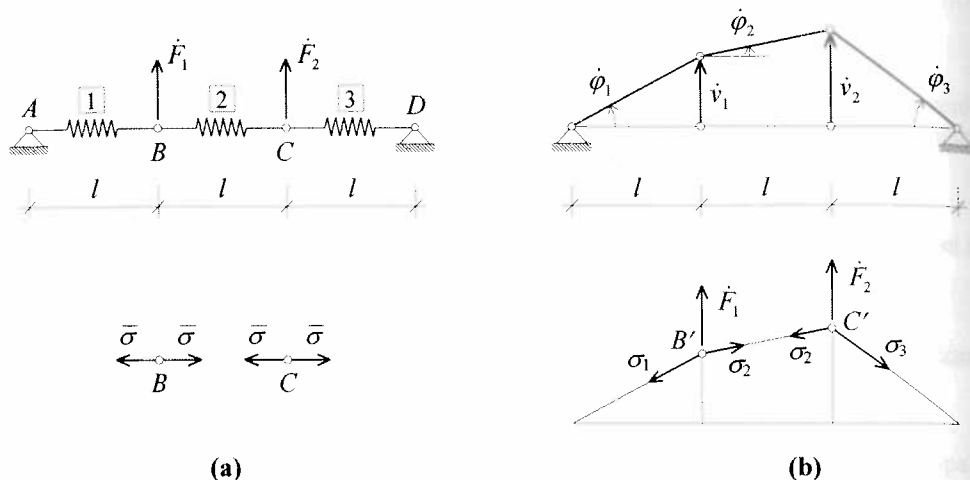
$$\left(\begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3/(2l) \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{F}_x \\ \dot{F}_y \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Le due matrici a primo membro sono rispettivamente \mathbf{K} e \mathbf{G} . La matrice di rigidezza $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{D}}$ è singolare, in quanto a spostamenti trasversali $\dot{u} = 0, \dot{v} \neq 0$ (modi rigidi) corrispondono deformazioni, tensioni e reazioni strutturali nulle. La matrice $\mathbf{K} + \mathbf{G}$ è invece non singolare; quindi il problema ammette una soluzione unica.

Se, come caso particolare, è $\dot{F}_x = 0$, dalla (g₁) si ha $\dot{u} = 0$. Dalle (c) segue dunque che $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = 0$, cioè la forza trasversale non altera lo stato tensionale preesistente, come accade per il sistema dell'Esercizio 3.

- **Osservazione 10.** Nel sistema dell'Esercizio 4 (modello discreto del filo teso), le equazioni di equilibrio nelle direzioni longitudinale e trasversale sono tra loro disaccoppiate. Forze trasversali producono perciò solo spostamenti trasversali, ai quali sono associate variazioni nulle di tensione. La rigidezza della struttura in direzione trasversale è esclusivamente geometrica; in direzione longitudinale è esclusivamente elastica.

Esercizio 5: Si determini la matrice di rigidezza geometrica del sistema labile in Fig. (a), sottoposto a pretensione $\bar{\sigma}$.



Poiché le forze incrementali sono esclusivamente trasversali è facile verificare, procedendo come nell'Esercizio 4, che gli spostamenti longitudinali sono nulli, e che $\dot{\sigma}_i = 0$; è quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \bar{\sigma} \quad (a)$$

La configurazione adiacente è descritta dagli spostamenti \dot{v}_1 e \dot{v}_2 dei nodi B e C (Fig. b). Le rotazioni delle molle valgono:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{v}_1/l, \quad \dot{\phi}_2 = (\dot{v}_2 - \dot{v}_1)/l, \quad \dot{\phi}_3 = \dot{v}_2/l \quad (b)$$

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale dei due nodi si scrivono (Fig. b):

$$-\sigma_1\dot{\phi}_1 + \sigma_2\dot{\phi}_2 + \dot{F}_1 = 0, \quad -\sigma_2\dot{\phi}_2 - \sigma_3\dot{\phi}_3 + \dot{F}_2 = 0 \quad (c)$$

Sostituendo in esse le (a) e (b) si ha:

$$\frac{\bar{\sigma}}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{F}_1 \\ \dot{F}_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

La matrice dei coefficienti, simmetrica, è la matrice di rigidezza geometrica.

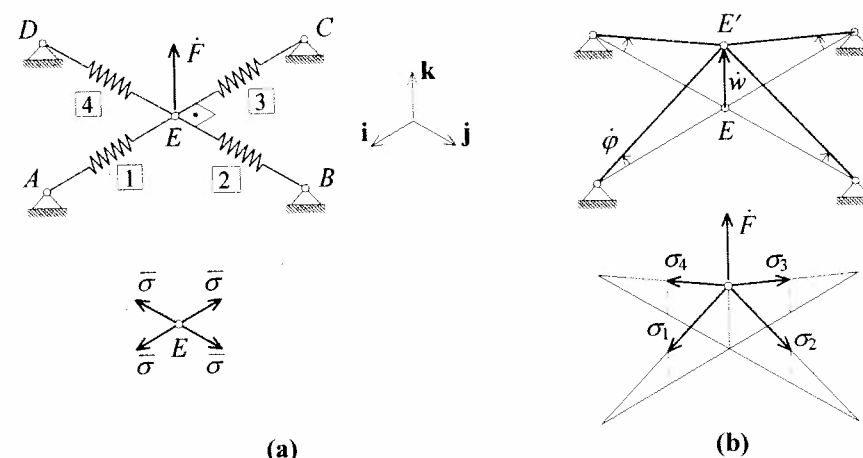
Esercizio 6: Si determini la rigidezza geometrica del sistema in Fig. (a), costituito da quattro molle planari pretese, di uguale lunghezza l , sollecitate trasversalmente al piano da una forza \bar{F} .

Poiché spostamenti nel piano altererebbero l'equilibrio lungo le direzioni i e j , lo spostamento del nodo E è esclusivamente trasversale, pari a \dot{w} (Fig. b). Le tensioni nelle molle restano invariate:

$$\sigma_i = \bar{\sigma} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (a)$$

Le rotazioni sono tutte uguali in valore assoluto, pari a:

$$\dot{\phi}_i = \dot{w}/l \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (b)$$



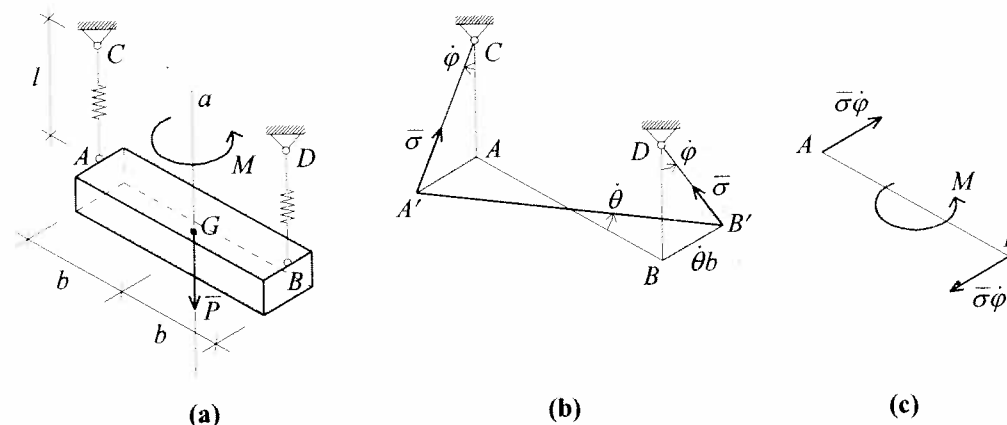
Imponendo l'equilibrio di E nella posizione E' si ha:

$$4 \frac{\bar{\sigma}}{l} \dot{w} = \dot{F} \quad (c)$$

La rigidezza geometrica è:

$$g = 4 \frac{\bar{\sigma}}{l} \quad (d)$$

Esercizio 7: Si determini la rigidezza geometrica del sistema labile in Fig. (a), costituito da un corpo rigido di peso \bar{P} , sollecitato da una coppia M , appeso a due molle verticali e vincolato a traslare verticalmente e a ruotare intorno all'asse verticale a , passante per il baricentro G.



Sotto l'azione di \bar{P} le due molle sono presollecitate con tensione $\bar{\sigma} = \bar{P}/2$. Assunta la rotazione θ intorno ad A come parametro lagrangiano (Fig. b), nella configurazione adiacente le molle risultano inclinate sulla verticale di un angolo $\phi = \theta b/l$. Poiché le molle, al primo ordine, non si allungano, le tensioni restano immutate: $\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}$. Le pretensioni $\bar{\sigma}$ hanno in C' componenti $\bar{\sigma}\phi = \bar{\sigma}\theta b/l$ sul piano orizzontale, e costituiscono una coppia che si oppone alla rotazione (Fig. c).

Dall'equilibrio si ha:

$$2\bar{\sigma}\dot{\theta}\frac{b^2}{l} = M \quad (a)$$

per cui la rigidezza geometrica è:

$$g := 2\bar{\sigma}b^2/l \quad (b)$$

- **Osservazione 11.** In tutti gli esempi precedenti (Esercizi 3÷7) si sono considerate esclusivamente presollecitazioni di trazione. Se queste sono di compressione, l'equilibrio è ancora possibile (basta infatti cambiare segno agli spostamenti incrementali); tuttavia si può dimostrare che le corrispondenti posizioni di equilibrio sono instabili.

3. Biforcazione dell'equilibrio

3.1 Stati critici e punti di biforcazione

Nell'ambito della teoria lineare si è dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema elastico (Par. 6.1.3). Quest'ultima è essenzialmente basata sul fatto che, eliminati i modi rigidi del sistema, la matrice di rigidezza elastica \mathbf{K} è non singolare. Come conseguenza, in assenza di forze attive, il problema omogeneo $\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{0}$ ammette la sola soluzione banale $\mathbf{q}=\mathbf{0}$.

In presenza di effetti geometrici, rappresentati dalla matrice di rigidezza geometrica \mathbf{G} , la situazione è affatto diversa. Infatti, dal momento che \mathbf{G} può essere qualsiasi (cfr. Osservazione 4), la matrice di rigidezza totale $\mathbf{K}+\mathbf{G}$ può, per particolari stati di presollecitazione, divenire singolare. In tali casi il problema incrementale omogeneo $(\mathbf{K}+\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ ammette soluzione non banale $\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_c$, è cioè:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{0} \quad (11)$$

Il sistema è detto essere in uno stato *critico* e la presollecitazione corrispondente è detta sollecitazione critica.

Se le equazioni di equilibrio incrementali sono soddisfatte per $\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_c$, ogni spostamento $\alpha\dot{\mathbf{q}}_c$, con $\alpha\in\mathbb{R}$, individua una configurazione equilibrata. Esistono pertanto, oltre alla soluzione banale $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$, infinite configurazioni di equilibrio adiacenti. Lo stato critico è perciò caratterizzato dalla perdita dell'unicità della soluzione del problema elastico. Questa comporta la nascita di punti di biforcazione nel diagramma carico-spostamento. Infatti, allo stesso valore del carico di presollecitazione corrispondono due (o più) soluzioni: la soluzione banale $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ e la soluzione non banale $\dot{\mathbf{q}}=\alpha\dot{\mathbf{q}}_c$. Il fenomeno è anche detto di *biforcazione dell'equilibrio*.

- **Osservazione 12.** La perdita dell'unicità della soluzione del problema elastico non è in contrasto con il teorema di esistenza e unicità che è stato dimostrato in ambito puramente lineare (senza cioè tenere in conto degli effetti geometrici).
- **Osservazione 13.** Il vettore $\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}_c$ individua una configurazione adiacente in cui

le reazioni strutturali elastiche $\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}$ e le reazioni strutturali geometriche $\dot{\mathbf{p}}_g = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$ sono uguali e di segno opposto cosicché l'equilibrio è soddisfatto *anche in assenza di forze incrementali* $\dot{\mathbf{p}}$. Poiché le reazioni sono proporzionali a $\dot{\mathbf{q}}$, l'equilibrio persiste se gli spostamenti vengono variati proporzionalmente. Nello stato critico, dunque, il sistema si comporta a tutti gli effetti come labile, potendo assumere ∞^1 configurazioni congruenti.

3.2 Biforcazioni di sistemi ad un grado di libertà

Per introdurre alcuni concetti fondamentali è utile considerare dapprima sistemi ad un solo grado di libertà. Per questi, le equazioni omogenee di equilibrio incrementale si scrivono:

$$(k + g)\dot{q} = 0 \quad (12)$$

dove k è il coefficiente di rigidezza elastica, g di rigidezza geometrica, e \dot{q} è il parametro lagrangiano. Poiché g è proporzionale alle forze di presollecitazione (si vedano l'Eq. (7) e gli Esercizi 3, 6 e 7), assumendo che queste dipendano linearmente da un *moltiplicatore di carico* λ , posto cioè $\tilde{F}_r = -\lambda\tilde{F}_r$ (dove il segno meno è stato introdotto per convenienza), è anche $g = -\lambda\tilde{g}$; la (12) si scrive allora:

$$(k - \lambda\tilde{g})\dot{q} = 0 \quad (13)$$

avendo soppresso il segno tilde. La (13) ammette due soluzioni:

- (I) soluzione banale: $\dot{q} = 0, \forall \lambda$
- (II) soluzione non banale: $\lambda = \lambda_c := k/\tilde{g}, \forall \dot{q}$

λ_c è detto *carico* o *moltiplicatore critico*. Se si diagrammano le due soluzioni su un piano (\dot{q}, λ) si ha il grafico di Fig. 3. In esso la curva I, uscente dall'origine, individua il *percorso fondamentale* della struttura; la curva II il *percorso diramato*, o *biforcato*. I due percorsi si intersecano in $(\dot{q}, \lambda) = (0, \lambda_c)$, detto *punto di biforcazione*.

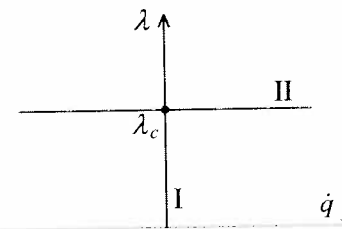


Fig. 3 Percorsi di equilibrio di sistemi ad un grado di libertà, in assenza di forze incrementali

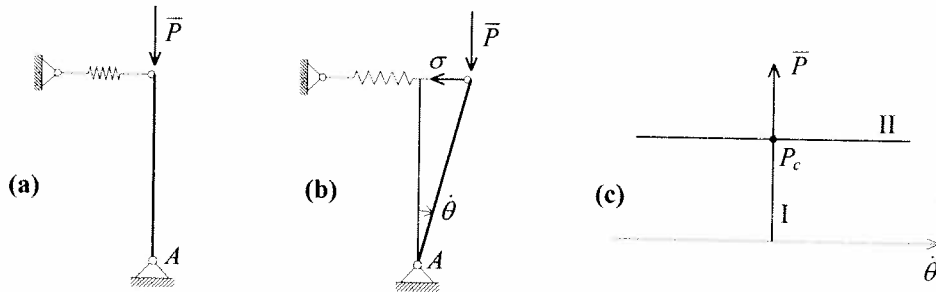
- **Osservazione 14.** Un sistema ad un g.d.l. possiede un unico stato critico; questo corrisponde ad un particolare valore λ_c del moltiplicatore dei carichi. Ciò vuol dire che, affinché si abbia biforcazione, le presollecitazioni devono essere di intensità e segno opportune. Ad esempio, nel sistema dell'Esercizio 1, posto $\tilde{F} = 0$, deve essere $\bar{P} = P_c := -cl$, cioè \bar{P} deve avere direzione opposta a quella indicata nella Fig. (a); in caso contrario *non si verifica* biforcazione.

- **Osservazione 15.** In un sistema ad un g.d.l., in accordo a quanto detto nel Par. 3.1, l'ampiezza dello spostamento lungo il percorso diramato resta indeterminata. La questione verrà ulteriormente discussa nel Par. 3.7.

È possibile dimostrare (si veda il successivo Par. 11.4) che i punti del percorso fondamentale corrispondenti a $\lambda < \lambda_c$ sono di *equilibrio stabile*, mentre quelli corrispondenti a $\lambda > \lambda_c$ sono di *equilibrio instabile*, quindi non raggiungibili dal sistema (Fig. 3). Lungo il percorso diramato, invece, l'*equilibrio è indifferente*; quest'ultimo risultato, comunque, è erroneo, ed è conseguenza della linearizzazione, come verrà discusso nel Par. 3.7.

- **Osservazione 16.** Il risultato enunciato può anche essere ottenuto in base alle considerazioni che seguono (*criterio statico di stabilità*). Per $\lambda < \lambda_c$ la rigidezza elastica k è in valore assoluto maggiore di quella geometrica λg , cosicché la rigidezza totale è positiva; perciò, se si assegna al sistema una piccola perturbazione, nasce una reazione strutturale ad essa opposta che tende a far ritornare il sistema nella configurazione iniziale: l'equilibrio è stabile. Per $\lambda > \lambda_c$ la rigidezza geometrica è maggiore di quella elastica e quindi la rigidezza totale è negativa; perciò, assegnata una perturbazione, nasce una reazione strutturale ad essa concorde, che allontana indefinitamente il sistema dalla configurazione di equilibrio, che pertanto è instabile. Per $\lambda = \lambda_c$ le rigidezze elastica e geometrica sono uguali in valore assoluto, per cui la rigidezza totale è nulla; ciò vuol dire che, qualunque sia la perturbazione, la reazione strutturale associata è nulla, cosicché lo stato di equilibrio preesistente resta indisturbato: tutte le configurazioni compatibili sono quindi equilibrate. Quest'ultimo risultato è palesemente erroneo, in quanto i *termini non lineari che sono stati trascurati*, anche se piccoli, sono *decisivi per la stabilità del sistema*.

Esercizio 8: Si determini lo stato critico del sistema in Fig. (a) e si diagrammino gli stati di equilibrio.



Il sistema è simile a quello dell'Esercizio 1, in cui il pendolo è stato sostituito da un'asta rigida e rovesciato (pendolo rovescio). Nella configurazione adiacente (Fig. b), l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad A si scrive (si confronti con l'Eq. (b) dell'Esercizio 1):

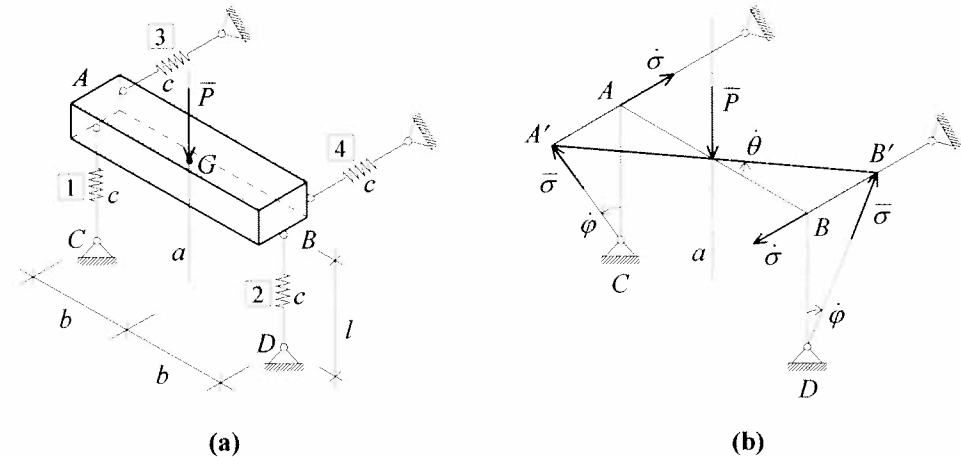
$$(cl - \bar{P})\dot{\theta} = 0 \quad (a)$$

La (a) ammette: (I) la soluzione banale $\dot{\theta} = 0$ (asta rettilinea verticale) e (II) la soluzione non banale $\dot{\theta} \neq 0$ per $P = P_c$, dove:

$$P_c = cl \quad (b)$$

è il *carico critico*. I percorsi di equilibrio sono diagrammati in Fig. (c).

Esercizio 9: Si determini il carico critico del sistema in Fig. (a), costituito da un corpo rigido incernierato all'asse verticale a , lungo il quale può traslare.



Il sistema è simile a quello dell'Esercizio 7, con la differenza che nella configurazione \bar{C} le molle 1 e 2 sono ora compresse ($\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}$, con $\bar{\sigma} = P/2$), cosicché l'effetto geometrico è instabilizzante; le molle 3 e 4 forniscono invece la rigidezza elastica. Assegnata la rotazione $\dot{\theta}$ (Fig. b), si ha $\dot{\varepsilon}_3 = -\dot{\varepsilon}_4 = b\dot{\theta}$, da cui $\dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}$, $\dot{\sigma}_4 = -\dot{\sigma}$, con $\dot{\sigma} = cb\dot{\theta}$, mentre $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = 0$. La rotazione delle molle 1 e 2 è $\dot{\phi} = \dot{\theta}b/l$. Imposto l'equilibrio alla rotazione intorno ad a (Fig. b) è:

$$(\bar{\sigma}\dot{\phi} - \dot{\sigma})2b = 0$$

ovvero:

$$\left(\frac{\bar{P}b}{2l} - cb\right)2b\dot{\theta} = 0$$

Essa ammette soluzione non banale per

$$\bar{P} = P_c = 2cl$$

- **Osservazione 17.** Il meccanismo illustrato nell'Esercizio 9 è alla base di un fenomeno detto di *instabilità torsionale* che si verifica in travi compresse aventi sezione trasversale doppiamente simmetrica.

3.3 Biforcazioni di sistemi a più gradi di libertà

Per determinare gli stati critici di un sistema ad l g.d.l. è necessario risolvere le equazioni incrementali di equilibrio (5), rese omogenee. Poiché la matrice di rigidezza geometrica dipende linearmente dalle forze di presollecitazione, assunto che esse siano tutte proporzionali ad un unico parametro λ , $F_r = -\lambda \tilde{F}_r$ ($r=1,2,\dots$), è $\mathbf{G} = -\lambda \tilde{\mathbf{G}}$, per cui le (5) si scrivono:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} - \lambda \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

avendo ommesso il segno tilde. Le (14) costituiscono un problema algebrico agli autovalori (si veda l'Appendice B.1). Oltre alla soluzione banale $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, valida per ogni λ , le (14) ammettono l soluzioni non banali in corrispondenza di particolari valori di λ ; questi sono soluzione dell'equazione caratteristica

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}) = 0 \quad (15)$$

e sono detti *autovalori*. Poiché $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$ e \mathbf{K} è definita positiva gli autovalori λ_i ($i=1,\dots,l$) sono reali (cfr. Appendice B.2); nel seguito si assume che $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l$. Le soluzioni associate $\dot{\mathbf{q}} = \phi_i$ ($i=1,\dots,l$), sono dette *autovettori*, o *modi critici*; le coppie (ϕ_i, λ_i) costituiscono le *autosoluzioni* del problema.

Da un punto di vista meccanico, gli autovalori individuano quelle particolari intensità di presollecitazione per le quali sussistono due configurazioni di equilibrio infinitamente vicine, la configurazione di riferimento $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ e la configurazione variata, descritta dall'autovettore associato. Ad ogni autovalore corrisponde perciò una biforcazione dell'equilibrio lungo il percorso fondamentale. Peraltro, poiché gli autovettori sono determinati a meno di una costante moltiplicativa, è possibile individuare solo la forma (detta anche *deformata modale*) assunta dal sistema lungo il percorso di equilibrio diramato, ma non l'ampiezza della deformata. Questa circostanza è già stata messa in evidenza nell'Osservazione 15 a proposito dei sistemi ad un g.d.l. e rappresenta il maggiore limite della teoria linearizzata.

- **Osservazione 18.** Il numero di autovettori e autovalori può occasionalmente essere minore di l , dipendentemente dalla struttura di \mathbf{G} . Si veda più avanti l'Esercizio 18 e l'Osservazione 32.

Se si diagrammano le soluzioni della (14) in uno spazio $l+1$ dimensionale $(\dot{\mathbf{q}}, \lambda)$, si ha un grafico del tipo rappresentato in Fig. 4a, dove $l=2$. In corrispondenza di ciascun autovalore si verifica un punto di biforcazione, da cui si dirama un percorso a $\lambda = \text{cost}$. Le proiezioni dei percorsi sul piano $\lambda = 0$ (spazio delle variabili di configurazione) sono rette i cui coseni direttori sono proporzionali alle componenti degli autovettori associati (Fig. 4b).

È possibile dimostrare (si vedano l'Osservazione 19 e il successivo Par. 11.4.6) che i punti del percorso fondamentale corrispondenti a $\lambda < \lambda_1$ sono di equilibrio stabile, mentre quelli corrispondenti a $\lambda > \lambda_1$ sono di equilibrio instabile. Tuttavia, valori del carico superiori a λ_1 non sono di interesse, in quanto i relativi stati non sono raggiungibili in modo naturale dal sistema (lo sono solo se il sistema è "portato" in quello

stato, aggiungendo, ad esempio, vincoli aggiuntivi e rimuovendoli successivamente). Per questo motivo, il più piccolo dei valori critici del carico è l'unico autovalore di interesse strutturale; esso è detto *primo carico critico* o semplicemente *carico critico* (sottintendendo, cioè, che è il più piccolo degli l carichi critici). È dunque:

$$\lambda_c := \min\{\lambda_i\} = \lambda_1 \quad (16)$$

L'autovettore corrispondente è detto *modo critico*:

$$\phi_c := \phi_1 \quad (17)$$

L'equilibrio dei percorsi diramati è invece, nella teoria linearizzata, sempre indifferente.

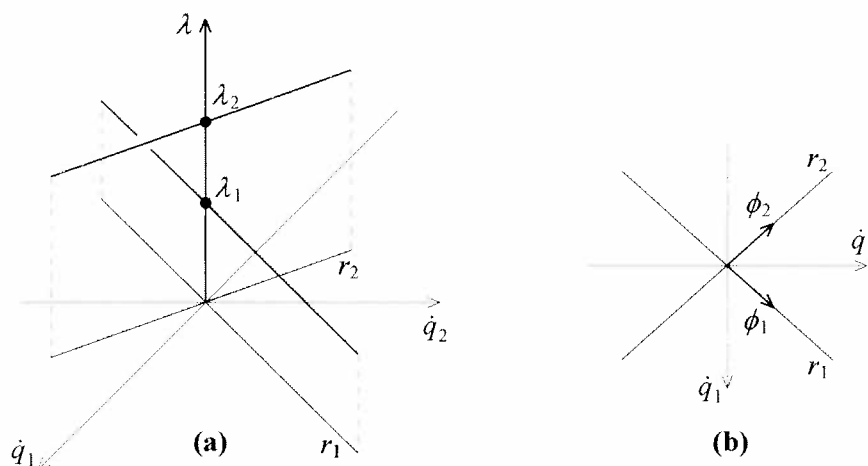


Fig. 4 (a) Percorsi di equilibrio di sistemi ad $l=2$ g.d.l. in assenza di forze incrementali e (b) loro proiezione nello spazio delle variabili di configurazione

- **Osservazione 19.** L'applicazione del criterio statico di stabilità ai sistemi aventi più g.d.l. non è altrettanto semplice di quella relativa ai sistemi ad un g.d.l.; ciò in quanto spostamenti $\dot{\mathbf{q}}$ e forze $\dot{\mathbf{p}} = (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}$ associate non sono *collineari*. Tuttavia è possibile associare a ciascuna direzione $\dot{\mathbf{q}}$ dello spazio delle configurazioni, una rigidezza k_q definita come proiezione della forza $\dot{\mathbf{p}}$ nella direzione $\dot{\mathbf{q}}$, per $\dot{\mathbf{q}}$ unitario, $k_q := \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{p}} / \|\dot{\mathbf{q}}\|$. Con questa definizione la rigidezza della struttura è positiva in tutte le direzioni, e l'equilibrio conseguentemente stabile, se e solo se $\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{p}}$ formano un angolo acuto per ogni $\dot{\mathbf{q}}$, se cioè $\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{p}} > 0 \forall \dot{\mathbf{q}}$, ovvero se, e solo se:

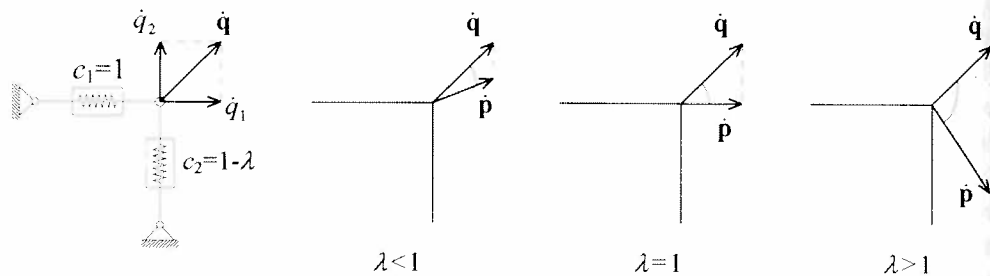
$$\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}$$

La condizione di stabilità richiede quindi che la *matrice di rigidezza totale*, $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}$, sia *definita positiva*. Se viceversa esiste anche una sola direzione $\dot{\mathbf{q}}_c$ per la quale la disuguaglianza non è soddisfatta, $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}$ è indefinita; a $\dot{\mathbf{q}}_c$ è associata una rigidezza negativa, e l'equilibrio è perciò instabile.

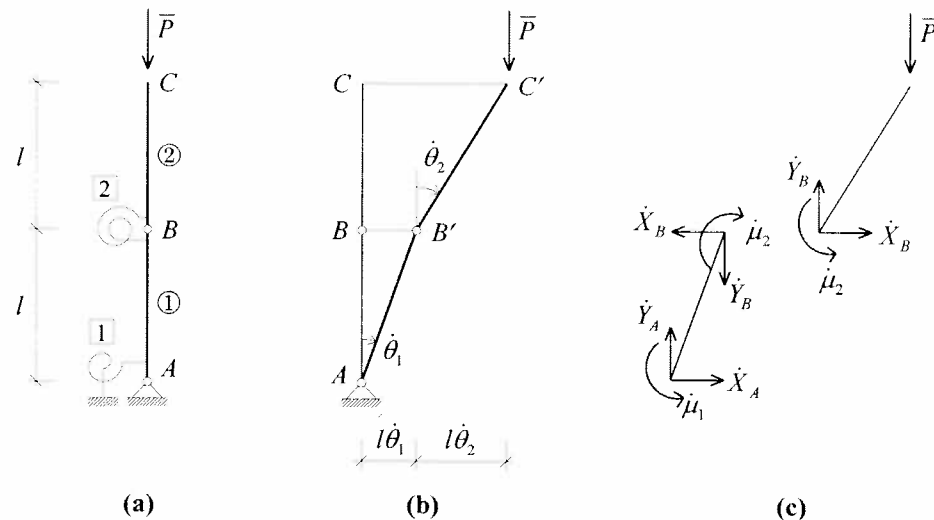
Quando $\lambda=0$ la condizione di stabilità è senz'altro soddisfatta in quanto \mathbf{K} è definita positiva. Questa proprietà è preservata per λ piccolo, cosicché $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}$ è

anch'essa definita positiva. Al crescere di λ la matrice $\mathbf{K} - \lambda \mathbf{G}$ diviene prima semidefinita positiva (in quanto singolare) per $\lambda = \lambda_c$, e poi indefinita per $\lambda > \lambda_c$. In particolare, nel campo instabile, a $\mathbf{q}_c = \alpha \phi_c$ è associata una rigidezza geometrica in valore assoluto maggiore di quella elastica, cosicché l'effetto geometrico instabilizzante è prevalente su quello elastico stabilizzante.

Il meccanismo può essere esemplificato dal sistema in figura, costituito da una molla di rigidezza costante $c_1 = 1$, e da un dispositivo meccanico di rigidezza variabile, dipendente da un parametro λ , ad esempio $c_2 = 1 - \lambda$. Quando $\lambda < 1$ le due rigidezze sono positive e l'equilibrio è stabile. Quando $\lambda = 1$ la rigidezza del dispositivo si annulla, cosicché a spostamenti $\mathbf{q}_c = (0, q_2)^T$ corrispondono reazioni strutturali nulle: il sistema si comporta come labile. Quando $\lambda > 1$ la rigidezza del dispositivo è negativa, cosicché a spostamenti \mathbf{q}_c corrispondono reazioni strutturali negative (cioè nella direzione dello spostamento): il sistema è instabile. In quest'ultimo caso \mathbf{p} e \mathbf{q} formano un angolo ottuso per \dot{q}_2/\dot{q}_1 sufficiente grande.



Esercizio 10: Si determinino carichi e modi critici del sistema in Fig. (a) (doppio pendolo rovescio). Si rappresentino poi i percorsi di equilibrio e le deformate modali.



Si assumono come parametri lagrangiani le rotazioni assolute delle due aste. Alle rotazioni θ_1 e

θ_2 positive come in Fig. (b), corrispondono le deformazioni $\dot{\kappa}_1 = \dot{\theta}_1$, $\dot{\kappa}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$, e quindi le tensioni:

$$\dot{\mu}_1 = c \dot{\theta}_1, \quad \dot{\mu}_2 = c(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (a)$$

Imponendo l'equilibrio dei due corpi nella configurazione variata si ha (Fig. c):

$$\begin{aligned} \dot{X}_A - \dot{X}_B &= 0, & \dot{Y}_A - \dot{Y}_B &= 0, & \dot{\mu}_1 - \dot{\mu}_2 + \dot{X}_B l - \dot{Y}_B l \theta_1 &= 0 \\ \dot{X}_B &= 0, & \dot{Y}_B - \bar{P} &= 0, & \dot{\mu}_2 - \bar{P} l \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

da cui si trae:

$$\dot{X}_A = 0, \quad \dot{X}_B = 0, \quad \dot{Y}_B = \bar{P}, \quad \dot{Y}_A = \bar{P} \quad (c)$$

ed inoltre, tenuto conto delle (a):

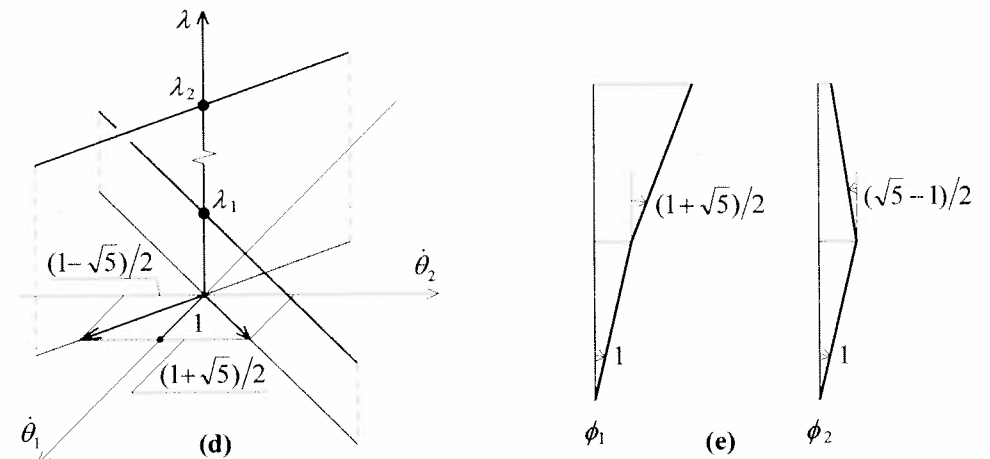
$$\left(\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} - \bar{P} \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Posto:

$$\lambda = \bar{P} l / c \quad (e)$$

Le (d) si scrivono nella forma (14):

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (f)$$



L'equazione caratteristica (15) è:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (g)$$

ovvero:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad (h)$$

Essa ammette le soluzioni (autovalori):

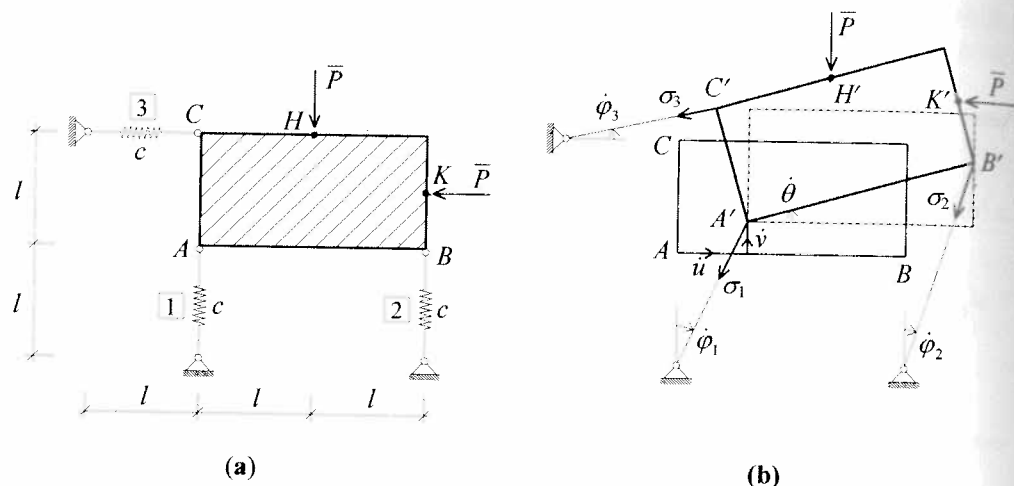
$$\lambda_c = \lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad (i)$$

a cui corrispondono gli autovettori:

$$\phi_c = \phi_1 = \left\{ 1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}^T, \quad \phi_2 = \left\{ 1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}^T \quad (l)$$

definiti a meno di una costante moltiplicativa. I percorsi di equilibrio sono diagrammati in Fig. (d); le deformate modali sono rappresentate in Fig. (e).

Esercizio 11: Si determini il carico critico ed il modo critico del sistema in Fig. (a), trascurando gli spostamenti precritici \bar{q} .



Nella configurazione di riferimento è $\bar{\sigma}_1 = -\bar{P}/4$, $\bar{\sigma}_2 = -3\bar{P}/4$, $\bar{\sigma}_3 = -\bar{P}$. Si confonde, come usuale, la configurazione di riferimento con quella naturale ($\bar{q} \cong 0$, cfr. Osservazione 1). La configurazione adiacente è individuata da due componenti di traslazione ed una rotazione (Fig. b). Le deformazioni corrispondenti sono:

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{v}, \quad \dot{\epsilon}_2 = \dot{v} + 2l\dot{\theta}, \quad \dot{\epsilon}_3 = \dot{u} - l\dot{\theta} \quad (a)$$

e le rotazioni delle molle:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{u}/l, \quad \dot{\phi}_2 = \dot{u}/l, \quad \dot{\phi}_3 = \dot{v}/l \quad (b)$$

Gli incrementi di tensione sono.

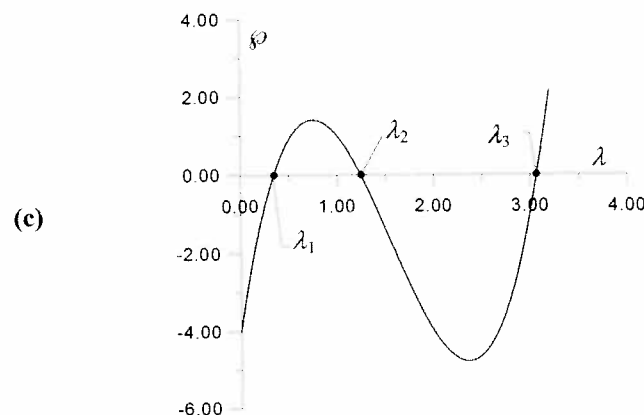
$$\dot{\sigma}_1 = c\dot{v}, \quad \dot{\sigma}_2 = c(\dot{v} + 2l\dot{\theta}), \quad \dot{\sigma}_3 = c(\dot{u} - l\dot{\theta}) \quad (c)$$

che, sommati alle tensioni di presollecitazione forniscono:

$$\sigma_1 = -\bar{P}/4 + c\dot{v}, \quad \sigma_2 = -3\bar{P}/4 + c(\dot{v} + 2l\dot{\theta}), \quad \sigma_3 = -\bar{P} + c(\dot{u} - l\dot{\theta}) \quad (d)$$

Le condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale in C' si scrivono immediatamente:

$$-\sigma_1\dot{\phi}_1 - \sigma_2\dot{\phi}_2 - \sigma_3 - \bar{P} = 0, \quad -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3\dot{\phi}_3 - \bar{P} = 0 \quad (e)$$



Per scrivere la condizione di equilibrio alla rotazione intorno ad A' è conveniente scomporre le tensioni. σ_2 ha una componente verticale σ_2 di braccio $2l$, mentre la componente orizzontale $\dot{\phi}_2\sigma_2$ ha braccio $2l\dot{\theta}$ (quindi dà contributo di ordine superiore); la tensione σ_3 ha componente orizzontale σ_3 di braccio l , mentre la componente verticale $\dot{\phi}_3\sigma_3$ ha braccio $l\dot{\theta}$ (quindi dà contributo di ordine superiore). La forza \bar{P} applicata in H' ha braccio $l - l\dot{\theta}$, mentre quella applicata in K' ha braccio $l/2 + 2l\dot{\theta}$. In definitiva si ha:

$$-\sigma_2 2l + \sigma_3 l - \bar{P}(l - l\dot{\theta}) + \bar{P}(l/2 + 2l\dot{\theta}) = 0 \quad (f)$$

Sostituendo le (b) e (d) nelle (e) ed (f) e linearizzando negli incrementi si ha:

$$\left(\begin{bmatrix} c & 0 & -cl \\ 0 & 2c & 2cl \\ -cl & 2cl & 5cl^2 \end{bmatrix} - \frac{\bar{P}}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Posto $\lambda = \bar{P}/(cl)$ l'equazione caratteristica è:

$$\phi(\lambda) := 3\lambda^3 - 14\lambda^2 + 16\lambda - 4 = 0 \quad (h)$$

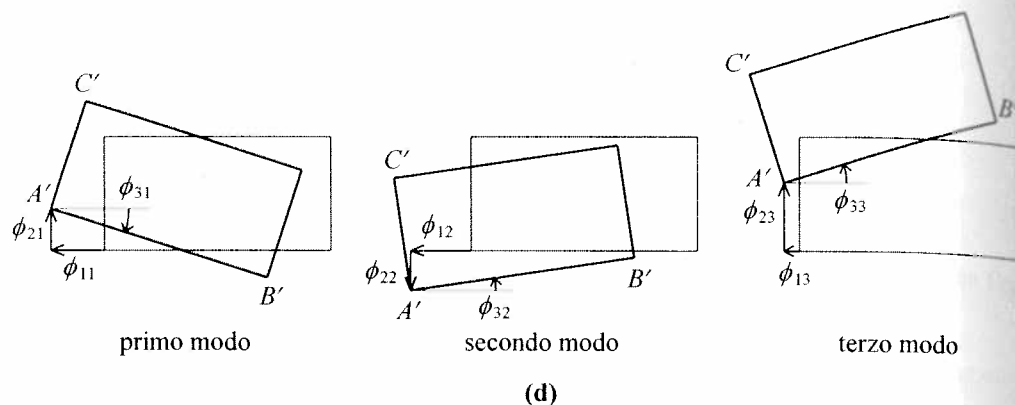
Essa ammette soluzioni che possono essere determinate numericamente (Fig. c):

$$\lambda_1 = \lambda_c = 0.348, \quad \lambda_2 = 1.247, \quad \lambda_3 = 3.072 \quad (i)$$

a cui corrispondono gli autovettori:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left\{ -0.699 \quad 0.552 \quad -0.456 l^{-1} \right\}^T \\ \phi_2 &= \left\{ -0.819 \quad -0.537 \quad 0.202 l^{-1} \right\}^T \\ \phi_3 &= \left\{ -0.222 \quad 0.858 \quad 0.460 l^{-1} \right\}^T \end{aligned} \quad (l)$$

Le deformate modali sono indicate in Fig. (d).



3.4 Proprietà di ortogonalità dei modi critici

È noto dall'Algebra (cfr. Appendice B.2), che gli autovettori ϕ_i del problema (14), con \mathbf{K} e \mathbf{G} simmetriche, soddisfano le seguenti proprietà, dette di ortogonalità:

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = 0, \quad \phi_j^T \mathbf{G} \phi_i = 0 \quad i \neq j \quad (18)$$

Poiché gli autovettori ϕ_i sono definiti a meno di una costante, questa può scegliersi in modo tale che valgano le seguenti condizioni, dette di *normalizzazione*:

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \lambda_i, \quad \phi_i^T \mathbf{G} \phi_i = 1 \quad (19)$$

Imposta la (19₂), la (19₁) è automaticamente soddisfatta, come si rileva direttamente dalle (14). Le (18) e (19) possono scriversi insieme:

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \delta_{ij} \lambda_i, \quad \phi_j^T \mathbf{G} \phi_i = \delta_{ij} \quad (20)$$

con $\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (simbolo di Kronecker). Autovettori che soddisfano le (20) sono detti *ortonormali*.

- **Osservazione 20.** Le condizioni (20) sono suscettibili di una notevole interpretazione meccanica. I vettori $\mathbf{K} \phi_i$ rappresentano infatti le reazioni strutturali elastiche associate all' i -esimo modo critico; analogamente i vettori $\mathbf{G} \phi_i$ rappresentano le corrispondenti reazioni strutturali geometriche. Le (20) stabiliscono perciò che il lavoro virtuale compiuto da tali forze nello spostamento descritto dal j -esimo modo critico è nullo se $i \neq j$. In altre parole i modi critici sono tra loro ortogonali nel senso che le forze (elastiche o geometriche) ad essi associate non compiono lavoro in modi critici diversi da quelli che le hanno generate.

Se si ordinano gli autovettori per colonne in una matrice Φ , si ha:

$$\Phi := [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_i] \quad (21)$$

dove Φ è detta *matrice dei modi critici*. Le (20) possono allora anche scriversi:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \mathbf{G} \Phi = \mathbf{I} \quad (22)$$

dove:

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i\} \quad (23)$$

è la *matrice degli autovalori*, diagonale.

Esercizio 12: Si verifichi l'ortogonalità degli autovettori del sistema dell'Esercizio 10 e si imponga la normalizzazione.

Gli autovettori trovati (Eq. 1) sono:

$$\phi_1 = \left\{ 1 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}^T, \quad \phi_2 = \left\{ 1 \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}^T \quad (a)$$

Poiché $\mathbf{G}=\mathbf{I}$, è:

$$\phi_1^T \mathbf{G} \phi_2 = \phi_1^T \phi_2 = 0 \quad (b)$$

in accordo alla (18₂). Si noti che in questo caso particolare, essendo $\mathbf{G}=\mathbf{I}$, ϕ_1 e ϕ_2 sono ortogonali nel senso della metrica euclidea. Inoltre è:

$$\phi_1^T \mathbf{K} \phi_2 = \left\{ 1 \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{2} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} = 0 \quad (c)$$

in accordo alla (18₁).

Per normalizzare gli autovettori si moltiplicano per uno scalare α_i , $\hat{\phi}_i = \alpha_i \phi_i$, e si impone che la (19₂) sia soddisfatta

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^T \hat{\phi}_1 &= \alpha_1^2 \phi_1^T \phi_1 = \alpha_1^2 \left(1 + \frac{1}{4} (1+\sqrt{5})^2 \right) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0.526 \\ \hat{\phi}_2^T \hat{\phi}_2 &= \alpha_2^2 \phi_2^T \phi_2 = \alpha_2^2 \left(1 + \frac{1}{4} (1-\sqrt{5})^2 \right) = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 0.851 \end{aligned} \quad (d)$$

Gli autovettori normalizzati sono:

$$\hat{\phi}_1 = \{0.526 \quad 0.851\}^T, \quad \hat{\phi}_2 = \{0.851 \quad -0.526\}^T \quad (e)$$

Si verifica facilmente che gli autovettori normalizzati soddisfano la (19₁).

3.5 Forze di disturbo e imperfezioni: sistemi ad un grado di libertà

Si vuole esaminare il comportamento della struttura nell'intorno di un punto di biforcazione quando, oltre alle forze di presollecitazione, sono presenti anche piccole forze di disturbo e/o imperfezioni geometriche. In tali casi le equazioni di equilibrio incrementali (5) sono non omogenee. Si fa prima riferimento ad un sistema ad un g.d.l., poi si analizzano (Par. 3.6) i sistemi a più g.d.l..

Le equazioni di equilibrio (13) si modificano in:

$$(k - \lambda g) \dot{q} = \dot{p} \quad (24)$$

dove \dot{p} sono piccole forze incrementali (oppure, come si vedrà nell'Esercizio 13, termini dovuti ad imperfezioni). La (24) ammette la soluzione:

$$\dot{q} = \frac{\dot{P}}{k} \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_c} \quad (25)$$

dove $\lambda_c = k/g$ è il carico critico del sistema (cioè l'unico autovalore del problema reso omogeneo). La (25) può così interpretarsi: lo spostamento \dot{q} è uguale allo spostamento $q_1 := \dot{P}/k$ che subirebbe il sistema in assenza di presollecitazione (pari alla soluzione del problema lineare, o del primo ordine), amplificato dal fattore $(1 - \lambda/\lambda_c)^{-1}$ (che infatti, per $\lambda < \lambda_c$, è maggiore di 1). Questo prende il nome di *fattore di amplificazione (statico)*. Per $\lambda/\lambda_c \rightarrow 1$ il fattore di amplificazione tende ad infinito, traducendo il fatto che la rigidezza del sistema tende a zero. Cosicché, se si diagramma la (25) sul piano (\dot{q}, λ) si ottiene il grafico di Fig. 5.

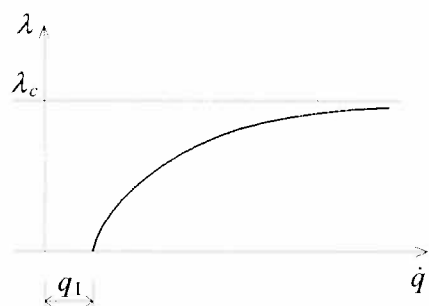
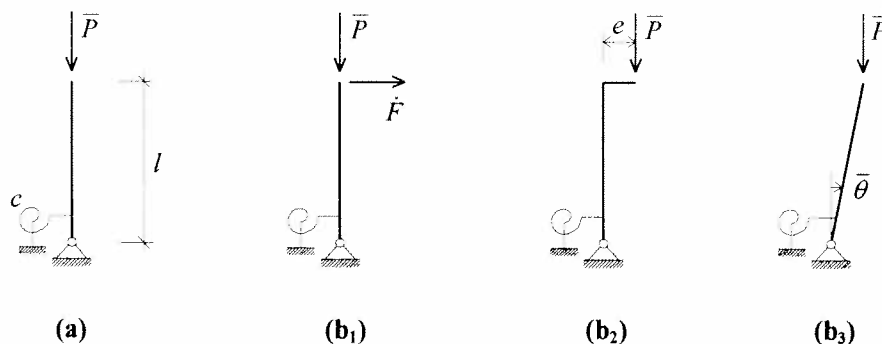


Fig. 5 Percorso di equilibrio di un sistema ad un g.d.l. soggetto a forze incrementali; $q_1 \equiv$ soluzione lineare (o del primo ordine)

- **Osservazione 21.** Si confronti la (25) con l'Eq. (c) dell'Esercizio 1, relativa ad un sistema in cui l'effetto geometrico è stabilizzante.
- **Osservazione 22.** Si noti che il problema non omogeneo non presenta biforcazioni; questa caratteristica è propria dei sistemi anche a più g.d.l..

Esercizio 13: Si determini il percorso di equilibrio del sistema in Fig. (a), presollecitato da una forza verticale \bar{P} e soggetto: (I) ad una forza di disturbo orizzontale \bar{F} (Fig. b₁); (II) ad una piccola eccentricità e della forza verticale (Fig. b₂); (III) ad una piccola inclinazione $\bar{\theta}$ dell'asta (Fig. b₃).

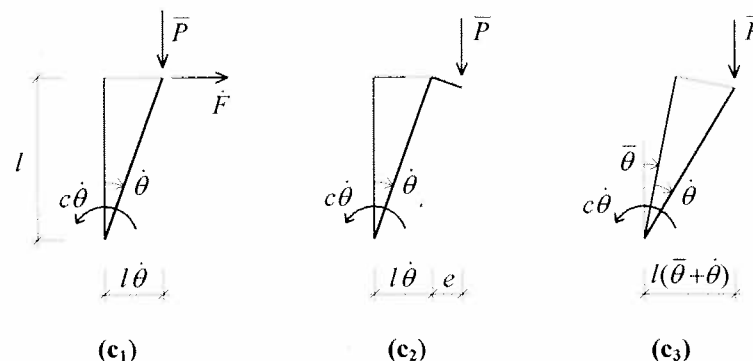


(I) Nella configurazione adiacente (Fig. c₁) l'equazione di equilibrio si scrive:

$$(c - \bar{P}l)\dot{\theta} = \bar{F}l \quad (a)$$

la cui soluzione è:

$$\dot{\theta} = \frac{\bar{F}l}{c} \frac{1}{1 - \bar{P}l/c} \quad (b)$$



(II) Nella configurazione adiacente (Fig. c₂) l'equazione di equilibrio si scrive:

$$(c - \bar{P}l)\dot{\theta} = \bar{P}e \quad (c)$$

la cui soluzione è:

$$\dot{\theta} = \frac{\bar{P}e}{c} \frac{1}{1 - \bar{P}l/c} \quad (d)$$

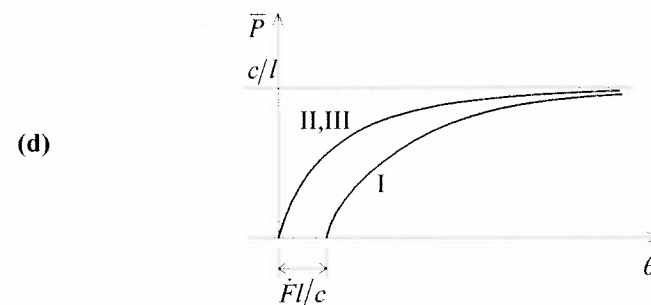
(III) Nella configurazione adiacente (Fig. c₃) l'equazione di equilibrio si scrive:

$$(c - \bar{P}l)\dot{\theta} = \bar{P}l\bar{\theta} \quad (e)$$

la cui soluzione è:

$$\dot{\theta} = \frac{\bar{P}l\bar{\theta}}{c} \frac{1}{1 - \bar{P}l/c} \quad (f)$$

Le curve carico-spostamento (b), (d) ed (f) sono diagrammate in Fig. (d), assunto $l\bar{\theta} = e$.



- **Osservazione 23.** Nei casi (II) e (III) dell'Esercizio 13, i termini di imperfezione $\bar{P}e$ e $\bar{P}l\bar{\theta}$, stanti la piccolezza di e e di $\bar{\theta}$, vanno considerati alla stregua di forze incrementali, anche se legate alla presollecitazione \bar{P} .

3.6 Forze di disturbo e imperfezioni: sistemi a più gradi di libertà

Si considerino ora sistemi a più g.d.l.. Le equazioni (14) si modificano come segue:

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} - \lambda \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} \quad (26)$$

dove $\dot{\mathbf{p}}$ è un vettore di forze incrementali e/o imperfezioni. Le (26) possono essere risolte facilmente nella base ortonormale degli autovettori procedendo come segue. Si pone:

$$\dot{\mathbf{q}} = \Phi \dot{\eta} \quad (27)$$

dove la matrice $l \times l$ Φ è definita dalla (21) e il vettore $l \times 1$ $\dot{\eta}$ è il vettore delle coordinate principali.

- **Osservazione 24.** La (27) esprime lo spostamento $\dot{\mathbf{q}}$ come combinazione lineare a coefficienti incogniti $\dot{\eta}_i$ degli autovettori ϕ_i ; $\dot{\eta}_i$ rappresenta dunque l'ampiezza di $\dot{\mathbf{q}}$ nella direzione ϕ_i dello spazio delle variabili di configurazione (Fig. 6).

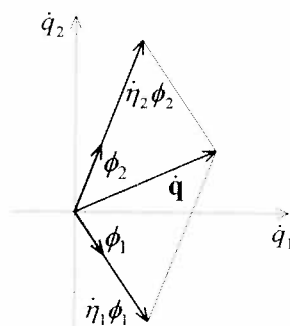


Fig. 6 Scomposizione del vettore $\dot{\mathbf{q}}$ nella base ortonormale degli autovettori e significato delle coordinate principali $\dot{\eta}_i$ ($i=1,2$)

Sostituendo la (27) nella (26) e premoltiplicando per Φ^T si ha:

$$(\Phi^T \mathbf{K} \Phi - \lambda \Phi^T \mathbf{G} \Phi) \dot{\eta} = \Phi^T \dot{\mathbf{p}} \quad (28)$$

Tenuto conto delle condizioni di ortonormalizzazione (22), la (28) si scrive:

$$(\Lambda - \lambda \mathbf{I}) \dot{\eta} = \dot{\xi} \quad (29)$$

dove si è posto:

$$\dot{\xi} = \Phi^T \dot{\mathbf{p}} \quad (30)$$

vettore delle forze modali. La i -esima componente $\dot{\xi}_i = \phi_i^T \dot{\mathbf{p}}$ rappresenta il lavoro virtuale compiuto dalle forze incrementali $\dot{\mathbf{p}}$ nel modo i -esimo ϕ_i . Le (29) costituiscono un sistema di l equazioni algebriche lineari disaccoppiate nelle incognite $\dot{\eta}_i$; possono anche scriversi, ricordando la (23):

$$(\lambda_j - \lambda) \dot{\eta}_j = \dot{\xi}_j \quad (j=1,2,\dots,l) \quad (31)$$

Risolvendo e ritornando alle variabili \dot{q}_i utilizzando la (27), si ha infine:

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^l \frac{\dot{\xi}_j}{\lambda_j - \lambda} \phi_j \quad (32)$$

Gli addendi della somma (32) sono inversamente proporzionali alle differenze $\lambda_j - \lambda$, cosicché, i termini prevalenti sono quelli associati agli autovalori λ_i più vicini al carico λ . Ordinati gli autovalori in modo crescente $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, per $\lambda < \lambda_1 \equiv \lambda_c$, gli addendi della somma tendono a zero in modulo, per cui è sufficiente considerare solo i primi.

Un metodo approssimato per stimare la soluzione è il seguente. Si riscrive la (32) nella forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_j} \frac{\dot{\xi}_j}{\lambda_j} \phi_j \quad (33)$$

in cui appaiono i fattori di amplificazione $(1 - \lambda/\lambda_j)^{-1}$. Ignorandoli si ottiene la soluzione corrispondente a $\lambda = 0$, cioè la soluzione lineare rappresentata nella base degli autovettori:

$$\dot{\mathbf{q}}_l = \sum_{j=1}^l \frac{\dot{\xi}_j}{\lambda_j} \phi_j \quad (34)$$

La (33) esprime dunque la soluzione del problema linearizzato come la soluzione del problema lineare, (34), in cui ciascuna componente è amplificata del fattore che compete all'autovalore associato. Ammettendo che entrambe le somme (33) e (34) possano essere approssimate dal solo primo termine, vale la relazione:

$$\dot{\mathbf{q}} \cong \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_c} \dot{\mathbf{q}}_l \quad (35)$$

Se tutti i termini della (34) hanno il medesimo segno, la (35) fornisce un valore di $\dot{\mathbf{q}}$ il cui modulo è approssimato per eccesso. $\dot{\mathbf{q}}$ può essere approssimativamente espresso moltiplicando $\dot{\mathbf{q}}_l$ per il fattore di amplificazione $1/(1 - \lambda/\lambda_c)$, così come accade per i sistemi ad un g.d.l. Poiché le deformazioni $\dot{\epsilon}$ e le tensioni $\dot{\sigma}$ sono proporzionali a $\dot{\mathbf{q}}$, tutta la soluzione del problema elastico lineare è amplificata dello stesso fattore:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_c} \dot{\mathbf{q}}_l, \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_c} \dot{\epsilon}_l, \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{1 - \lambda/\lambda_c} \dot{\sigma}_l \quad (36)$$

- **Osservazione 25.** Quanto sopra suggerisce il seguente procedimento approssimato di calcolo, da effettuarsi in presenza di forze di disturbo.

I. Si ignora lo stato di presollecitazione e si effettua una analisi lineare; si determinano così $\dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\epsilon}_l, \dot{\sigma}_l$.

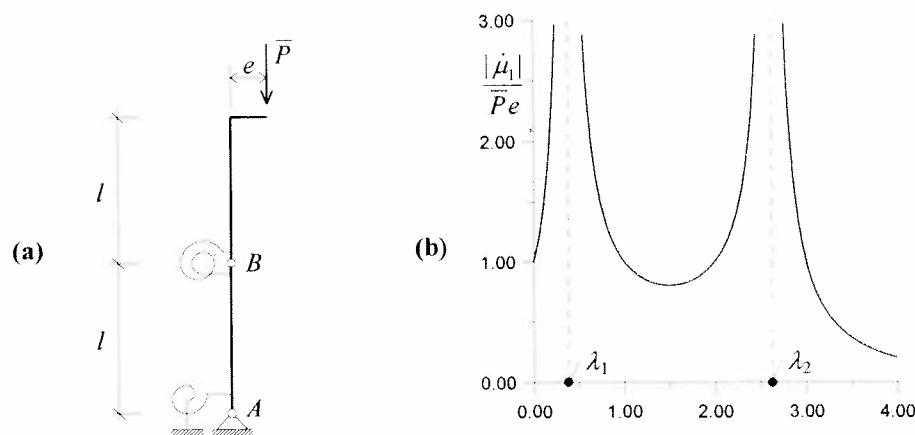
II. Si calcola il carico critico λ_c (ignorando quindi le forze di disturbo).

III. Si applicano le (36).

Il procedimento è molto semplice in quanto richiede la determinazione del solo ca-

rico critico e non la soluzione dell'intero problema agli autovalori (come fa invece l'espressione esatta (33)). Il metodo però non sempre è in favore di sicurezza, in quanto non sempre *sovrastima spostamenti e tensioni*; tuttavia nelle applicazioni di interesse ingegneristico l'approssimazione che si consegue è di norma molto buona (si veda in proposito l'esempio che segue).

Esercizio 14: Con riferimento all'Esercizio 10, si determini la coppia di richiamo elastico alla base della struttura quando la forza verticale \bar{P} ha eccentricità e (Fig. a). Si determini: (a) la soluzione esatta applicando l'equazione (32) e (b) la soluzione approssimata, applicando il metodo descritto nell'Osservazione 25.



(a) Le equazioni di equilibrio (d) dell'Esercizio 10, posto $\lambda = \bar{P}l/c$, si modificano come segue:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{P}e/c \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Ricordando le espressioni degli autovettori normalizzati (Eq. (e) dell'Esercizio 12), le forze modali valgono:

$$\dot{\xi}_1 = 0.851 \frac{\bar{P}e}{c}, \quad \dot{\xi}_2 = -0.526 \frac{\bar{P}e}{c} \quad (b)$$

La (32) si scrive

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \left[\frac{0.851}{0.382 - \lambda} \begin{Bmatrix} 0.526 \\ 0.851 \end{Bmatrix} - \frac{0.526}{2.618 - \lambda} \begin{Bmatrix} 0.851 \\ -0.526 \end{Bmatrix} \right] \frac{\bar{P}e}{c} \quad (c)$$

essendo $\lambda_1 = 0.382$ e $\lambda_2 = 2.618$. Il momento nell'organo in A vale $\dot{\mu}_1 = c\dot{\theta}_1$, quindi:

$$\dot{\mu}_1 = 0.448 \bar{P}e \left(\frac{1}{0.382 - \lambda} - \frac{1}{2.618 - \lambda} \right) \quad (d)$$

ed è diagrammato in Fig. (b).

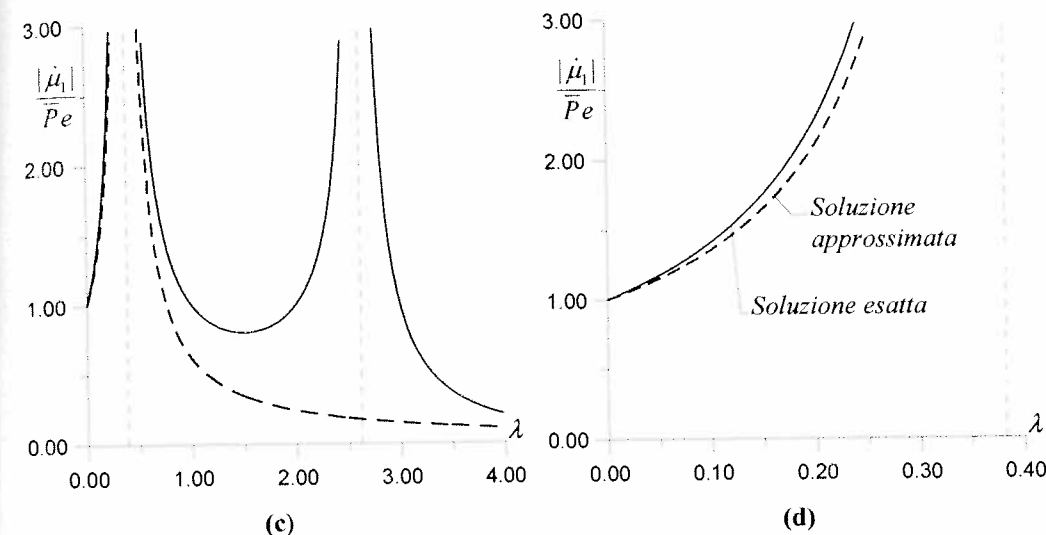
(b) Ignorando l'effetto geometrico ($\lambda = 0$), dalle equazioni di equilibrio (a) si trae:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\bar{P}e}{c}, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{2\bar{P}e}{c} \quad (e)$$

Il momento alla base è $\dot{\mu}_1 = \bar{P}e$. Applicando la (36₃) si ha:

$$\dot{\mu}_1 = \bar{P}e \frac{1}{1 - \lambda \cdot 0.382} \quad (f)$$

La curva (f) è diagrammata in Fig. (c) insieme alla soluzione esatta (d). Dal confronto si vede che per $\lambda < \lambda_c$, la soluzione approssimata (f) costituisce un'ottima approssimazione della soluzione esatta (si veda in proposito l'ingrandimento riportato in Fig. d); ciò ovviamente non vale per $\lambda > \lambda_c$.



3.7 Limiti della teoria linearizzata: cenni sul comportamento postcritico

La teoria linearizzata non è in grado di fornire informazioni circa il percorso diramato. Infatti, come si è visto, questo appare come una retta orizzontale caratterizzata da un illusorio equilibrio indifferente. Un'analisi più approfondita richiede necessariamente l'impiego della teoria non lineare della biforcazione che costituisce però un capitolo della Scienza delle Costruzioni così vasto che non può essere affrontato in questa sede. Tuttavia alcune considerazioni relative a sistemi ad un g.d.l. serviranno a chiarire i concetti fondamentali.

L'equazione non lineare di equilibrio di un'ampia classe di sistemi ad un g.d.l. si scrive (cfr. Esercizio 13, casi (II) e (III))

$$p_e(\dot{q}) - \lambda p_g(\dot{q}) = b\lambda \quad p_e(0) = p_g(0) = 0 \quad (37)$$

dove p_e e p_g sono le reazioni strutturali elastica e geometrica, dipendenti in modo non lineare dallo spostamento incrementale \dot{q} , e $b\lambda$ rappresenta l'effetto delle imperfezioni. Le funzioni $p_e(\dot{q})$ e $p_g(\dot{q})$ ammettono gli sviluppi in serie:

$$\begin{aligned} p_e(\dot{q}) &= k\dot{q} + \frac{1}{2} p_e''(0) \dot{q}^2 + \dots \\ p_g(\dot{q}) &= g\dot{q} + \frac{1}{2} p_g''(0) \dot{q}^2 + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

dove l'apice indica derivazione rispetto a \dot{q} e

$$k = p'_e(0), \quad g = p'_g(0) \quad (39)$$

sono rispettivamente la rigidezza elastica e geometrica del sistema. Se nelle (38) si ritengono i soli termini lineari in \dot{q} , si perviene ai risultati del Par. 3.2 ($b=0$) o Par. 3.5 ($b \neq 0$); in particolare il carico critico è $\lambda_c = k/g$. Se invece si fa riferimento alle equazioni esatte (37) si ha, con $b=0$,

$$\lambda = p_e(\dot{q})/p_g(\dot{q}) \quad (40)$$

si ottiene cioè il percorso diramato nella forma $\lambda = \lambda(\dot{q})$. Per $\dot{q} \rightarrow 0$ questo interseca il percorso fondamentale nel punto di biforcazione, corrispondente a $\lambda_c = p_e(0)/p_g(0) = 0/0$. Poiché il rapporto è indeterminato, applicando il teorema di De L'Hospital si ha, in virtù della (39):

$$\lambda_c = \lim_{\dot{q} \rightarrow 0} \frac{p_e(\dot{q})}{p_g(\dot{q})} = \frac{p'_e(0)}{p'_g(0)} = \frac{k}{g} \quad (41)$$

Si ottiene quindi il medesimo valore del carico critico fornito dalla teoria linearizzata.

Il percorso diramato può essere descritto in modo approssimato sviluppando la (40) in serie di \dot{q} intorno a $\dot{q} = 0$. Si ha:

$$\lambda = \lambda_c + \lambda'_c \dot{q} + \frac{1}{2} \lambda''_c \dot{q}^2 + \dots \quad (42)$$

dove:

$$\lambda'_c = \left(\frac{p_e}{p_g} \right)' \bigg|_{\dot{q}=0}, \quad \lambda''_c = \left(\frac{p_e}{p_g} \right)'' \bigg|_{\dot{q}=0} \quad (43)$$

Possibili percorsi diramati sono indicati in Fig. 7.

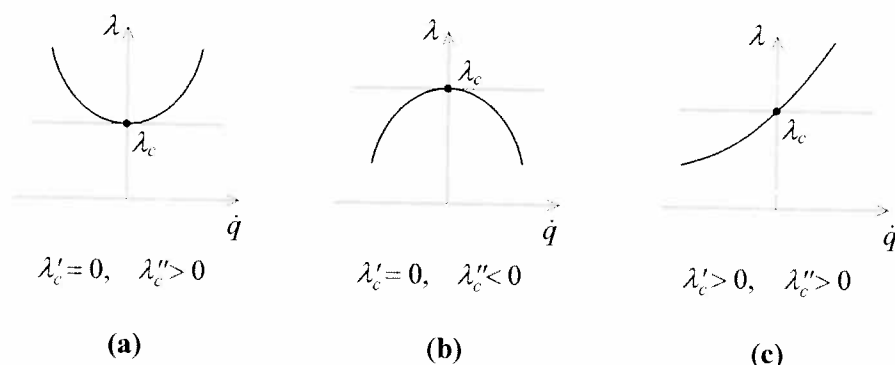


Fig. 7 Percorsi diramati non lineari della struttura perfetta: biforcazione (a) sopracritica, (b) sottocritica, (c) transcritica; (— teoria non lineare, — teoria linearizzata)

• **Osservazione 26.** La teoria linearizzata fornisce sempre un percorso orizzontale, che quindi in generale *non rappresenta la tangente al percorso diramato*, se non nei casi (a) e (b) (biforcazioni simmetriche) di Fig. 7. Quindi, in mancanza di altre informazioni, *il percorso orizzontale è privo di qualunque significato*. Nel caso dei sistemi a più g.d.l., comunque, la proiezione del percorso sul piano delle configurazioni (Fig. 4) è tangente alla proiezione del percorso diramato.

• **Osservazione 27.** Circa la stabilità del percorso fondamentale valgono le considerazioni fatte precedentemente (Par. 3.3). Per analizzare la qualità dell'equilibrio del percorso diramato, applicando il criterio statico, occorre analizzare la rigidezza del sistema nella configurazione deformata. Detta \dot{q}_E la configurazione di equilibrio corrispondente a λ , soluzione della (40), in una configurazione ad essa infinitamente vicina è $\dot{q} = \dot{q}_E + \delta\dot{q}$ con $\delta\dot{q} \ll \dot{q}_E$. In questa nuova configurazione, in generale non equilibrata, le reazioni strutturali elastica e geometrica valgono $p_e(\dot{q}_E + \delta\dot{q})$ ed $p_g(\dot{q}_E + \delta\dot{q})$. Per la stabilità $\delta\dot{q}$ e $p_e - \lambda p_g$ devono avere il medesimo segno, deve cioè essere:

$$[p_e(\dot{q}_E + \delta\dot{q}) - \lambda p_g(\dot{q}_E + \delta\dot{q})] \delta\dot{q} > 0 \quad \forall \delta\dot{q} \quad (44)$$

ovvero, sviluppando in serie intorno a \dot{q}_E :

$$p'_e(\dot{q}_E) - \lambda p'_g(\dot{q}_E) > 0 \quad (45)$$

Passando a considerare l'effetto delle imperfezioni, la (37) fornisce:

$$\lambda = \frac{p_e(\dot{q})}{p_g(\dot{q})} \frac{1}{1 + b/p_g(\dot{q})} \quad (46)$$

Poiché al crescere di \dot{q} , in generale, la componente geometrica $p_g(\dot{q})$ cresce in valore assoluto, l'effetto delle imperfezioni si riduce, e la (46) tende alla (40). Si ottengono le curve indicate a tratto spesso continuo in Fig. 8 (da confrontarsi con quelle della teoria linearizzata, del tipo di Fig. 4, pure riportate in Fig. 8 con tratto sottile).

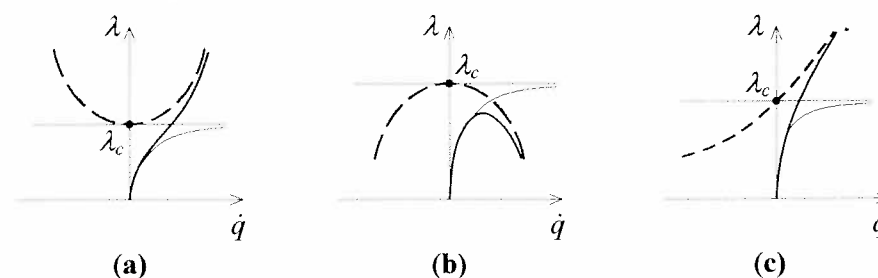


Fig. 8 Percorsi non lineari della struttura imperfetta nei casi (a) sopracritico, (b) sottocritico, (c) transcritico; (— teoria non lineare, — teoria linearizzata, --- sistema perfetto)

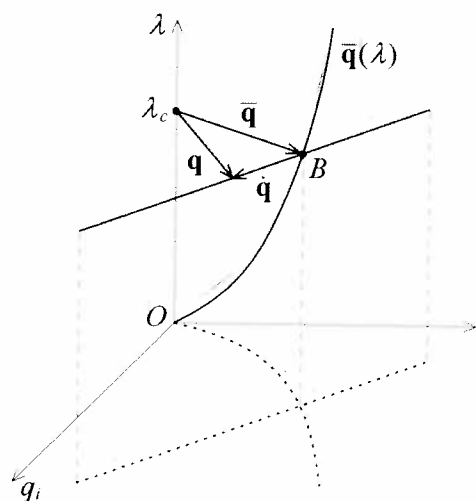


Fig. 9 Percorso fondamentale non banale $\bar{q}(\lambda)$, punto di biforcazione B e percorso diramato (teoria linearizzata)

Per un fissato λ , e quindi per una fissata configurazione di presollecitazione $\bar{q}(\lambda)$, si ricercano configurazioni equilibrate infinitamente vicine. Posto $q = \bar{q} + \dot{q}$ (Fig. 9) deve essere:

$$p_e(\bar{q}(\lambda) + \dot{q}) - \lambda p_g(\bar{q}(\lambda) + \dot{q}) = 0 \quad (50)$$

ovvero, sviluppando in serie di \dot{q} e tenuto conto della (49):

$$[K(\lambda) - \lambda G(\lambda)]\dot{q} = 0 \quad (51)$$

dove:

$$K(\lambda) = \frac{\partial p_e}{\partial q} \bigg|_{\bar{q}(\lambda)}, \quad k_{ij}(\lambda) = \frac{\partial p_{ei}}{\partial q_j} \bigg|_{\bar{q}(\lambda)} \quad (52)$$

$$G(\lambda) = \frac{\partial p_g}{\partial q} \bigg|_{\bar{q}(\lambda)}, \quad G_{ij}(\lambda) = \frac{\partial p_{gi}}{\partial q_j} \bigg|_{\bar{q}(\lambda)}$$

Nelle (51) $K(\lambda)$ e $G(\lambda)$ sono rispettivamente le matrici di rigidezza elastica e geometrica del sistema nella configurazione $q = \bar{q}(\lambda)$. La condizione di biforcazione è:

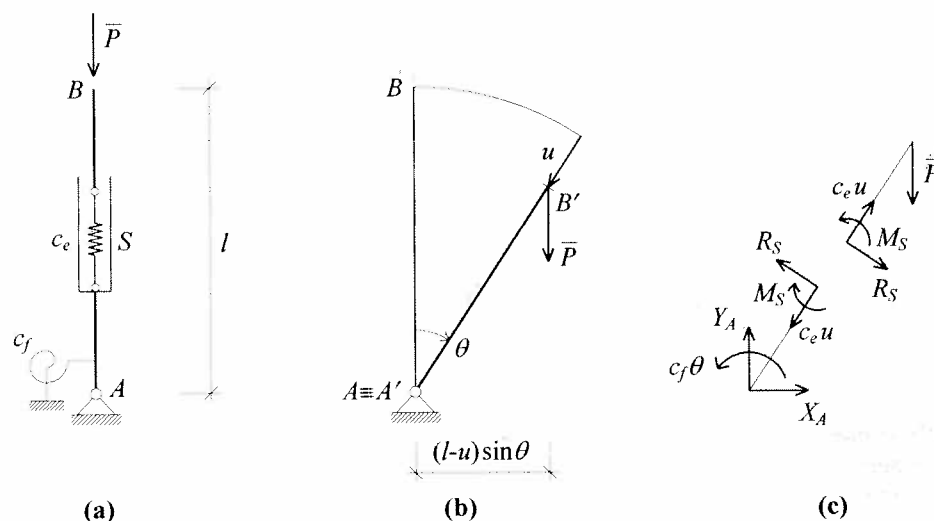
$$\det[K(\lambda) - \lambda G(\lambda)] = 0 \quad (53)$$

Il problema agli autovalori appare dunque in una forma non standard; inoltre K e G sono delle λ -matrici. I valori di λ che soddisfano le (53) sono i carichi critici del sistema, a cui corrispondono delle configurazioni $\bar{q} = \bar{q}(\lambda)$ la cui matrice di rigidezza complessiva è singolare. Le associate soluzioni \dot{q} della (51) descrivono la direzione del percorso diramato.

• **Osservazione 28.** Il numero delle soluzioni della (53) non è noto, dipendendo dalle leggi con cui K e G dipendono da λ .

• **Osservazione 29.** L'ipotesi, comunemente adottata, di trascurare gli spostamenti precritici, corrisponde ad approssimare $K(\lambda)$ e $G(\lambda)$ rispettivamente con $K=K(0)$ e $G=G(0)$, cioè con le matrici di rigidezza relative alla configurazione naturale. Generalmente, comunque, le deformazioni precritiche producono modeste modifiche di geometria, cosicché le soluzioni della (53) non si discostano significativamente dalle soluzioni della (15). L'esercizio che segue illustra il problema.

Esercizio 16: Con riferimento al sistema in Fig. (a) si determini il carico critico (a) tenendo conto degli spostamenti precritici, ovvero (b) trascurandoli; (c) si confrontino i valori ottenuti con quelli dell'asta rigida (cfr. Esercizio 15).



(a) Si assume $q = (u, \theta)^T$ quale vettore dei parametri lagrangiani, con u accorciamento della molla e θ rotazione dell'asta, entrambi di ampiezza finita (Fig. b). Le forze agenti sui due corpi, AS ed SB, nella configurazione variata sono indicate in Fig. (c). Le incognite del problema sono le reazioni $r = \{X_A, Y_A, R_S, M_S\}^T$ ed i parametri θ ed u . Le equazioni lagrangiane di equilibrio sono: l'equazione di equilibrio alla traslazione del corpo SB in direzione longitudinale e l'equazione di equilibrio alla rotazione rispetto ad A di tutte le forze. Si ha:

$$c_e u - \bar{P} \cos \theta = 0, \quad c_f \theta - \bar{P}(l-u) \sin \theta = 0 \quad (a)$$

Le (a) ammettono la soluzione

$$\bar{u} = \bar{P}/c_e, \quad \bar{\theta} = 0 \quad (b)$$

che rappresenta il *percorso fondamentale non banale*, lungo cui l'asta si accorcia mantenendosi verticale. Posto

$$u = \bar{u} + \dot{u}, \quad \theta = \bar{\theta} + \dot{\theta} \quad (c)$$

sostituendo nella (a) e linearizzando negli incrementi, si ottiene;

$$c_e \dot{u} = 0, \quad (c_f - \bar{P}l + \bar{P}^2/c_e) \dot{\theta} = 0 \quad (d)$$

ovvero, nella forma (51):

$$\begin{pmatrix} c_e & 0 \\ 0 & c_f \end{pmatrix} - \bar{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l - \bar{P}/c_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (e)$$

La (d₂) ammette soluzione non banale se:

$$\bar{P}^2 - l c_e \bar{P} + c_e c_f = 0 \quad (f)$$

da cui si determinano due radici, corrispondenti ad altrettante biforcazioni. La più piccola rappresenta il cercato carico critico:

$$P_c = \frac{1}{2} c_e l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 c_f}{c_e l^2}} \right) \quad (g)$$

(b) Se si trascurano gli spostamenti precritici e si linearizzano le (a) intorno a $(u, \theta) = (0, 0)$ si ottiene:

$$c_e \dot{u} = \bar{P}, \quad (c_f - \bar{P} l) \dot{\theta} = 0 \quad (h)$$

Le due equazioni sono disaccoppiate. La seconda fornisce un'unica radice, corrispondente ad un'unica biforcazione:

$$P_c = c_f / l \quad (i)$$

(c) Se l'asta è rigida (Esercizio 15, Eq. c) il carico critico è $P_c = c_f / l$; coincide quindi, ovviamente, con quello determinato trascurando gli spostamenti precritici. La (g) fornisce invece un valore maggiore. Se comunque si sviluppa in serie la radice quadrata per $c_f / (c_e l^2)$ piccolo, si ottiene ancora $P_c \cong c_f / l$.

• **Osservazione 30.** L'equazione di equilibrio (d₂) dell'Esercizio 16 può riscriversi come:

$$(c_f - \bar{P} l_E) \dot{\theta} = 0$$

dove:

$$l_E = l - \bar{P}/c_e$$

è la lunghezza dell'asta in equilibrio sotto l'azione di \bar{P} . L'equazione è identica a quella dell'asta rigida, salvo il diverso valore della lunghezza. Il carico \bar{P} , dunque, modifica la geometria; conseguentemente cambia il valore critico. Tuttavia, se la rigidezza estensionale è grande in rapporto a quella flessionale (come ad esempio avviene nelle travi elastiche), se cioè è $c_f / (c_e l^2) \ll 1$, il carico critico (g) è solo di poco superiore a quello dell'asta infinitamente rigida. Inoltre, il secondo carico critico, che non esiste se si trascurano le deformazioni precritiche, ha un valore molto alto, che tende ad infinito. Questo è il motivo per cui, nelle applicazioni relative a strutture poco deformabili, è usuale trascurare gli spostamenti precritici.

3.9 Formulazione integrale

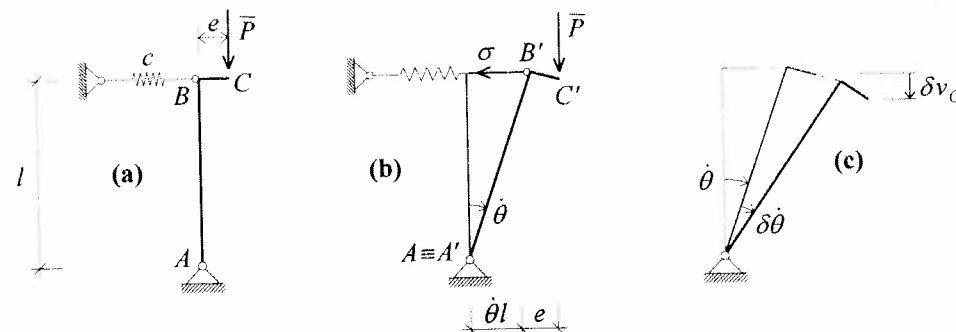
Come si è già discusso nella teoria lineare, la formulazione integrale (TLV) ha il pregio di fornire direttamente le equazioni lagrangiane di equilibrio, eliminando le reazioni vincolari. Tuttavia, il suo impiego nella teoria linearizzata (o, più in generale, in una teoria non lineare) non è immediato, come è invece il caso della teoria lineare. Infatti, come si è visto nel Paragrafo 9.2.6, il campo degli spostamenti virtuali va imposto a partire dalla configurazione deformata, cioè va sovrapposto alla configurazione in cui si vuole imporre l'equilibrio. Viene perciò meno la fortunata circostanza, già rilevata nell'Osservazione 6.9, di eguaglianza formale tra i campi di spostamento reale e virtuale. Occorre perciò studiare un nuovo problema cinematico, relativo ad un sistema la cui geometria è modificata dagli spostamenti reali; il problema è generalmente più complesso di quello originario, che di solito si riferisce ad una geometria semplice. Il procedimento integrale è particolarmente conveniente per i sistemi fortemente vincolati, dove la determinazione diretta delle equazioni di equilibrio lagrangiane è laboriosa.

Nelle applicazioni occorre procedere come segue.

- I. A partire dalla configurazione di riferimento \bar{C} si assegna un campo di spostamenti infinitesimi \mathbf{q} che porta il sistema nella configurazione adiacente C' , e si calcolano gli incrementi di deformazione $\delta \epsilon$ e tensione $\delta \sigma$.
- II. A partire dalla configurazione adiacente C' si assegna un campo di spostamenti virtuali infinitesimi $\delta \mathbf{q}$ e si calcolano le deformazioni virtuali congruenti $\delta \epsilon$ e gli spostamenti virtuali $\delta \eta$ dei punti di applicazione delle forze.
- III. Si impone che forze (di presollecitazione e incrementali) e tensioni (preesistenti e incrementali) agenti nella configurazione adiacente C' compiano lavoro virtuale complessivamente nullo negli spostamenti e deformazioni virtuali; linearizzando negli incrementi si ottengono così le equazioni di equilibrio nella configurazione adiacente.

- **Osservazione 31.** Le deformazioni $\delta \epsilon$ e gli spostamenti $\delta \eta$, misurati da C' , differiscono dalle deformazioni $\delta \bar{\epsilon}$ e dagli spostamenti $\delta \bar{\eta}$, che sono misurati a partire da \bar{C} (cfr. Par. 9.2.6 e 9.2.7).

Esercizio 17: Applicando la formulazione integrale si scriva, per il sistema in Fig. (a), l'equazione di equilibrio nella configurazione adiacente.



Si assume $\dot{\theta}$ come parametro lagrangiano. Nella configurazione adiacente (Fig. b) è (passo I):

$$\sigma = \dot{\sigma} = cl\dot{\theta} \quad (a)$$

Si assegna uno spostamento virtuale $\delta\dot{\theta}$ (passo II, Fig. c); a questo corrisponde un allungamento virtuale $\delta\varepsilon$ della molla e un abbassamento virtuale δv_C del punto C' , pari a:

$$\delta\varepsilon = l\delta\dot{\theta}, \quad \delta v_C = (e + l\dot{\theta})\delta\dot{\theta} \quad (b)$$

L'ELV si scrive (passo III):

$$\sigma\delta\varepsilon = \bar{P}\delta v_C \quad (c)$$

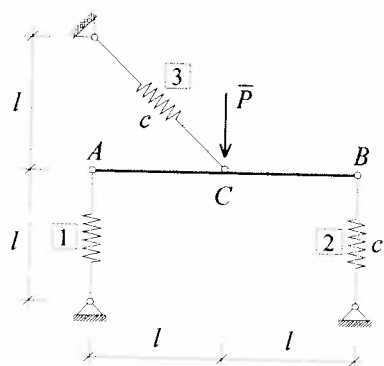
ovvero, sostituendo le (a) e (b):

$$[cl^2\dot{\theta} - \bar{P}(e + l\dot{\theta})]\delta\dot{\theta} = 0 \quad \forall \delta\dot{\theta} \quad (d)$$

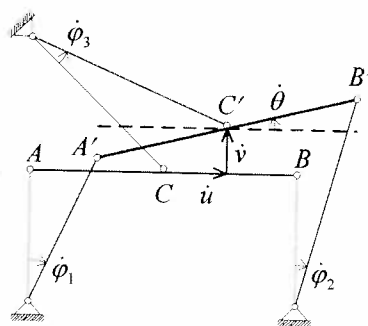
da cui segue l'equazione di equilibrio:

$$(cl^2 - \bar{P}l)\dot{\theta} = \bar{P}e \quad (e)$$

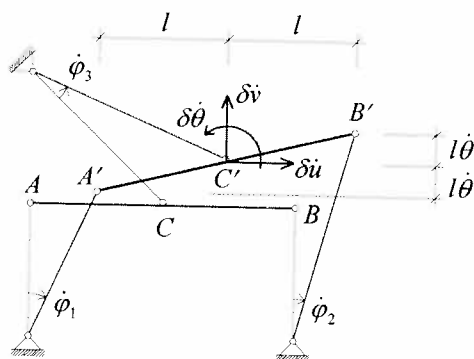
Esercizio 18: Applicando la formulazione integrale si determini il carico e il modo critico del sistema in Fig. (a). Si traccino gli spostamenti precritici.



(a)



(b)



(c)

Si assumono quali spostamenti generalizzati le traslazioni di C e la rotazione intorno a C. La

configurazione adiacente è indicata in Fig. (b). In essa si ha (passo I):

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{v} - l\dot{\theta}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{v} + l\dot{\theta}, \quad \dot{\varepsilon}_3 = (\dot{u} - \dot{v})\sqrt{2}/2 \quad (a)$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{u}/l, \quad \dot{\phi}_2 = \dot{u}/l, \quad \dot{\phi}_3 = (\dot{u} + \dot{v})/(2l)$$

Tenuto conto dello stato di presollecitazione si ha:

$$\sigma_1 = -\bar{P}/2 + c(\dot{v} - l\dot{\theta}), \quad \sigma_2 = -\bar{P}/2 + c(\dot{v} + l\dot{\theta}), \quad \sigma_3 = c(\dot{u} - \dot{v})\sqrt{2}/2 \quad (b)$$

Si assegna poi uno spostamento virtuale $(\delta\dot{u}, \delta\dot{v}, \delta\dot{\theta})$ (passo II, Fig. c). Gli spostamenti dei punti A' , B' e C' risultano essere:

$$\begin{aligned} \delta u_A &= \delta\dot{u} + l\dot{\theta}\delta\dot{\theta}, & \delta v_A &= \delta\dot{v} - l\dot{\theta}\delta\dot{\theta} \\ \delta u_B &= \delta\dot{u} - l\dot{\theta}\delta\dot{\theta}, & \delta v_B &= \delta\dot{v} + l\dot{\theta}\delta\dot{\theta} \\ \delta u_C &= \delta\dot{u} & \delta v_C &= \delta\dot{v} \end{aligned} \quad (c)$$

e quindi le deformazioni virtuali valgono:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= \delta v_A + \dot{\phi}_1 \delta u_A = \delta\dot{v} - l\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \frac{\dot{u}}{l} \delta\dot{u} \\ \delta\varepsilon_2 &= \delta v_B + \dot{\phi}_2 \delta u_B = \delta\dot{v} + l\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \frac{\dot{u}}{l} \delta\dot{u} \\ \delta\varepsilon_3 &= (\delta u_C - \delta v_C)\sqrt{2}/2 = (\delta\dot{u} - \delta\dot{v})\sqrt{2}/2 \end{aligned} \quad (d)$$

Si scrive quindi l'ELV (passo III):

$$\sigma_1 \delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \delta\varepsilon_2 + \sigma_3 \delta\varepsilon_3 = -\bar{P} \delta v_C \quad (e)$$

Sostituendo le (b) e (d) e raccogliendo si ha:

$$\left[-\bar{P} \frac{\dot{u}}{l} + \frac{1}{2} c(\dot{u} - \dot{v}) \right] \delta\dot{u} + \left[\frac{5}{2} c\dot{v} - \frac{1}{2} c\dot{u} \right] \delta\dot{v} + [2cl^2\dot{\theta}] \delta\dot{\theta} = 0 \quad \forall (\delta\dot{u}, \delta\dot{v}, \delta\dot{\theta}) \quad (f)$$

da cui seguono le equazioni di equilibrio:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\bar{P}}{l} + \frac{c}{2} & -\frac{c}{2} & 0 \\ -\frac{c}{2} & \frac{5}{2}c & 0 \\ 0 & 0 & 2cl^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

L'equazione in $\dot{\theta}$ è disaccoppiata e fornisce $\dot{\theta} = 0$. Dalla seconda si ricava $\dot{u} = 5\dot{v}$, che sostituita nella prima fornisce:

$$\left(-5\frac{\bar{P}}{l} + 2c \right) \dot{v} = 0 \quad (h)$$

da cui:

$$P_c = \frac{2}{5} cl \quad (i)$$

Il modo critico è:

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \{1 \quad 5 \quad 0\}^T \quad (l)$$

- **Osservazione 32.** Il sistema dell'Esercizio 18, pur avendo tre g.d.l., possiede un unico carico critico. Ciò dipende dal fatto che la matrice geometrica è singolare.

3.10 Formulazione variazionale

Una formulazione alternativa a quella integrale è offerta dalla formulazione variazionale (Teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale). Come si è visto nel Par. 9.2.8, il teorema è valido anche in campo non lineare; in particolare, esso fornisce le equazioni di equilibrio corrette al primo ordine in $\dot{\mathbf{q}}$ (cioè le condizioni nella configurazione adiacente C') se l'EPT contiene tutti i termini fino al secondo ordine in $\dot{\mathbf{q}}$. La differenza di ordine è legata al fatto che l'equazione di derivazione abbassa di uno il grado del polinomio. Se si segue la formulazione variazionale è dunque necessario studiare la cinematica non lineare del sistema, sia pure limitata al secondo ordine, a differenza di quanto accade nella formulazione diretta o integrale. Per un sistema presollecitato l'EPE si scrive (cfr. 9.69):

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dots \quad (54)$$

dove $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ è la parte lineare (in $\dot{\mathbf{q}}$) ed $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ è la parte quadratica (in $\dot{\mathbf{q}}$) delle deformazioni misurate a partire dalla configurazione di riferimento. Il lavoro dei carichi è:

$$W = \sum_r \bar{\mathbf{F}}_r \dot{\eta}_r + \sum_s \dot{\mathbf{F}}_s \dot{\eta}_s \quad (55)$$

Esso esprime il lavoro compiuto dalle forze preesistenti $\bar{\mathbf{F}}_r$ nelle componenti quadratiche $\dot{\eta}_r$ dello spostamento dei punti di applicazione, nonché il lavoro compiuto dalle forze aggiuntive $\dot{\mathbf{F}}_s$ nella parte lineare $\dot{\eta}_s$ degli spostamenti dei punti di applicazione. Tra queste ultime va considerato l'effetto di eventuali imperfezioni (si ricordi l'Osservazione 23, e si veda poi l'Esercizio 19 e l'Osservazione 33). L'EPT è:

$$U = \Phi - W \quad (56)$$

Nelle applicazioni occorre procedere come segue.

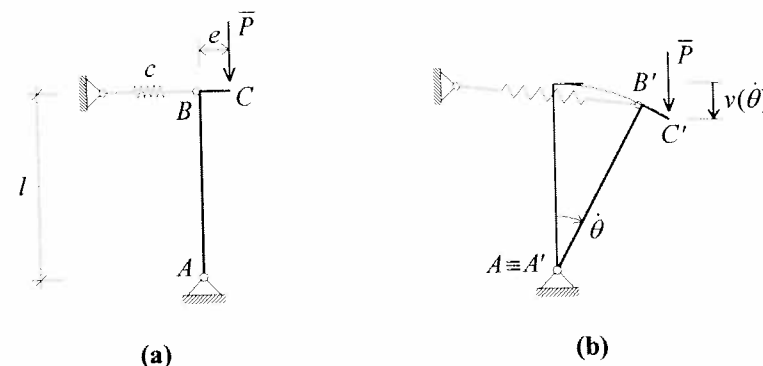
- I. A partire dalla configurazione di riferimento si assegna uno spostamento finito $\dot{\mathbf{q}}$; sviluppando in serie, a questo corrispondono deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e spostamenti dei punti di applicazione delle forze $\dot{\eta}_r = \dot{\eta}_r + \bar{\eta}_r$, rispettivamente costituiti da una parte lineare in $\dot{\mathbf{q}}$ ed una parte quadratica in $\dot{\mathbf{q}}$.
- II. Si scrive l'EPT (56) e si impone la stazionarietà rispetto a $\dot{\mathbf{q}}$; si ottengono così le equazioni di equilibrio nella configurazione adiacente.

Esercizio 19: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 17 (Fig. a), si ottenga l'equazione di equilibrio lagrangiana applicando la formulazione variazionale.

Assegnato uno spostamento finito $\dot{\theta}$ si ottiene la configurazione di Fig. (b). L'EPT, funzione del parametro lagrangiano $\dot{\theta}$, si scrive:

$$U(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} c [\varepsilon(\dot{\theta})]^2 - \bar{P} v(\dot{\theta}) \quad (a)$$

dove $\varepsilon(\dot{\theta})$ e $v(\dot{\theta})$ sono rispettivamente l'allungamento della molla e l'abbassamento del punto



di applicazione del carico, funzioni non lineari del parametro $\dot{\theta}$. Per ottenere un'espressione di U completa al secondo ordine in $\dot{\theta}$ (passo I) è sufficiente esprimere ε al primo ordine in $\dot{\theta}$ (in quanto ε già appare al quadrato) ma è necessario sviluppare v al secondo ordine in $\dot{\theta}$ (in quanto v appare alla prima potenza):

$$\varepsilon(\dot{\theta}) = l\dot{\theta} + \dots, \quad v(\dot{\theta}) = l(1 - \cos \dot{\theta}) + e \sin \dot{\theta} = e\dot{\theta} + l \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \dots \quad (b)$$

da cui:

$$U(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} (cl^2 - \bar{P}l) \dot{\theta}^2 - \bar{P}e \dot{\theta} + \dots \quad (c)$$

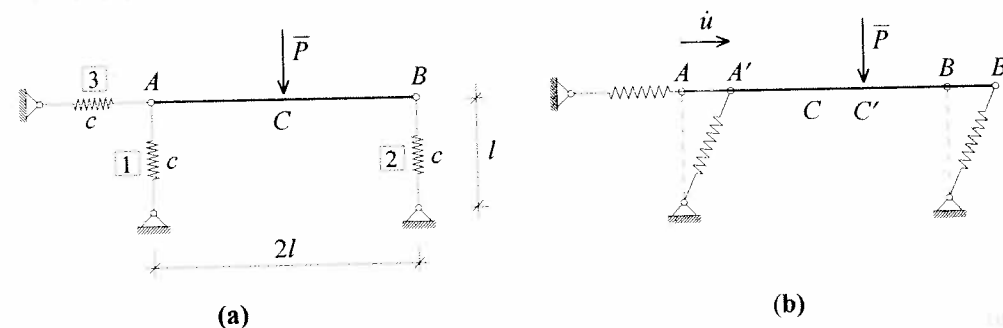
Imponendo la stazionarietà (passo II):

$$\delta U(\dot{\theta}) = [(cl^2 - \bar{P}l)\dot{\theta} - \bar{P}e] \delta \dot{\theta} = 0 \quad \forall \delta \dot{\theta} \quad (d)$$

da cui segue l'equazione di equilibrio (e) dell'Esercizio 17.

- **Osservazione 33.** Nell'Esercizio 19 va notato che il termine di imperfezione è legato alla parte lineare di $v(\dot{\theta})$ e il termine geometrico a quella quadratica.

Esercizio 20: Si determini il carico critico del sistema in Fig. (a) applicando la formulazione variazionale.



Si assume quale unico g.d.l. la traslazione orizzontale; infatti, ogni altra componente di spostamento altera l'equilibrio in direzione verticale che sussiste nello stato presollecitato. Considerata una traslazione \dot{u} finita (Fig. b) si hanno le deformazioni (cfr. 9.2.9):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{l}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{l}, \quad \varepsilon_3 = \dot{u} \quad (a)$$

la cui parte lineare è:

$$\dot{\varepsilon}_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \dot{u}$$

e quella non lineare:

$$\ddot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{l}, \quad \ddot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{u}^2}{l}, \quad \ddot{\varepsilon}_3 = 0$$

L'EPT è

$$U = \frac{1}{2} c \dot{\varepsilon}_3^2 + \bar{\sigma}_1 \dot{\varepsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \dot{\varepsilon}_2$$

dove $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = -\bar{P}/2$ è la pretensione, mentre \bar{P} compie lavoro nullo. Sostituendo le (b) e (c) nelle (d) si ha:

$$U = \frac{1}{2} c \dot{u}^2 - \frac{\bar{P}}{2} \frac{\dot{u}^2}{l}$$

Imponendo la stazionarietà rispetto ad \dot{u} si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{u}} = \left(c - \frac{\bar{P}}{l} \right) \dot{u} = 0$$

da cui si ricava la condizione di equilibrio:

$$\left(c - \frac{\bar{P}}{l} \right) \dot{u} = 0$$

che fornisce il carico critico:

$$P_c = cl$$

- **Osservazione 34.** Nell'Esercizio 19 il termine geometrico dell'equazione di equilibrio è stato determinato come lavoro della forza \bar{P} nella parte del secondo ordine dello spostamento $v(\theta)$; nell'Esercizio 20 come lavoro delle pretensioni $\bar{\sigma}_1$ e $\bar{\sigma}_2$ nelle componenti del secondo ordine delle deformazioni addizionali $\dot{\varepsilon}_1$ ed $\dot{\varepsilon}_2$. Si confronti questa considerazione con quella dell'Osservazione 9.

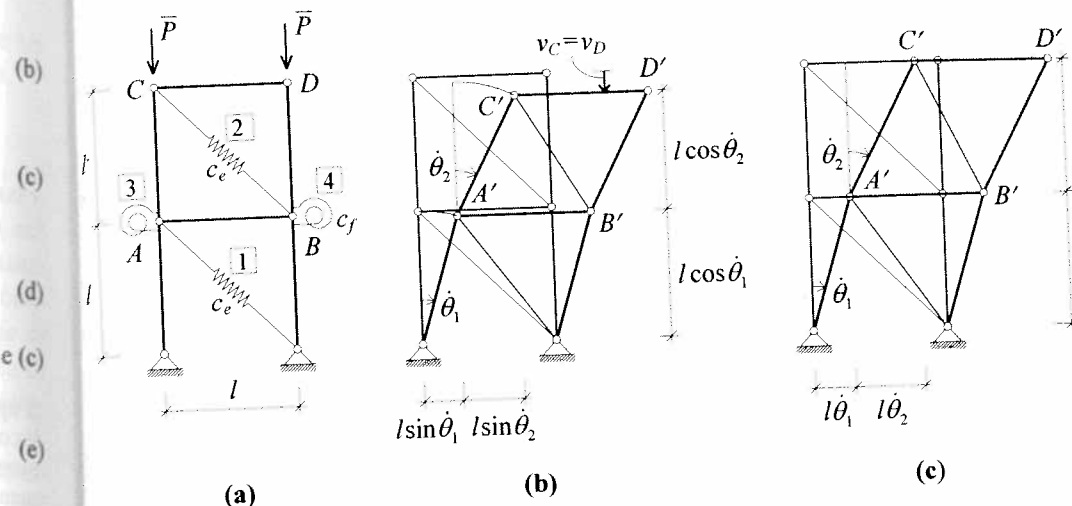
Esercizio 21: Si determinino i carichi critici del sistema in Fig. (a) applicando la formulazione variazionale. Si rappresentino poi le deformate modali. Sia $c_1 = c_2 = c_e = c$, $c_3 = c_4 = c_f = cl^2$.

Il sistema ha due g.d.l.. Si assumano quali parametri lagrangiani le rotazioni assolute $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ delle aste verticali (Fig. b). Poiché $\bar{\sigma}_1 = 0$, l'EPT del sistema si scrive:

$$U = \frac{1}{2} c (\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2) + \frac{1}{2} cl^2 (\dot{\kappa}_3^2 + \dot{\kappa}_4^2) - 2\bar{P}\dot{v}_D \quad (a)$$

dove $\dot{\varepsilon}_i$ e $\dot{\kappa}_i$ rappresentano la parte lineare della deformazione delle molle e \dot{v}_D è la parte quadratica dell'abbassamento dei punti di applicazione delle forze \bar{P} . Per determinare le deformazioni $\dot{\varepsilon}_i$, $\dot{\kappa}_i$ può farsi riferimento alla Fig. (c) (cinematica lineare); si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\dot{u}_A \sqrt{2}/2 = -l\dot{\theta}_1 \sqrt{2}/2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= (\dot{u}_B - \dot{u}_C) \sqrt{2}/2 = -l\dot{\theta}_2 \sqrt{2}/2 \\ \dot{\kappa}_3 &= \dot{\kappa}_4 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (b)$$



Per calcolare \dot{v}_D occorre invece far riferimento alla Fig. (b) (cinematica non lineare); si ha:

$$\dot{v}_D = l(2 - \cos \dot{\theta}_1 - \cos \dot{\theta}_2) \quad (c)$$

da cui:

$$\dot{v}_D = l(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)/2 \quad (d)$$

Sostituendo le (b) e (d) nell'EPT (a) si ha:

$$U = \frac{1}{4} cl^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + cl^2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 - \bar{P}l(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (e)$$

Imponendo la stazionarietà rispetto a $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ seguono le condizioni di equilibrio:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{5}{4} cl^2 - \bar{P}l \right) \dot{\theta}_1 - cl^2 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (f)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \Rightarrow -cl^2 \dot{\theta}_1 + \left(\frac{5}{4} cl^2 - \bar{P}l \right) \dot{\theta}_2 = 0$$

Posto $\lambda = \bar{P}/(cl)$ le (f) si scrivono nella forma (14):

$$\left(\begin{bmatrix} 5/4 & -1 \\ -1 & 5/4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

L'equazione caratteristica (15) è:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (h)$$

ovvero:

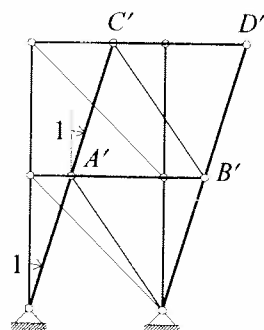
$$\lambda^2 - \frac{5}{2} \lambda + \frac{9}{16} = 0 \quad (i)$$

Essa ammette le soluzioni:

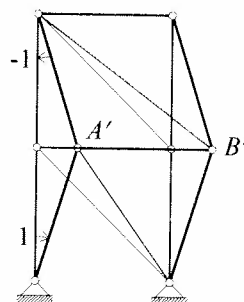
$$\lambda_1 = \lambda_c = \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{9}{4}$$

a cui corrispondono le deformate modali in Fig. (d, e) associate agli autovettori:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}^T, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}^T$$



(d)



(e)

- **Osservazione 35.** In conclusione, se si confrontano le diverse formulazioni sin qui esaminate si evincono le seguenti, profonde, differenze. La formulazione diretta richiede lo studio di un *problema cinematico lineare*, nonché la scrittura diretta delle condizioni di equilibrio e successiva sua riduzione in termini lagrangiani. La formulazione integrale richiede lo studio di *due problemi cinematici lineari*, l'uno relativo alla configurazione indeformata, l'altro a quella adiacente. La formulazione variazionale richiede lo studio di un *unico problema cinematico non lineare*. Generalmente è la complessità del problema a guidare la scelta del metodo più conveniente.

11

Elementi di dinamica delle strutture

1. Il problema elastodinamico

1.1 Premessa

Il problema elastico illustrato nei capitoli precedenti è stato formulato e risolto nell'ipotesi che tutte le grandezze che intervengono nella descrizione del fenomeno meccanico siano indipendenti dal tempo. Ciò si verifica con buona approssimazione quando le azioni esercitate dall'ambiente sul sistema, cioè le forze e i cedimenti vincolari, sono applicati lentamente alla struttura in modo tale da non generare apprezzabili forze d'inerzia (applicazione quasi-statica delle forze, cfr. Par. 6.1.1) e poi restano costanti nel tempo. In queste condizioni, la configurazione finale è raggiunta dal sistema attraverso una successione di stati equilibrati in cui le reazioni strutturali elastiche (ed eventualmente geometriche) equilibrano le forze esterne attive e le reazioni vincolari; il problema è detto *elastostatico*.

Tuttavia, quando le azioni esterne (forze attive e/o cedimenti vincolari) dipendono esplicitamente dal tempo, ovvero si mantengono costanti dopo essere cresciute rapidamente dallo zero, agli spostamenti della struttura sono associate delle accelerazioni e quindi delle forze d'inerzia. Le forze elastiche devono in questo caso equilibrare non solo le forze attive e vincolari ma anche le forze d'inerzia, cosicché tutte le grandezze variano con il tempo; il problema è detto *elastodinamico*. Risolvere il problema elastodinamico vuol dire determinare la *dipendenza dal tempo* del campo degli spostamenti, degli stati di deformazione e tensione nonché dello stato reattivo del sistema.

La formulazione e la soluzione del problema dinamico aprono una serie di problematiche molto ampie, relative alla modellazione del sistema e ai metodi di calcolo, che trovano giusta collocazione nei corsi di Dinamica delle Strutture. Qui si vogliono fornire solo alcuni elementi, con riferimento ai sistemi ad elasticità concentrata, atti ad illustrare la fenomenologia e ad indicare i principali metodi di analisi. La trattazione è

limitata allo studio dei sistemi conservativi; non prende quindi in considerazione gli effetti dovuti allo smorzamento.

1.2 Posizione del problema

Si consideri un sistema rigido, dotato di massa, ad elasticità concentrata. In assenza di vincoli (Fig. 1a) il sistema ha n g.d.l. $\mathbf{u}(t)$, dipendenti dal tempo t , ed è sottoposto a forze attive $\mathbf{F}_k(t)$ variabili con legge assegnata, staticamente equivalenti in ogni istante t (dinamicamente equivalenti) a forze generalizzate $\mathbf{f}(t)$. In presenza di vincoli (Fig. 1b), il sistema ha l g.d.l. descritti dai parametri lagrangiani $\mathbf{q}(t)$; esso è sollecitato da forze lagrangiane $\mathbf{p}(t)$ e da cedimenti vincolari $\mathbf{s}(t)$, variabili con legge nota, che inducono reazioni vincolari $\mathbf{r}(t)$. Nel seguito ci si riferirà a sistemi vincolati.

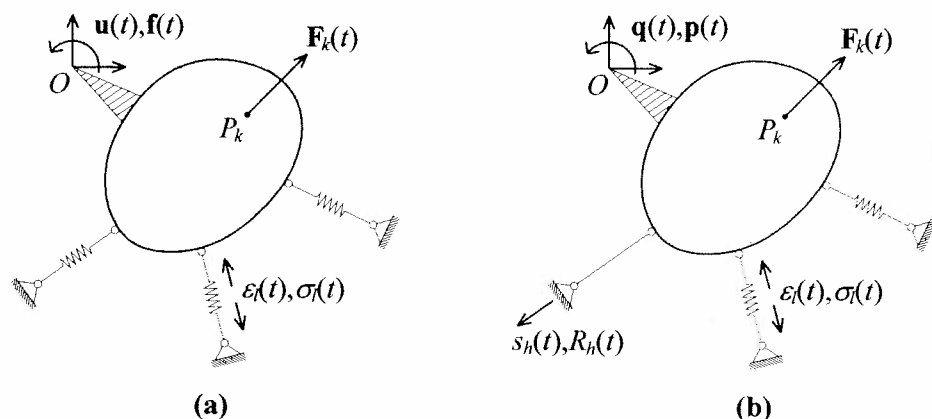


Fig. 1 Il problema elastodinamico per un sistema rigido a deformabilità concentrata: (a) non vincolato, (b) vincolato

Il problema elastodinamico si pone in questi termini: assegnate la forze attive $\mathbf{F}_k(t)$ ed i cedimenti vincolari $\mathbf{s}(t)$, determinare il campo degli spostamenti $\mathbf{q}(t)$, lo stato di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, lo stato di tensione $\boldsymbol{\sigma}(t)$, nonché lo stato reattivo $\mathbf{r}(t)$. La formulazione è sviluppata nell'ambito della teoria lineare, cosicché l'effetto di eventuali pre-sollecitazioni, se non altrimenti dichiarato (si veda il Par. 2.5), è ritenuto trascurabile.

1.3 Forze d'inerzia

Il moto del sistema è governato dalle equazioni cardinali della dinamica. Esse sono formalmente analoghe a quelle della statica ove si sommano alle forze esterne attive, le forze d'inerzia (principio di D'Alembert), definite come segue.

Considerato nell'intorno del generico punto P (Fig. 2a) un elemento di volume dV avente massa elementare ρdV , con ρ [ML⁻³] densità di massa, si definisce forza (ripartita) d'inerzia in P all'istante generico t il vettore:

$$\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t) = -\rho \ddot{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

dove $\ddot{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}, t)$ è la derivata seconda rispetto al tempo t dello spostamento $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)$ del

punto $P=P(\mathbf{x})$, e rappresenta l'accelerazione di P all'istante t . Sull'elemento dV si esercita quindi la forza elementare $\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t)dV$. Sulle forze d'inerzia ripartite possono effettuarsi tutte le operazioni di equivalenza illustrate nel Par. 2.1.9.

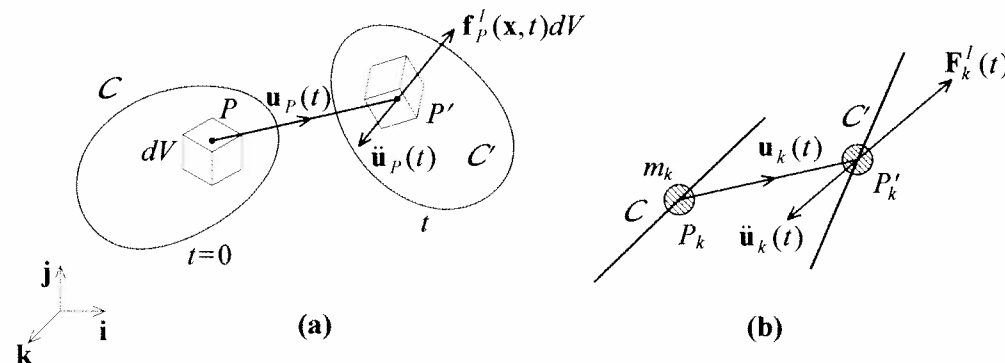


Fig. 2 Forze d'inerzia: (a) ripartite, (b) concentrate

Spesso nelle applicazioni è conveniente schematizzare alcune masse come concentrate su superfici, linee o punti. Con riferimento a queste ultime, considerata la massa m_k concentrata in P_k (Fig. 2b), su questa si esercita la forza (concentrata) d'inerzia:

$$\mathbf{F}_k^I(t) = -m_k \ddot{\mathbf{u}}_k(t) \quad (2)$$

dove $\ddot{\mathbf{u}}_k(t)$ è la derivata seconda rispetto a t dello spostamento $\mathbf{u}_k(t)$ del punto P_k .

- **Osservazione 1.** Le forze d'inerzia sono funzione del tempo, e agiscono nella configurazione attuale $C'(t)$ del corpo. Tuttavia, nell'ipotesi che gli spostamenti $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t)$ siano piccoli, e trascurando gli eventuali effetti geometrici (si veda più avanti il Par. 2.5), è lecito confondere $C'(t)$ con la configurazione di riferimento $C \equiv C'(0)$. Si assume quindi che le forze $\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t)dV$ e $\mathbf{F}_k^I(t)$ agiscano in C .

1.4 Matrice di massa

Proiettando le forze d'inerzia (1) e (2) nella base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e applicando la FGSR (1.10) si ottengono, per ciascun corpo, le componenti:

$$\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t) = -\rho(\ddot{\mathbf{u}}_0(t) + \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_k^I(t) = -m_k(\ddot{\mathbf{u}}_0(t) + \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \times \mathbf{x}_k) \quad (3)$$

Riducendo le forze, ripartite e concentrate, ai poli O_i solidali ai corpi si hanno le forze d'inerzia generalizzate:

$$\mathbf{f}^I(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (4)$$

dove \mathbf{M} è una matrice $n \times n$, detta matrice di massa, o d'inerzia. È possibile verificare che \mathbf{M} è simmetrica (si veda l'Osservazione 2).

- **Osservazione 2.** La matrice di massa \mathbf{M} può essere ottenuta formalmente come segue. Dalla cinematica dei corpi rigidi si ha:

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_p(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{A}_k\mathbf{u}(t)$$

dove:

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{p_x}^T \\ \mathbf{a}_{p_y}^T \\ \mathbf{a}_{p_z}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{k_x}^T \\ \mathbf{a}_{k_y}^T \\ \mathbf{a}_{k_z}^T \end{bmatrix}$$

sono matrici $3 \times n$, le cui righe sono i vettori di influenza su (u_p, v_p, w_p) o (u_k, v_k, w_k) degli spostamenti generalizzati. Le (1) e (2) si scrivono quindi, in alternativa alle (3):

$$\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t) = -\rho \mathbf{A}_p(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(t), \quad \mathbf{F}_k^I(t) = -m_k \mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{u}}(t)$$

Per ottenere le forze generalizzate occorre ridurre le forze ai poli. Si ha:

$$\mathbf{f}^I(t) = \int_C \mathbf{B}_p(\mathbf{x}) \mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t) dV + \sum_k \mathbf{B}_k \mathbf{F}_k^I(t)$$

dove:

$$\mathbf{B}_p(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}_{p_x} \quad \mathbf{b}_{p_y} \quad \mathbf{b}_{p_z}], \quad \mathbf{B}_k = [\mathbf{b}_{k_x} \quad \mathbf{b}_{k_y} \quad \mathbf{b}_{k_z}]$$

sono matrici $n \times 3$, le cui colonne sono i vettori di riduzione ai poli delle forze. Poiché è, per la dualità (cfr. Osservazione 3.5),

$$\mathbf{B}_p^T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}_k^T = \mathbf{A}_k$$

le forze generalizzate si scrivono:

$$\mathbf{f}^I(t) = - \left[\int_C \rho \mathbf{A}_p^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_p(\mathbf{x}) dV + \sum_k m_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \right] \ddot{\mathbf{u}}(t)$$

Dal confronto con la (4) si evince:

$$\mathbf{M} = \left[\int_C \rho \mathbf{A}_p^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_p(\mathbf{x}) dV + \sum_k m_k \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \right]$$

da cui segue che la matrice di massa è simmetrica, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$.

Se il sistema è vincolato, il vettore degli spostamenti generalizzati $\mathbf{u}(t)$ è esprimibile in termini di parametri lagrangiani $\mathbf{q}(t)$. Non considerando per il momento eventuali cedimenti vincolari \mathbf{s} (il cui effetto verrà analizzato nel Par. 3.4), è (Eq. 7.3):

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \mathbf{q}(t) \quad (5)$$

dove \mathbf{U} è la matrice $n \times l$ dei modi cinematici del sistema rigido associato. Le forze d'inerzia generalizzate (4) si scrivono dunque, in termini di parametri lagrangiani:

$$\mathbf{f}^I(t) = -\mathbf{M} \mathbf{U} \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (6)$$

Per ottenere le forze lagrangiane occorre proiettare le forze (6) sui modi cinematici (Eq. 7.19); si ottiene così:

$$\mathbf{p}^I(t) = -\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) \quad (7)$$

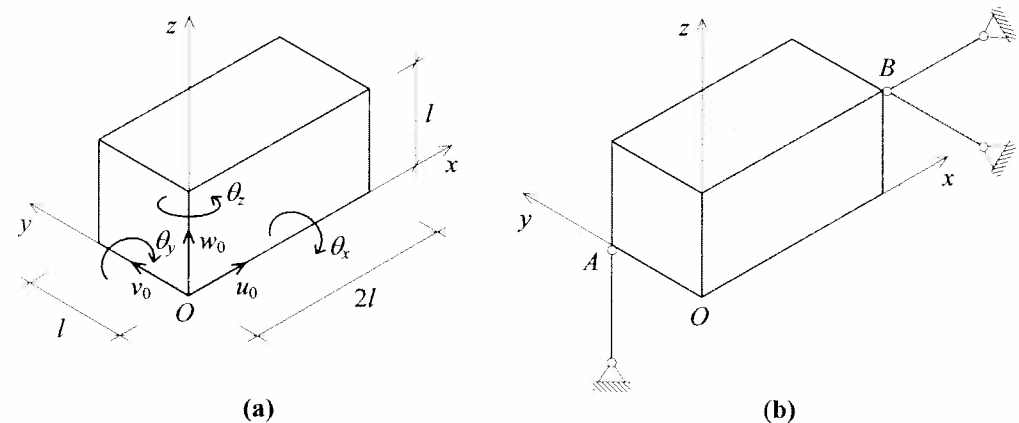
dove si è posto:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (8)$$

La matrice $\hat{\mathbf{M}}$, di dimensioni $l \times l$, è la matrice di massa del sistema vincolato. Poiché $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ (cfr. Osservazione 2) è anche $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}^T$.

• **Osservazione 3.** Si noti che la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ del sistema vincolato è legata alla matrice \mathbf{M} del sistema non vincolato dalla stessa legge che lega $\hat{\mathbf{K}}$ a \mathbf{K} (cfr. Osservazione 7.18).

Esercizio 1: Si scriva la matrice di massa per il corpo rigido omogeneo in figura avente densità ρ , nei due casi illustrati: (a) corpo non vincolato; (b) corpo vincolato.



(a) Le forze d'inerzia (3₁), omettendo il pedice P , si scrivono:

$$\begin{Bmatrix} f_x^I(\mathbf{x}, t) \\ f_y^I(\mathbf{x}, t) \\ f_z^I(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = -\rho \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ \ddot{v}_0(t) \\ \ddot{w}_0(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta}_z(t) & \ddot{\theta}_y(t) \\ \ddot{\theta}_z(t) & 0 & -\ddot{\theta}_x(t) \\ -\ddot{\theta}_y(t) & \ddot{\theta}_x(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Ricordando le (2.13), le forze generalizzate valgono:

$$\begin{aligned} X_0^I &= \int_C f_x^I dV, & Y_0^I &= \int_C f_y^I dV, & Z_0^I &= \int_C f_z^I dV \\ M_x^I &= \int_C (f_z^I y - f_y^I z) dV, & M_y^I &= \int_C (f_x^I z - f_z^I x) dV, & M_z^I &= \int_C (f_y^I x - f_x^I y) dV \end{aligned} \quad (b)$$

avendo ommesso gli argomenti. Sostituendo le (a) e svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\begin{aligned}
X_0^I &= -(m\ddot{u}_0 + S_{xy}\ddot{\theta}_y - S_{xz}\ddot{\theta}_z), & Y_0^I &= -(m\ddot{v}_0 - S_{yx}\ddot{\theta}_x + S_{yz}\ddot{\theta}_z), & Z_0^I &= -(m\ddot{w}_0 + S_{zx}\ddot{\theta}_x - S_{zy}\ddot{\theta}_y) \\
M_x^I &= -(-S_{xy}\ddot{v}_0 + S_{xz}\ddot{w}_0 + I_x\ddot{\theta}_x - I_{xy}\ddot{\theta}_y - I_{xz}\ddot{\theta}_z), \\
M_y^I &= -(S_{yx}\ddot{u}_0 - S_{yz}\ddot{w}_0 - I_{yx}\ddot{\theta}_x + I_y\ddot{\theta}_y - I_{yz}\ddot{\theta}_z), \\
M_z^I &= -(-S_{zx}\ddot{u}_0 + S_{zy}\ddot{v}_0 - I_{zx}\ddot{\theta}_x - I_{zy}\ddot{\theta}_y + I_z\ddot{\theta}_z)
\end{aligned}
\quad (c)$$

dove:

$$m = \int_C \rho dV = 2\rho l^3 \quad (d)$$

è la massa del corpo e:

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \rho \int_C z dV = \rho l^4, & S_{xz} &= \rho \int_C y dV = \rho l^4, & S_{yz} &= \rho \int_C x dV = 2\rho l^4 \\
I_{xy} &= \rho \int_C xy dV = \rho l^5, & I_{xz} &= \rho \int_C xz dV = \rho l^5, & I_{yz} &= \rho \int_C yz dV = \frac{1}{2}\rho l^5 \\
I_x &= \rho \int_C (y^2 + z^2) dV = \frac{4}{3}\rho l^5, & I_y &= \rho \int_C (x^2 + z^2) dV = \frac{10}{3}\rho l^5, \\
I_z &= \rho \int_C (x^2 + y^2) dV = \frac{10}{3}\rho l^5
\end{aligned}
\quad (e)$$

sono rispettivamente i momenti statici e di inerzia del corpo rispetto agli assi x , y e z . In forma matriciale le (c) si scrivono:

$$\begin{Bmatrix} X_0^I \\ Y_0^I \\ Z_0^I \\ M_x^I \\ M_y^I \\ M_z^I \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & . & . & . & S_{xy} & -S_{xz} \\ . & m & . & -S_{yx} & . & S_{yz} \\ . & . & m & S_{zx} & -S_{zy} & . \\ . & -S_{xy} & S_{xz} & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ S_{yx} & . & -S_{yz} & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -S_{zx} & S_{zy} & . & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{v}_0 \\ \ddot{w}_0 \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} \quad (f)$$

La matrice 6×6 è la matrice \mathbf{M} del corpo non vincolato. Poiché $S_{ij}=S_{ji}$ ed $I_{ij}=I_{ji}$ è $\mathbf{M}=\mathbf{M}^T$.

(b) Le relazioni di vincolo sono:

$$w_A = 0, \quad u_B = 0, \quad v_B = 0 \quad (g)$$

Utilizzando la FGSR (1.8) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l & 0 & 2l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

dove la matrice 3×6 è la matrice di congruenza \mathbf{A} . Poiché la matrice quadrata corrispondente alle prime tre colonne è non singolare, è possibile risolvere le (h) rispetto ad essa; si ottiene:

$$u_0 = -\theta_y l, \quad v_0 = \theta_x l - 2\theta_z l, \quad w_0 = -\theta_x l \quad (i)$$

per cui la soluzione delle (h) è:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -l & 0 \\ l & 0 & -2l \\ -l & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (l)$$

La matrice 6×3 nell'equazione (l) è la matrice \mathbf{U} . Applicando la (8) si ottiene la matrice di massa del sistema vincolato:

$$\hat{\mathbf{M}} = \rho l^5 \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & -1 \\ 1 & 10/3 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 10/3 \end{bmatrix} \quad (m)$$

Le forze d'inerzia lagrangiane valgono dunque:

$$\begin{Bmatrix} p_1^I \\ p_2^I \\ p_3^I \end{Bmatrix} = -\rho l^5 \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & -1 \\ 1 & 10/3 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 10/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

• **Osservazione 4.** Un modo alternativo per ottenere la matrice $\hat{\mathbf{M}}$, senza costruire prima la matrice \mathbf{M} , è quello di scrivere le forze d'inerzia $\mathbf{f}^I(\mathbf{x}, t)$ direttamente in termini di parametri lagrangiani, e poi, ricordando il significato di forze lagrangiane (Par. 7.3.1), imporre la condizione di uguaglianza dei lavori virtuali:

$$\int_C [\mathbf{f}_p^I(\mathbf{x}, t)]^T \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \delta \mathbf{q}(t)^T \mathbf{p}^I(t) \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (9)$$

L'esercizio che segue illustra il procedimento.

Esercizio 2: Si determini la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ del sistema dell'Esercizio 1 applicando l'Osservazione 4.

L'Eq. (9) si scrive:

$$\int_C (f_x^I \delta u + f_y^I \delta v + f_z^I \delta w) dV = p_1^I \delta q_1 + p_2^I \delta q_2 + p_3^I \delta q_3 \quad \forall (\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3) \quad (o)$$

Poiché, per le (l), è:

$$\delta u_0 = -l \delta q_2, \quad \delta v_0 = l \delta q_1 - 2l \delta q_3, \quad \delta w_0 = -l \delta q_1 \quad (p)$$

dalla FGSR (1.8) si ha:

$$\delta u = (z-l) \delta q_2 - y \delta q_3, \quad \delta v = (l-z) \delta q_1 + (x-2l) \delta q_3, \quad \delta w = (y-l) \delta q_1 - x \delta q_2 \quad (q)$$

da cui la (o) fornisce:

$$\begin{aligned} p_1^I &= \int_C [(l-z)f_y^I + (y-l)f_z^I] dV \\ p_2^I &= \int_C [(z-l)f_x^I - xf_z^I] dV \\ p_3^I &= \int_C [-yf_x^I + (x-2l)f_y^I] dV \end{aligned} \quad (r)$$

Le forze d'inerzia ripartite (a), tenuto conto delle (l), si scrivono:

$$f_x^I = -\rho[(z-l)\ddot{q}_2 - y\ddot{q}_3], \quad f_y^I = -\rho[(l-z)\ddot{q}_1 + (x-2l)\ddot{q}_3], \quad f_z^I = -\rho[(y-l)\ddot{q}_1 - x\ddot{q}_2] \quad (s)$$

Sostituendo le (s) nelle (r) e svolgendo gli integrali si ritrovano le (n), da cui la matrice di massa $\hat{\mathbf{M}}$.

1.5 La formulazione diretta

Applicando il principio di D'Alembert, le equazioni lagrangiane di equilibrio, espresse in termini di coordinate generalizzate, si scrivono (cfr. Eq. 7.60):

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}^I(t) \quad (10)$$

dove $\hat{\mathbf{K}}$ è la matrice di rigidezza del sistema vincolato e \mathbf{p}^I è il vettore delle forze d'inerzia lagrangiane. Sostituendo la (7) nelle (10) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (11)$$

Le (11) sono le equazioni lagrangiane del moto del sistema vincolato. Esse costituiscono un sistema di l equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nelle incognite $\mathbf{q}(t)$.

Poiché il problema è differenziale (e non più algebrico come in statica), le equazioni del moto devono essere corredate di condizioni iniziali che esprimano la posizione e la velocità (atto di moto) della struttura all'istante $t=0$:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (12)$$

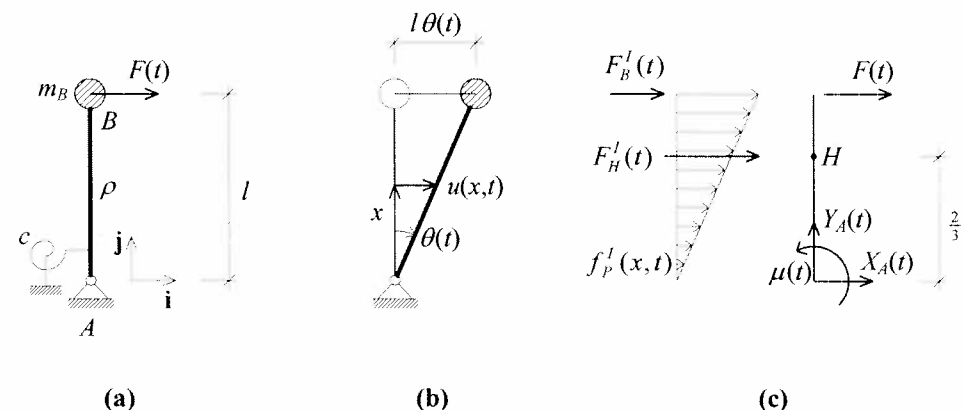
- **Osservazione 5.** La condizione (12₁) specifica la posizione assunta dal sistema all'istante iniziale, conseguente ad un allontanamento dalla posizione di equilibrio. La condizione (12₂) specifica la velocità del sistema all'istante iniziale, conseguente ad esempio ad un impulso assegnato.

La soluzione $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$ delle equazioni (11) e (12) è detta *risposta dinamica* della struttura alle date azioni. Nota $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$, dalle equazioni del problema elastico (7.58, 7.59) si determinano deformazioni e tensioni, tutte dipendenti dal tempo:

$$\varepsilon(t) = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{q}(t), \quad \sigma(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{q}(t) \quad (13)$$

Dalle condizioni di equilibrio, infine, si determinano le reazioni vincolari $\mathbf{r}(t)$.

Esercizio 3: Si scrivano le equazioni del moto del sistema in Fig. (a), avente massa concentrata m_B e densità di massa lineare ρ [ML⁻¹].



Si assume come parametro lagrangiano la rotazione $\theta(t)$ dell'asta, positiva oraria (Fig. b). A questa corrisponde il seguente campo di spostamenti, velocità ed accelerazioni:

$$u(x,t) = x\theta(t), \quad \dot{u}(x,t) = x\dot{\theta}(t), \quad \ddot{u}(x,t) = x\ddot{\theta}(t) \quad (a)$$

Le forze agenti sull'asta nel generico istante t sono rappresentate con il loro verso positivo in Fig. (c), con riferimento alla configurazione indeformata (teoria lineare). Alle accelerazioni sono associate forze di inerzia ripartite $f_p^I(x,t)$ ed una forza concentrata in B, $F_B^I(t)$, rispettivamente uguali a:

$$f_p^I(x,t) = -\rho\ddot{u}(x,t) = -\rho x\ddot{\theta}(t), \quad F_B^I(t) = -m_B\ddot{u}_B(t) = -m_B l\ddot{\theta}(t) \quad (b)$$

Le forze ripartite sono equivalenti ad una forza

$$F_H^I(t) = -\frac{1}{2}\rho l^2\ddot{\theta}(t) \quad (c)$$

applicata in H (Fig. c). Tenuto conto che la tensione nella molla vale:

$$\mu(t) = c\theta(t) \quad (d)$$

l'equazione lagrangiana di equilibrio ($\sum M_A = 0$) si scrive:

$$-\mu(t) + F_B^I(t)l + F_H^I(t)\frac{2}{3}l + F(t)l = 0 \quad (e)$$

ovvero, in termini di spostamento:

$$I_A\ddot{\theta}(t) + c\theta(t) = F(t)l \quad (f)$$

dove:

$$I_A = m_B l^2 + \frac{1}{3}\rho l^3 \quad (g)$$

è il momento d'inerzia rispetto ad A della massa. È perciò $\mathbf{M}=[I_A]$, $\mathbf{K}=[c]$, $\mathbf{p}(t)=lF(t)$.

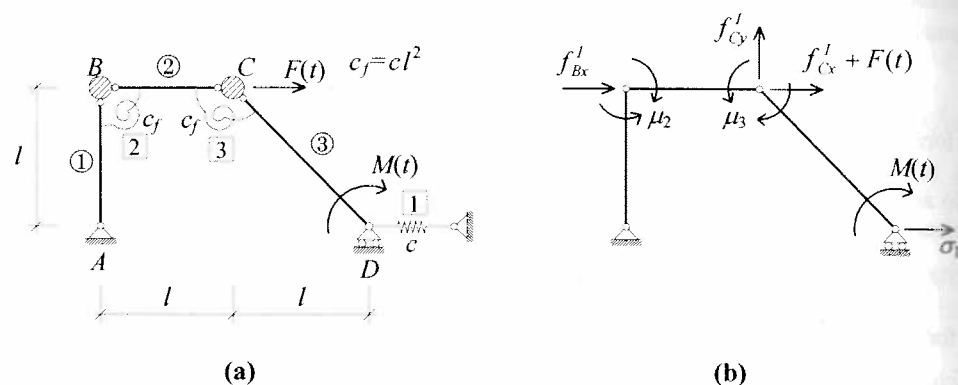
1.6 La formulazione integrale

Le equazioni del moto lagrangiane possono anche essere ottenute attraverso la formulazione integrale, procedendo come nel problema elastostatico (cfr. Par. 7.5.3). Occorre soltanto sommare al lavoro delle forze esterne attive quello delle forze d'inerzia. La (7.63) si modifica come segue:

$$(\mathbf{f}' + \mathbf{f})^T \delta \mathbf{u}_q = \sigma^T \delta \varepsilon_q \quad \forall (\delta \mathbf{u}_q, \delta \varepsilon_q) \quad \mathbf{A} \delta \mathbf{u}_q = \mathbf{0}, \mathbf{D} \delta \mathbf{u}_q = \delta \varepsilon_q \quad (14)$$

dove \mathbf{f}' è il vettore delle forze d'inerzia ridotte ai poli. La (14) fornisce le equazioni lagrangiane del moto (cfr. Osservazione 7.24), come è immediato verificare facendo uso della (6) e del fatto che $\delta \mathbf{u}_q = \mathbf{U} \delta \mathbf{q}$. L'esercizio che segue mostra un'applicazione.

Esercizio 4: Utilizzando la formulazione integrale, si scrivano le equazioni del moto per il sistema in Fig. (a), avente massa ripartita trascurabile, e masse m concentrate nei punti B e C.



La cinematica del sistema è già stata studiata nell'Esercizio 7.2. In particolare si ha (si veda la Fig. (c) dell'Esercizio 7.2):

$$u_B = q_1 - q_2 l, \quad v_B = 0, \quad u_C = q_1 - q_2 l, \quad v_C = -q_2 l \quad (a)$$

da cui si ricavano le forze d'inerzia:

$$\begin{aligned} f'_{Bx} &= -m\ddot{u}_B = -m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 l), & f'_{By} &= -m\ddot{v}_B = 0 \\ f'_{Cx} &= -m\ddot{u}_C = -m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 l), & f'_{Cy} &= -m\ddot{v}_C = m\ddot{q}_2 l \end{aligned} \quad (b)$$

Tenuto conto delle deformazioni (Eq. (e) dell'Esercizio 7.2) e del legame costitutivo, si hanno le tensioni:

$$\sigma_1 = c\varepsilon_1 = -cq_1, \quad \mu_2 = c_f\kappa_2 = cl^2(q_1/l - 2q_2), \quad \mu_3 = c_f\kappa_3 = 2cl^2q_2 \quad (c)$$

Le forze attive, le forze d'inerzia e le tensioni sono rappresentate in Fig. (b). L'ELV (14) si scrive:

$$f'_{Bx}\delta u_B + f'_{Cx}\delta u_C + f'_{Cy}\delta v_C - M\delta\theta_3 + F\delta u_C = \sigma_1\delta\varepsilon_1 + \mu_2\delta\kappa_2 + \mu_3\delta\kappa_3 \quad (d)$$

Poiché è:

$$\begin{aligned} \delta u_B &= \delta q_1 - l\delta q_2, & \delta u_C &= \delta q_1 - l\delta q_2, & \delta v_C &= -l\delta q_2, & \delta\theta_3 &= \delta q_2 \\ \delta\varepsilon_1 &= -\delta q_1, & \delta\kappa_2 &= \delta q_1/l - 2\delta q_2, & \delta\kappa_3 &= 2\delta q_2 \end{aligned} \quad (e)$$

sostituendo le (b), (c) ed (e) nell'ELV si ha:

$$\begin{aligned} &(-2m\ddot{q}_1 + 2ml\ddot{q}_2 - 2cq_1 + 2clq_2 + F)\delta q_1 \\ &+ (2ml\ddot{q}_1 - 3ml^2\ddot{q}_2 + 2clq_1 - 8cl^2q_2 - M - Fl)\delta q_2 = 0 \quad \forall (\delta q_1, \delta q_2) \end{aligned} \quad (f)$$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$m \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ -M - Fl \end{Bmatrix} \quad (g)$$

del tipo (11).

1.7 La formulazione variazionale

Se la formulazione integrale del problema elastodinamico non richiede sostanziali modifiche a quella del problema elastostatico, la formulazione variazionale, invece, richiede l'introduzione di uno strumento nuovo, il *principio di Hamilton*. Esso afferma quanto segue.

Principio di Hamilton. Il moto di un sistema dinamico sottoposto a forze conservative rende stazionaria la funzione:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (15)$$

rispetto a tutti i moti cinematicamente ammissibili che conducono il sistema dalla posizione iniziale a quella finale nello stesso intervallo di tempo $[t_1, t_2]$.

Nella (15) H è l'*hamiltoniana del sistema* (anche detta *energia totale generalizzata*), U è l'*energia potenziale totale* e T è l'*energia cinetica* definita come:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{\mathbf{u}}_k^T \dot{\mathbf{u}}_k \quad (16)$$

dove l'integrale è esteso a tutti i corpi del sistema. Assegnate le posizioni in t_1 e t_2 , la condizione di stazionarietà:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (17)$$

fornisce le equazioni del moto (11). Il teorema ha validità anche in regime di spostamenti finiti; tuttavia viene qui dimostrato per il solo caso lineare.

1.8 Sistemi definiti/semidefiniti: proprietà di $\hat{\mathbf{M}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$

Poiché l'energia cinetica $T = 1/2 \dot{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}$ è definita positiva (cfr. Eq. 16), anche la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ è definita positiva. Fa eccezione il caso in cui a certi gradi di libertà è associata massa nulla (si pensi ad esempio a masse concentrate esclusivamente in punti a cui competono spostamenti nulli in uno o più degli l cinematismi del sistema). In queste circostanze la matrice di massa è semidefinita positiva, e il sistema è detto *cineticamente semidefinito*. Tuttavia, questi g.d.l. possono essere eliminati attraverso un'operazione detta di *condensazione statica* (si veda più avanti il Par. 2.3), per cui è lecito assumere $\hat{\mathbf{M}}$ definita positiva.

Circa la matrice di rigidezza, se si escludono per il momento eventuali effetti geometrici, essendo l'energia potenziale elastica $\Phi = 1/2 \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{q}$ definita positiva, anche $\hat{\mathbf{K}}$ è definita positiva (cfr. Par. 7.5.2). Fa eccezione il caso in cui il sistema è labile o degenere, dove $\hat{\mathbf{K}}$ è semidefinita positiva (si veda più avanti il Par. 2.4); in questo caso il sistema è detto *elasticamente semidefinito*.

- **Osservazione 9.** Mentre $\hat{\mathbf{K}}$ può essere semidefinita positiva per una insufficiente o errata disposizione degli organi elastici, $\hat{\mathbf{M}}$ a rigore è sempre definita positiva. Il caso a cui si è accennato di $\hat{\mathbf{M}}$ semidefinita positiva, pure ricorrente, è solo il risultato di una comoda schematizzazione di calcolo che porta a trascurare certe masse, sempre presenti nel problema, rispetto ad altre di più grande entità (si veda più avanti l'Osservazione 12).

2. La risposta libera

2.1 Le equazioni del moto

In assenza di forzante ($\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{0}$) la soluzione delle (11) e (12) è detta *risposta libera*; il moto è indotto da spostamenti e/o velocità assegnati alla struttura all'istante iniziale $t=0$. Il problema è governato dalle (11) rese omogenee e dalle condizioni iniziali (12)¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (20)$$

2.2 Moti armonici: frequenze e modi naturali

Le (20₁) ammettono soluzioni del tipo:

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\phi} \cos(\omega t + \alpha) \quad (21)$$

con α arbitrario e ω frequenza circolare. Sostituendo infatti nelle (20₁) ed imponendo che queste valgano per ogni t , si ottiene:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (22)$$

¹ Nel seguito, quando ciò non generi confusione, si ometterà il circonflesso sui simboli \mathbf{M} e \mathbf{K} .

dove:

$$\lambda := \omega^2 \quad (23)$$

Le (22) costituiscono un problema algebrico agli autovalori nella forma non standard (si veda l'Appendice B). Esse ammettono l soluzioni non banali associate a particolari valori di λ ; questi sono soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad (24)$$

e sono detti *autovalori*. Poiché $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ ed \mathbf{M} è definita positiva, gli autovalori λ_i ($i=1,2,\dots,l$) sono reali (cfr. Appendice B.2); nel seguito si assume $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l$. Le soluzioni associate $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_i$ ($i=1,2,\dots,l$) sono dette *autovettori*, o *modi di vibrazione*, e sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Le coppie $(\boldsymbol{\phi}_i, \lambda_i)$ costituiscono le *autosoluzioni* del problema.

- **Osservazione 10.** Le (22) sono formalmente analoghe alle (10.14) dove, in luogo della matrice geometrica \mathbf{G} si ha la matrice di massa \mathbf{M} . I simboli $\boldsymbol{\phi}$ e λ hanno però diverso significato: in luogo dei modi critici si hanno i modi di vibrazione e in luogo del moltiplicatore critico il quadrato della frequenza circolare. Inoltre, mentre su \mathbf{G} non si hanno informazioni circa la definitezza in segno, per \mathbf{M} valgono le proprietà precedentemente discusse (Par. 1.8).

Per studiare il carattere, reale o complesso, delle radici λ_i , e dunque il tipo di moto espresso dalla (21), è opportuno esprimere il generico autovalore come (*rapporto di Rayleigh*, cfr. Appendice B.3):

$$\lambda_i = \frac{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i}{\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i} \quad (25)$$

ottenuto premoltiplicando per $\boldsymbol{\phi}_i^T$ le (22) calcolate in corrispondenza dell' i -esima autosoluzione. Stanti le proprietà di definitezza di \mathbf{K} ed \mathbf{M} è:

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (26)$$

da cui discende che le frequenze circolari $\omega_i = (\lambda_i)^{1/2}$ sono reali. Nelle (26) il segno di uguaglianza vale solo nel caso di sistemi labili o degeneri, per i quali i modi di vibrazione coincidono con i modi rigidi (è infatti $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$). Dunque, se i modi rigidi sono stati soppressi, la struttura può esperire solo l moti armonici (21), ciascuno caratterizzato da una frequenza ω_i ed un modo di vibrazione $\boldsymbol{\phi}_i$. Durante un moto armonico, tutti i punti materiali oscillano con la stessa frequenza ω_i , cosicché la deformata del sistema resta immutata nella forma (ma non nell'ampiezza) descritta dall'autovettore $\boldsymbol{\phi}_i$. Poiché ω_i e $\boldsymbol{\phi}_i$ sono proprietà del sistema (non dipendendo dalla forzante, qui assente) sono anche dette *frequenze e modi propri*, o *naturali*, del sistema.

- **Osservazione 11.** Le frequenze naturali non dipendono dall'ampiezza dell'oscillazione. Ciò significa che la struttura impiega il medesimo tempo (periodo) ad eseguire un ciclo completo di oscillazione, qualunque sia l'ampiezza del ciclo. Questo risultato, palesemente errato, è una conseguenza della linearizzazione, come verrà discusso nel Par. 3.5.

Esercizio 6: Si calcoli la frequenza naturale del sistema dell'Esercizio 3.

Poiché il sistema ha un g.d.l., il problema agli autovalori ha dimensione 1×1 , con $\mathbf{K}=[c]$, $\mathbf{M}=[I_A]$. Si ha:

$$\omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{c/I_A}$$

Esercizio 7: Si determinino frequenze e modi naturali del sistema dell'Esercizio 4.

Note le matrici \mathbf{K} ed \mathbf{M} , il problema agli autovalori (22) si scrive:

$$\left(c \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 8l^2 \end{bmatrix} - \lambda m \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 3l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

L'equazione caratteristica (24) è:

$$\lambda^2 - 7(c/m)\lambda + 6(c/m)^2 = 0 \quad (b)$$

che ammette le due radici:

$$\lambda_1 = c/m, \quad \lambda_2 = 6(c/m) \quad (c)$$

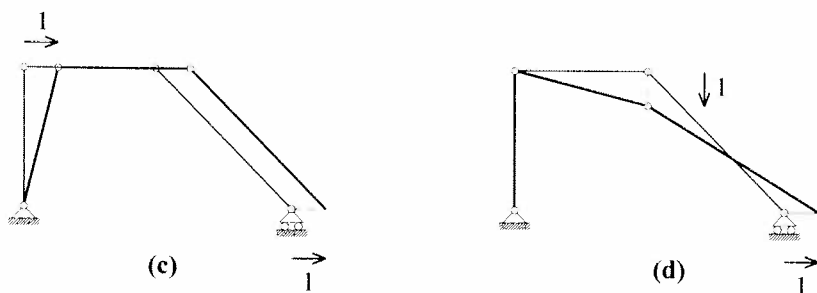
Le frequenze naturali sono dunque:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{c/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6(c/m)} = 2.45\sqrt{c/m} \quad (d)$$

Sostituendo ordinatamente le radici $\lambda_{1,2}$ nelle (a) e risolvendo, si ottengono gli autovettori:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix}^T, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 & l^{-1} \end{Bmatrix}^T \quad (e)$$

in cui q_1 è stato posto uguale ad 1. Ricordando il significato geometrico dei parametri lagrangiani (Esercizio 7.2) si hanno i modi naturali in Fig. (c) e (d):



2.3 Sistemi cinematicamente semidefiniti: condensazione statica

È spesso conveniente, nelle applicazioni, trascurare il contributo cinetico di alcune masse rispetto ad altre. Ad esempio, è usuale trascurare l'inerzia rotazionale di masse concentrate (cioè l'energia cinetica associata alla rotazione delle stesse rispetto ai propri assi centrali d'inerzia). In tali casi la matrice di massa contiene delle colonne e, per la simmetria, delle righe di zeri. Le equazioni del moto libero sono perciò del tipo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ap} \\ \mathbf{K}_{pa} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

dove \mathbf{q}_a elenca le coordinate (dinamicamente) attive, e \mathbf{q}_p le coordinate passive. Le equazioni del moto associate alle coordinate passive sono equazioni algebriche, anziché differenziali, e possono essere risolte per esprimere \mathbf{q}_p in funzione di \mathbf{q}_a . Si ottiene:

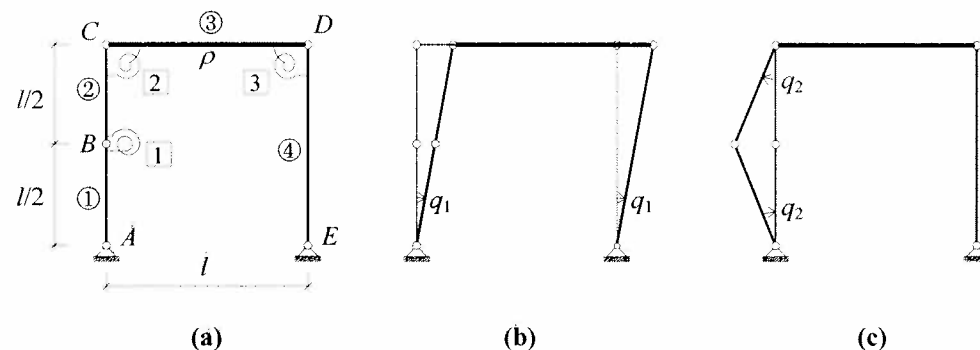
$$\mathbf{q}_p = -\mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pa} \mathbf{q}_a \quad (28)$$

in quanto \mathbf{K}_{pp} è non singolare, essendo la matrice di rigidezza del sistema che si ottiene introducendo dei vincoli che sopprimono le coordinate \mathbf{q}_a . Sostituendo \mathbf{q}_p nelle restanti equazioni si ha:

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{q}}_a + (\mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ap} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pa}) \mathbf{q}_a = \mathbf{0} \quad (29)$$

Si sono così eliminate le variabili passive. Si noti che, essendo $\mathbf{K}_{ap} = \mathbf{K}_{pa}^T$, la matrice di rigidezza del sistema condensato è ancora simmetrica. Risolto il problema e determinate le variabili attive, con la (28) si calcolano, se d'interesse, le variabili passive.

Esercizio 8: Effettuando una condensazione statica, si determini l'unica frequenza e modo naturale del sistema in Fig. (a), in cui le aste verticali hanno massa trascurabile.



Il sistema rigido associato è due volte labile. La generica configurazione variata si ottiene sovrapponendo, ad esempio, gli spostamenti in Fig. (b) e (c). Le curvature delle molle valgono:

$$\kappa_1 = -2q_2, \quad \kappa_2 = q_1 + q_2, \quad \kappa_3 = -q_1 \quad (a)$$

L'asta 3 trasla orizzontalmente:

$$u = q_1 \quad (b)$$

Seguendo l'approccio variazionale si scrivono le energie cinetica e potenziale elastica ($U \equiv \Phi$); si ha:

$$T = \frac{1}{2} \rho l \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho l \dot{q}_1^2 \quad (c)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) = \frac{1}{2} c (2q_1^2 + 2q_1 q_2 + 5q_2^2)$$

da cui si riconoscono matrice di massa e di rigidità (cfr. Osservazione 7):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2c & c \\ c & 5c \end{bmatrix} \quad (d)$$

La matrice di massa è singolare in quanto a \dot{q}_2 è associata energia cinetica nulla. Le equazioni del moto si scrivono:

$$\rho l \ddot{q}_1 + 2c q_1 + c q_2 = 0 \quad (e)$$

$$c q_1 + 5c q_2 = 0$$

Poiché la (e₂) è un'equazione algebrica, può essere utilizzata per esprimere q_2 (coordinata passiva) in funzione di q_1 (coordinata attiva). Si ha:

$$q_2 = -\frac{1}{5} q_1 \quad (f)$$

che sostituita nella (e₁) fornisce:

$$\rho l \ddot{q}_1 + \frac{9}{5} c q_1 = 0 \quad (g)$$

La (g) è l'equazione condensata del moto. La frequenza naturale è:

$$\omega_1 = 3 \sqrt{\frac{c}{5\rho l}} \quad (h)$$

a cui corrisponde il modo:

$$\phi = \{1 \quad -1/5\}^T \quad (i)$$

- **Osservazione 12.** Se nel sistema dell'esercizio 8 non si trascurano le masse delle aste verticali si trovano *due* frequenze e *due* modi di vibrare. Se però queste masse sono piccole, il primo modo ha frequenza e forma vicina a quella trovata, mentre il secondo ha una frequenza molto più elevata (al limite tendente ad infinito).

2.4 Sistemi elasticamente semidefiniti: moti rigidi

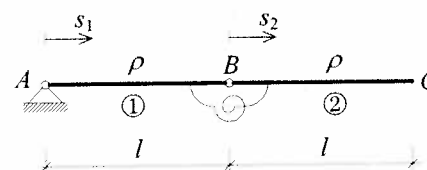
Se il sistema elastico è labile o degenere la matrice di rigidità \mathbf{K} è singolare. Esempi di strutture di questo tipo sono comuni nell'ingegneria meccanica (si pensi ad esempio ai veicoli, terrestri o spaziali). In tal caso il problema agli autovalori (22) ammette come soluzione l'autovalore nullo $\lambda=0$, che infatti soddisfa l'equazione caratteristica

(24), dal momento che $\det \mathbf{K}=0$. La sua molteplicità è pari al grado di labilità del sistema. Come è immediato verificare per sostituzione diretta nelle equazioni del moto (20), a ciascuna di queste radici corrisponde un moto uniforme in luogo del moto armonico (21):

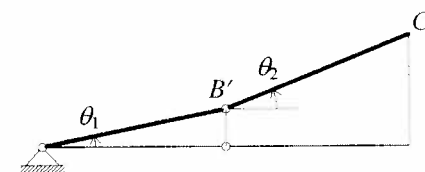
$$\mathbf{q} = \phi(a + bt) \quad (30)$$

dove a e b sono costanti arbitrarie e ϕ è un *modo rigido* del sistema, tale cioè che $\mathbf{K}\phi=0$. I moti che corrispondono ad autovalori positivi sono invece armonici. In definitiva, il moto di un sistema elasticamente semidefinito è una sovrapposizione di moti uniformi e moti armonici.

Esercizio 9: Si determinino frequenze e modi naturali del sistema labile in Fig. (a). Si studino i modi corrispondenti.



(a)



(b)

Il sistema rigido associato ha due g.d.l.; si assumono quali parametri lagrangiani le rotazioni delle aste (Fig. b). La deformazione della molla vale:

$$\kappa = \theta_2 - \theta_1 \quad (a)$$

Gli spostamenti delle aste, puramente verticali, sono:

$$v_1 = \theta_1 s_1, \quad v_2 = \theta_1 l + \theta_2 s_2 \quad (b)$$

con s_1, s_2 ascisse curvilinee (Fig. a). Le energie cinetica e potenziale elastica si scrivono:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho (\dot{\theta}_1 s_1)^2 ds_1 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho (\dot{\theta}_1 l + \dot{\theta}_2 s_2)^2 ds_2 = \frac{1}{2} \rho l^3 \left(\frac{4}{3} \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{3} \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (c)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c \kappa^2 = \frac{1}{2} c (\theta_1^2 - 2\theta_1 \theta_2 + \theta_2^2)$$

da cui, riconosciute \mathbf{M} e \mathbf{K} , il problema agli autovalori si scrive:

$$\left(\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} - \lambda \rho l^3 \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - \frac{96}{7} \frac{c}{\rho l^3} \lambda = 0 \quad (e)$$

che ammette le radici:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{96}{7} \frac{c}{\rho l^3} \quad (f)$$

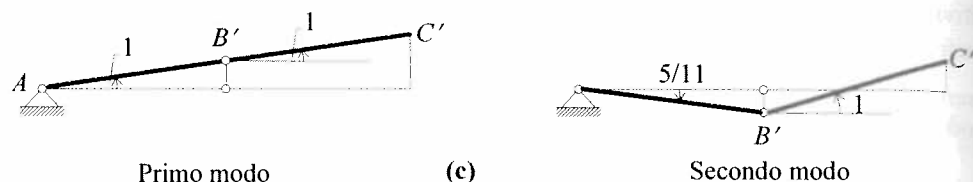
a cui corrispondono le frequenze naturali:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 3.70 \sqrt{c/(\rho l^3)} \quad (g)$$

ed i modi naturali:

$$\phi_1 = \{1 \quad 1\}^T, \quad \phi_2 = \{-5/11 \quad 1\}^T \quad (h)$$

diagrammati in Fig. (c). Alla radice λ_1 , corrisponde un *modo rigido*, e quindi un moto *uniforme*; la matrice \mathbf{K} è infatti singolare. Alla radice λ_2 corrisponde un moto armonico.



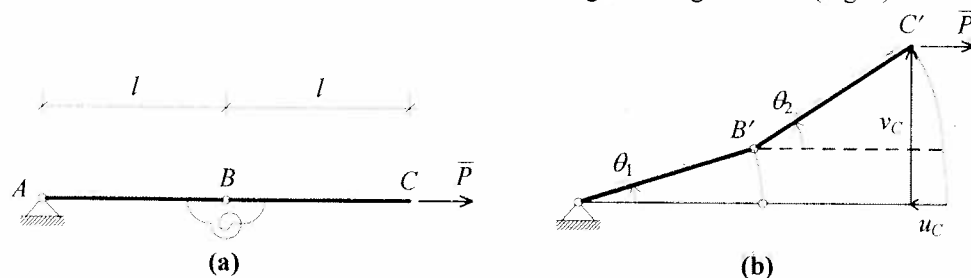
- **Osservazione 13.** Nell'esempio dell'Esercizio 9, il sistema ammette un moto rotazionale uniforme intorno ad A; tuttavia, poiché la rotazione è stata assunta infinitesima, la soluzione perde immediatamente di validità.

2.5 Sistemi presollecitati

Se il sistema è presollecitato e gli effetti geometrici non sono trascurabili, l'equazione del moto (11) è ancora valida, a patto di considerare \mathbf{K} come *rigidezza totale*, comprensiva cioè degli effetti geometrici. Questi, infatti, influenzano la sola reazione strutturale, come discusso nel Cap. 10, e non le forze d'inerzia, almeno se ci si limita alla teoria linearizzata. Le forze d'inerzia, infatti, essendo già proporzionali agli spostamenti incrementali, vanno comunque riferite alla geometria iniziale. Se, al contrario, si tenesse conto del cambiamento di geometria, esse darebbero contributi almeno quadratici alle equazioni del moto. Le forze d'inerzia, quindi, hanno intrinsecamente il carattere di *forze incremental*.

Come caso particolare il sistema può essere labile o degenerare, cosicché, a certi campi di spostamento, è associata una rigidezza esclusivamente geometrica (cfr. Par. 10.2); il successivo Esercizio 10 mostra un esempio.

Esercizio 10: Si determinino frequenze e modi naturali del sistema labile dell'Esercizio 9, presollecitato da una forza \bar{P} di trazione, tenendo conto degli effetti geometrici (Fig. a).



Applicando ancora la formulazione variazionale, occorre sommare all'energia potenziale elasti-

ca Φ dell'Esercizio 9, il lavoro compiuto da \bar{P} nella parte del secondo ordine dello spostamento incrementale u_C (si omette il punto per evitare confusione con le derivate temporali; cfr. Par. 9.2.8). Si ha:

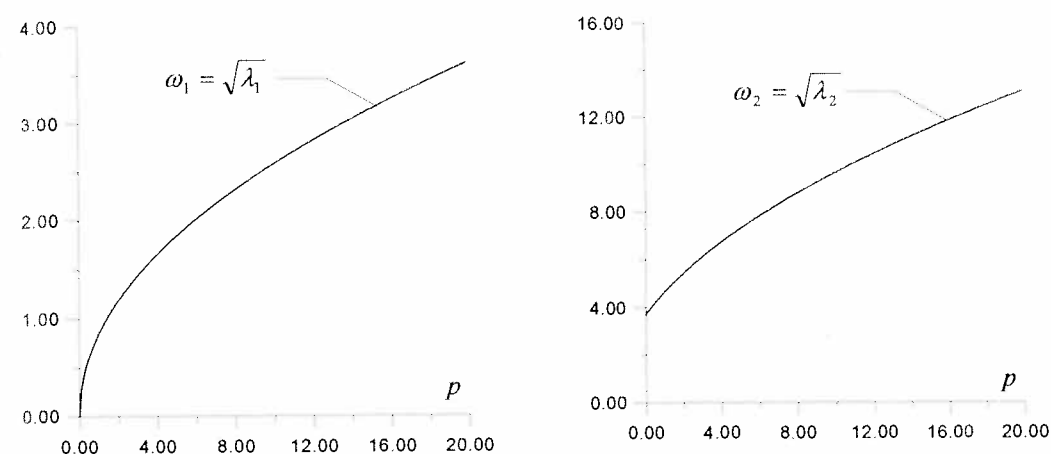
$$U = \Phi - W \quad (a)$$

dove (Fig. b):

$$W = -\bar{P}u_C = -\bar{P}l(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) \cong -\bar{P} \frac{l}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (b)$$

La matrice della forma quadratica è la matrice geometrica del sistema:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{P}l & 0 \\ 0 & \bar{P}l \end{bmatrix} \quad (c)$$



(c)

Il problema agli autovalori (d) dell'Esercizio 9 si modifica come segue:

$$\left(\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{P}l & 0 \\ 0 & \bar{P}l \end{bmatrix} - \lambda \rho l^3 \begin{bmatrix} 4/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

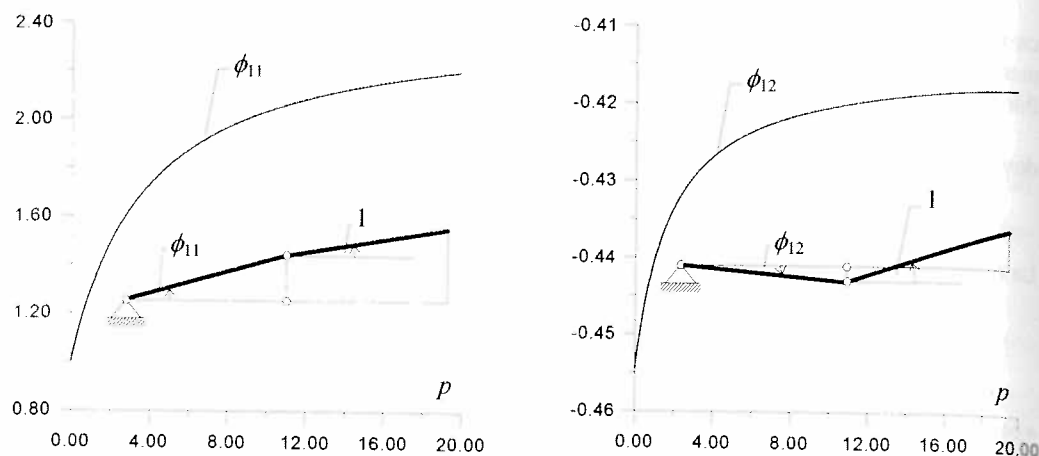
La matrice di rigidezza totale (elastica più geometrica) è ora non singolare. Procedendo come nell'Esercizio 9 si trova:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{14} \frac{c}{\rho l^3} \left(96 + 60p \mp \sqrt{(96 + 60p)^2 - 28p(72 + 36p)} \right), \quad p = \frac{\bar{P}l}{c} \quad (e)$$

a cui corrispondono frequenze naturali il cui andamento è riportato in Fig. (c) in funzione del carico normalizzato p e per $c/(\rho l^3) = 1 \text{ sec}^{-2}$. I modi associati agli autovalori (e) sono:

$$\phi_1 = \left\{ \frac{3 + 3p + \sqrt{2} \sqrt{32 + 33p + 9p^2}}{11 + 3p}, 1 \right\}^T, \quad \phi_2 = \left\{ \frac{3 + 3p - \sqrt{2} \sqrt{32 + 33p + 9p^2}}{11 + 3p}, 1 \right\}^T \quad (f)$$

In Fig. (d) sono diagrammate in funzione del carico p le prime componenti degli autovettori (f). In essa sono anche indicate le deformate modali corrispondenti al generico valore del carico normalizzato p . Frequenze e modi vanno confrontati con quelli dell'Esercizio 9.



(d)

- **Osservazione 14.** L'Esercizio 10 ha mostrato che *uno stato di presollecitazione di tipo stabilizzante* agente in un sistema labile (o degenere) fa *aumentare le frequenze*. In particolare le frequenze nulle diventano positive, cosicché tutti i moti del sistema diventano armonici.

2.6 Proprietà di ortogonalità dei modi naturali

Stante l'analogia formale con il problema della biforcazione dell'equilibrio, già sottolineata nell'Osservazione 10, valgono le medesime considerazioni fatte nel Par. 10.3.4. In particolare, sussistono le seguenti proprietà di ortogonalità (cfr. Appendice B2):

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = 0, \quad \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = 0 \quad i \neq j \quad (31)$$

Scegliendo opportunamente la costante moltiplicativa, gli autovettori possono essere *normalizzati* come segue:

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \lambda_i, \quad \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = 1 \quad (32)$$

Le (31) e (32) si scrivono:

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \delta_{ij} \lambda_i, \quad \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = \delta_{ij} \quad (33)$$

con δ_{ij} simbolo di Kronecker. Le (33) costituiscono le condizioni di *ortonormalizzazione* degli autovettori.

- **Osservazione 15.** Le condizioni di ortogonalità godono di un'interpretazione meccanica del tutto analoga a quella data nell'Osservazione 10.20 a proposito dei modi critici. Esse stabiliscono che le forze elastiche e le forze d'inerzia associate ad un modo di una certa frequenza compiono lavoro virtuale nullo nei modi di diversa

frequenza. Se due o più modi hanno la medesima frequenza (autovalore multiplo) è sempre possibile rendere ortogonali i modi combinandoli linearmente in maniera opportuna.

Ordinando gli autovettori per colonna nella matrice Φ si ha:

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_l] \quad (34)$$

dove Φ è detta *matrice dei modi di vibrazione*. Le (33) si scrivono:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (35)$$

dove:

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\} = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_l^2\} \quad (36)$$

è la *matrice degli autovalori*, diagonale.

Esercizio 11: Si verifichi l'ortogonalità degli autovettori del sistema dell'Esercizio 7 e si imponga la normalizzazione.

Gli autovettori trovati (Eq. e) sono:

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix}^T \quad (a)$$

Per normalizzare gli autovettori si moltiplicano questi per uno scalare α_i , $\hat{\phi}_i = \alpha_i \phi_i$, e si impone che la (35₂) sia soddisfatta

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^T \mathbf{M} \hat{\phi}_1 &= 2m\alpha_1^2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \hat{\phi}_2^T \mathbf{M} \hat{\phi}_2 &= m\alpha_2^2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (b)$$

Gli autovettori normalizzati sono:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^T, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix}^T \quad (c)$$

Si verifica facilmente che gli autovettori normalizzati soddisfano la (35₁).

2.7 Soluzione generale delle equazioni del moto. Condizioni iniziali

La soluzione generale della (20) si ottiene combinando linearmente le soluzioni particolari (21). Si ha:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^l c_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) \phi_k \quad (37)$$

dove c_k e α_k sono $2l$ costanti arbitrarie. Equivalentemente le (37) si scrivono:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^l (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \phi_k \quad (38)$$

dove $a_k = c_k \cos \alpha_k$ e $b_k = -c_k \sin \alpha_k$ sono $2l$ nuove costanti arbitrarie. Per determinarle è necessario far uso delle condizioni iniziali (20₂), che si scrivono:

$$\sum_{k=1}^l a_k \phi_k = \mathbf{q}_0, \quad \sum_{k=1}^l b_k \omega_k \phi_k = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (39)$$

Le (39) costituiscono un sistema di $2l$ equazioni in altrettante incognite (a_k, b_k). Per risolverle è opportuno far uso delle proprietà di ortogonalità degli autovettori. Premoltiplicando le (39) per $(\mathbf{M}\phi_h)^T$, ($h=1,2,\dots,l$), si ha:

$$\sum_k a_k \phi_h^T \mathbf{M} \phi_k = \phi_h^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \quad \sum_k b_k \omega_k \phi_h^T \mathbf{M} \phi_k = \phi_h^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (40)$$

Stanti le (33), le (40) costituiscono un sistema di $2l$ equazioni disaccoppiate; risolvendo si trova:

$$a_k = \phi_k^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \quad b_k = \phi_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 / \omega_k \quad (k=1,2,\dots,l) \quad (41)$$

- **Osservazione 16.** Si noti che se $\mathbf{q}_0 = \alpha \phi_j$ e $\dot{\mathbf{q}}_0 = \beta \phi_j$, con α e β scalari, solo le ampiezze a_j e b_j sono diverse da zero. Le particolari condizioni iniziali eccitano cioè solo il j -esimo modo, cosicché il sistema oscilla con frequenza ω_j *mantenendo immutata nel tempo la forma della deformata iniziale*. Se invece le condizioni iniziali sono una combinazione lineare di particolari m modi, solo quei modi vengono eccitati, ed il sistema oscilla secondo una sovrapposizione di m moti armonici di diverse frequenze, mutando nel tempo la forma propria secondo una legge in generale non periodica (più precisamente, quasi-periodica o m -periodica).
- **Osservazione 17.** Se il sistema ha delle frequenze nulle, ad esempio $\omega_1 = 0$, nella (38) il prodotto $b_1 \sin \omega_1 t$ è indeterminato ($\infty \cdot 0$). Facendo comunque il limite per $\omega_1 \rightarrow 0$, poiché $\sin \omega_1 t / \omega_1 \rightarrow t$, si trova una soluzione del tipo (30).

Esercizio 12: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 4, assegnate le condizioni iniziali $u_B(0) = \beta v_{C0}$, $v_C(0) = v_{C0}$ ed atto di moto nullo: (a) si scriva la soluzione generale del problema omogeneo ($M(t) \equiv 0, F(t) \equiv 0$); (b) si diagrammi lo spostamento $u_B(t)$ e la tensione $\sigma_1(t)$ per $\beta=1$; (c) si commenti il caso $\beta=0$.

(a) I modi naturali sono stati determinati nell'Esercizio 7 e normalizzati nell'Esercizio 11. La (38) si scrive:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) + \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} (a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t) \quad (a)$$

dove $\omega_1 = \sqrt{c/m}$, $\omega_2 = \sqrt{6c/m}$. Poiché l'atto di moto iniziale è identicamente nullo, è $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$, cosicché dalla (41₂) è $b_1 = b_2 = 0$. Per determinare a_1 ed a_2 occorre prima determinare $\mathbf{q}_0 = \{q_{10}, q_{20}\}^T$. Dalle (a₁) e (a₄) dell'Esercizio 4 è:

$$u_B(0) = q_{10} - q_{20}l = \beta v_{C0}, \quad v_C = -q_{20}l = v_{C0} \quad (b)$$

da cui segue:

$$\mathbf{q}_0 = \begin{Bmatrix} -v_{C0}(1-\beta) & -v_{C0}/l \end{Bmatrix}^T \quad (c)$$

Le (41) forniscono allora:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \end{Bmatrix} m \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -v_{C0}(1-\beta) \\ -v_{C0}/l \end{Bmatrix} = \sqrt{2m} \beta v_{C0} \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 & l^{-1} \end{Bmatrix} m \begin{bmatrix} 2 & -2l \\ -2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -v_{C0}(1-\beta) \\ -v_{C0}/l \end{Bmatrix} = -\sqrt{m} v_{C0} \end{aligned} \quad (d)$$

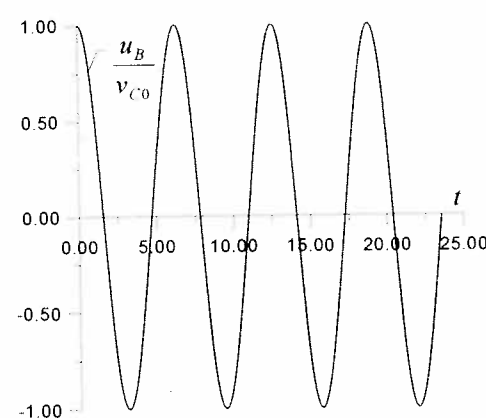
La soluzione generale (a) è quindi:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \beta v_{C0} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t - v_{C0} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t \quad (e)$$

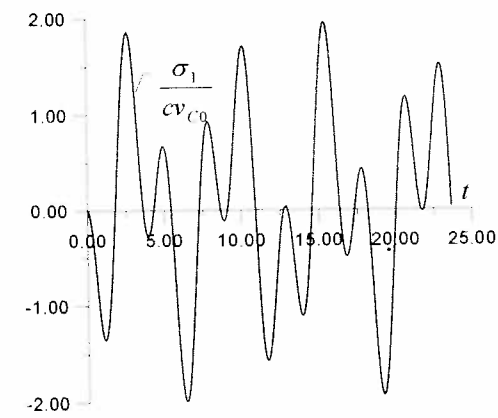
(b) Dalle (a₁) e (c₁) dell'Esercizio 4 è, utilizzando le (e):

$$\begin{aligned} u_B(t) &= \beta v_{C0} \cos \omega_1 t \\ \sigma_1(t) &= -c v_{C0} (\beta \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{aligned} \quad (f)$$

diagrammate per $\beta=1$ e $c/m=1 \text{ sec}^{-2}$ nelle Fig. (c) e (d). Si osserva che mentre u_B segue una legge armonica di frequenza ω_1 , la tensione σ_1 oscilla con legge quasiperiodica di frequenze base ω_1 ed ω_2 . Ciò dipende dal fatto che, mentre la componente dello spostamento u_B dipende dal solo primo modo di vibrare della struttura, la tensione σ_1 dipende da entrambi i modi (si vedano in proposito le forme modali riportate nelle Fig. (c) e (d) dell'Esercizio 7).



(c)



(d)

(c) Il caso $\beta=0$ corrisponde ad una condizione iniziale la cui forma coincide con quella del secondo modo di vibrare della struttura (cfr. Esercizio 7). In questo caso il punto B rimane in quiete mentre l'intera struttura oscilla con la forma del secondo modo naturale.

3. La risposta a forzante armonica

3.1 Equazioni del moto

Si studia ora il moto indotto dall'applicazione di forze variabili nel tempo (*risposta forzata*). Ci si limita a considerare forze $\mathbf{F}_k(t)$ che variano tutte con la medesima legge, assunta di tipo *armonico*, $\mathbf{F}_k(t) = \tilde{\mathbf{F}}_k \cos \omega t$; è perciò:

$$\mathbf{p}(t) = \tilde{\mathbf{p}} \cos \omega t \quad (42)$$

dove ω è detta *frequenza della forzante*.

- **Osservazione 18.** Il caso di forzante armonica è particolarmente importante. È noto infatti dall'Analisi Matematica che una generica *funzione periodica* è esprimibile in serie di Fourier come combinazione lineare di infinite *funzioni armoniche*, aventi ciascuna frequenza multipla della frequenza fondamentale. Poiché le equazioni del moto sono lineari, vale la sovrapposizione degli effetti. La risposta della struttura a una forzante periodica è quindi somma delle risposte corrispondenti a forzanti armoniche. Qui si esamina una di queste.

Le equazioni del moto (11) e le condizioni iniziali (12) si scrivono:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \tilde{\mathbf{p}} \cos \omega t \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (43)$$

3.2 Soluzione generale

La soluzione generale delle equazioni (43) è somma della soluzione generale del problema omogeneo associato, cioè della risposta libera già determinata, e di una soluzione particolare del problema non omogeneo. Quest'ultima può essere facilmente determinata ponendo:

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} \cos \omega t \quad (44)$$

- **Osservazione 19.** La (44) esprime la risposta come moto *in fase con la forzante*: tutti i punti materiali del sistema oscillano con la stessa frequenza ω , cosicché la forma della deformata rimane immutata nel tempo, mentre la sua ampiezza varia.

Sostituendo la (44) nella (43₁) ed imponendo che questa valga per ogni istante t , si ha:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{p}} \quad (45)$$

La (45) è un sistema di equazioni algebriche nelle incognite $\tilde{\mathbf{q}}$. Per determinare la dipendenza analitica $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\omega^2)$, è conveniente risolvere le (45) nella base ortogonale degli autovettori ϕ_i (si veda l'Appendice B.7). Si pone:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \Phi \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad (46)$$

dove la matrice $l \times l$ Φ è definita dalla (34) e il vettore $l \times 1$ $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ è il *vettore delle coordinate normali*.

- **Osservazione 20.** La (46) esprime lo spostamento $\tilde{\mathbf{q}}$ come combinazione lineare a coefficienti incogniti $\tilde{\eta}_i$ degli autovettori ϕ_i ; $\tilde{\eta}_i$ rappresenta dunque l'ampiezza di $\tilde{\mathbf{q}}$ nella direzione ϕ_i dello spazio delle variabili di configurazione $\{q_i\}$ (Fig. 3).

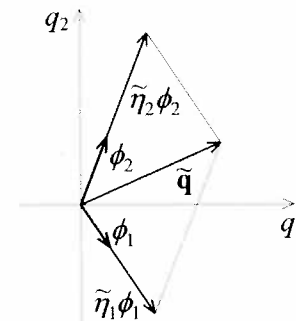


Fig. 3 Scomposizione del vettore $\tilde{\mathbf{q}}$ nella base ortonormale degli autovettori e significato delle coordinate normali $\tilde{\eta}_i$ ($i=1,2$)

Sostituendo la (46) nella (45) e premoltiplicando per Φ^T si ha:

$$(\Phi^T \mathbf{K} \Phi - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi) \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \Phi^T \tilde{\mathbf{p}} \quad (47)$$

Tenuto conto delle condizioni di ortonormalizzazione (35), la (47) si scrive:

$$(\Lambda - \omega^2 \mathbf{I}) \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad (48)$$

dove:

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \Phi^T \tilde{\mathbf{p}} \quad (49)$$

è il *vettore delle forze modali*. La i -esima componente $\tilde{\xi}_i = \phi_i^T \tilde{\mathbf{p}}$ rappresenta il lavoro virtuale compiuto dalle forze $\tilde{\mathbf{p}}$ nell' i -esimo modo di vibrare ϕ_i . Le (48) costituiscono un sistema di l equazioni algebriche lineari *disaccoppiate* nelle incognite $\tilde{\eta}_i$; possono anche scriversi, ricordando la (36):

$$(\omega_j^2 - \omega^2) \tilde{\eta}_j = \tilde{\xi}_j \quad (j = 1, 2, \dots, l) \quad (50)$$

Risolvendo e ritornando alle variabili \tilde{q}_i , tramite la (46), si ha infine:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^l \frac{\tilde{\xi}_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \phi_j \quad (51)$$

La (51) può anche essere scritta come:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \frac{\tilde{\xi}_j}{\omega_j^2} \phi_j \quad (52)$$

In essa i fattori $[1 - (\omega/\omega_j)^2]^{-1}$ sono detti *fattori di amplificazione (dinamici)*. Igno-

randoli, si ottiene la soluzione corrispondente ad $\omega = 0$, cioè la *soluzione statica*, rappresentata nella base modale:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{stat} := \sum_{j=1}^l \frac{\tilde{\xi}_j}{\omega_j^2} \phi_j \quad (53)$$

La (52) esprime dunque l'ampiezza $\tilde{\mathbf{q}}$ della soluzione del problema dinamico come la soluzione del problema statico corrispondente ($\mathbf{p}(t) = \tilde{\mathbf{p}} = \text{cost}$), in cui però *ciascuna componente modale è amplificata del fattore che compete alla frequenza associata*.

- **Osservazione 21.** Il procedimento seguito per risolvere la (45) è identico a quello seguito nel Par. 10.3.6 per risolvere il problema elastostatico non omogeneo relativo ad un sistema presollecitato. Tuttavia, mentre nel caso statico si è interessati ad autovalori $\lambda < \lambda_c$, nel caso dinamico la frequenza ω della forzante può essere qualsiasi. Ciò spiega perché la relazione 10.35, adottata in statica, non trovi corrispondenza nel caso dinamico.

Determinata la soluzione particolare (44), la soluzione generale della (43₁) si scrive:

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^l (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \phi_k + \sum_{j=1}^l \frac{1}{1 - (\omega/\omega_j)^2} \frac{\tilde{\xi}_j}{\omega_j^2} \phi_j \cos \omega t \quad (54)$$

avendo usato la (38). Le costanti a_k e b_k si determinano dalle condizioni iniziali (43₂) con un procedimento analogo a quello seguito nel Par. 2.7. Si trova:

$$\begin{aligned} a_k &= \phi_k^T \mathbf{M}(\mathbf{q}_0 - \tilde{\mathbf{q}}) = \phi_k^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 - \frac{\tilde{\xi}_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \\ b_k &= \phi_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 / \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, l) \end{aligned} \quad (55)$$

- **Osservazione 22.** Nei sistemi smorzati, non trattati qui, il contributo prevalente alla risposta è rappresentato dalla soluzione particolare (44) (*risposta a regime*). È possibile infatti dimostrare che il contributo delle oscillazioni libere decade rapidamente nel tempo. Tuttavia lo smorzamento produce una differenza di fase tra la forzante e la risposta.

3.3 Risonanza

Nella (52) il j -esimo fattore di amplificazione assume valore infinito quando la frequenza della forzante ω coincide con la j -esima frequenza naturale ω_j della struttura. Il fenomeno è detto di *risonanza*; si dice anche che la forzante è in risonanza con il j -esimo modo. Corrispondentemente la forma della deformata tende a quella del j -esimo modo. Un sistema ad l g.d.l. esibisce l risonanze, una per ciascun modo. Se si disegna l'ampiezza della risposta \tilde{u}_p di un punto P in funzione della frequenza ω della forzante, si ottiene un grafico del tipo mostrato in Fig. 4. Per $\omega \rightarrow 0$ la risposta tende a quella statica, per $\omega \rightarrow \omega_j$ tende ad infinito, per $\omega \rightarrow \infty$ tende a zero. Un andamento analogo si ha per le deformazioni e tensioni negli organi elastici. Tenuto

conto del contributo delle oscillazioni libere il diagramma in Fig. 4 si modifica nei valori delle ordinate, ma preserva l'andamento qualitativo (si veda in proposito l'Esercizio 13).

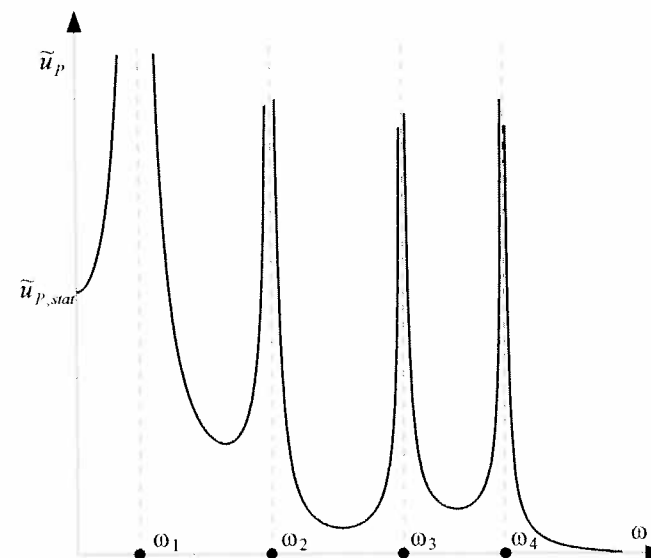


Fig. 4 Ampiezza della risposta di un punto P a forzante armonica in funzione della frequenza della forzante

- **Osservazione 23.** Il fatto che, in risonanza, la risposta dinamica tenda ad infinito è una conseguenza della linearizzazione del problema. Accade infatti che, non appena gli spostamenti crescono in valore assoluto, le non linearità geometriche (e/o quelle costitutive), trascurate nel problema lineare, diventano via via più importanti, così da modificare la risposta, mantenendola finita. La questione verrà discussa nel Par. 3.5.
- **Osservazione 24.** Il fenomeno della risonanza è formalmente analogo a quello che si riscontra in statica allorché un corpo presollecitato è sottoposto a forze di disturbo e/o imperfezioni (cfr. Par. 10.3.6, ed in particolare la Fig (b) dell'Esercizio 14). In entrambi i problemi la risposta tende ad infinito quando il moltiplicatore dei carichi, o la frequenza della forzante, tende rispettivamente ad uno dei moltiplicatori critici, o ad una delle frequenze naturali. L'analogia è resa ancora più evidente se si interpreta la (45) come un'equazione di equilibrio (statico), definendo la matrice

$$\mathbf{K}_D(\omega) := \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$$

come *matrice di rigidità dinamica*, dipendente dalla frequenza della forzante. La matrice \mathbf{M} gioca allora lo stesso ruolo della matrice di rigidità geometrica \mathbf{G} ; per particolari valori di ω (uguali agli autovalori ω_j), essa rende singolare \mathbf{K}_D , cosicché la risposta tende ad infinito.

Esercizio 13: Si consideri ancora il sistema dell'Esercizio 12, assumendo ora $F(t) = \tilde{F} \cos \omega t$, $M(t) = F(t)l$. Assegnate condizioni iniziali di quiete: (a) si determini la soluzione generale del moto; (b) fissati i valori $\omega = \omega_1/2$ ed $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, si diagrammino le storie temporali $u_B(t)$ e $\sigma_1(t)$ rapportate alle corrispondenti risposte statiche e si discuta il contributo dei due modi di vibrare; (c) si diagrammi in funzione di ω la tensione massima σ_1 , tenuto conto del solo contributo della soluzione particolare ovvero della soluzione generale. Sia $c/m = 1 \text{ sec}^{-2}$.

(a) Si determinano dapprima le forze modali (49). Poiché, dall'Esercizio 4, è $\mathbf{p} = (F, -2Fl)^T$, ricordando le espressioni degli autovettori normalizzati (Esercizio 11), si ha:

$$\tilde{\xi}_1 = \phi_1^T \mathbf{p} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F}{\sqrt{m}}, \quad \tilde{\xi}_2 = \phi_2^T \mathbf{p} = -\frac{F}{\sqrt{m}} \quad (a)$$

La (51) si scrive dunque:

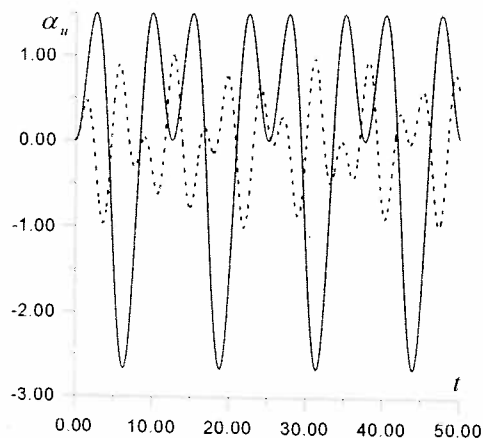
$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F/\sqrt{m}}{\omega_1^2 - \omega^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{F/\sqrt{m}}{\omega_2^2 - \omega^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

essendo $\omega_1 = (c/m)^{1/2}$, $\omega_2 = (6c/m)^{1/2}$. Sommando la soluzione particolare (44) a quella generale, già determinata nell'Esercizio 12 (Eq. a), si ha:

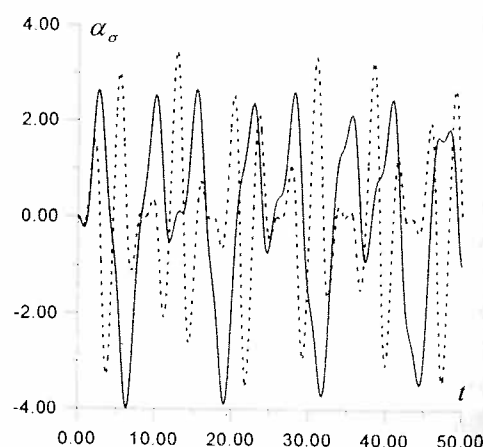
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left(a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + \frac{F\sqrt{2m}}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos \omega t \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} \left(a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t - \frac{F\sqrt{m}}{\omega_2^2 - \omega^2} \cos \omega t \right) \end{aligned} \quad (c)$$

Posto $\mathbf{q}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ nella (55) si ricavano le costanti a_k e b_k ; la (c) si scrive:

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{F}{\omega_1^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_1 t) - \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} 1 \\ l^{-1} \end{Bmatrix} \frac{F}{\omega_2^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_2 t) \quad (d)$$



(a)



(b)

(b) Poiché è (Eq. (a₁) e (c₁)) dell'Esercizio 4), $u_B = q_1 - q_2 l$, $\sigma_1 = -cq_1$ si ha:

$$\begin{aligned} u_B(t) &= \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_1 t) \\ \sigma_1(t) &= -c \frac{F}{m} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_1 t) - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_2 t) \right] \end{aligned} \quad (e)$$

La soluzione del problema statico associato si ottiene dalla (g) dell'Esercizio 4 in cui si ponga $m=0$:

$$(q_1)_{stat} = \frac{F}{3c}, \quad (q_2)_{stat} = -\frac{F}{6cl} \quad (f)$$

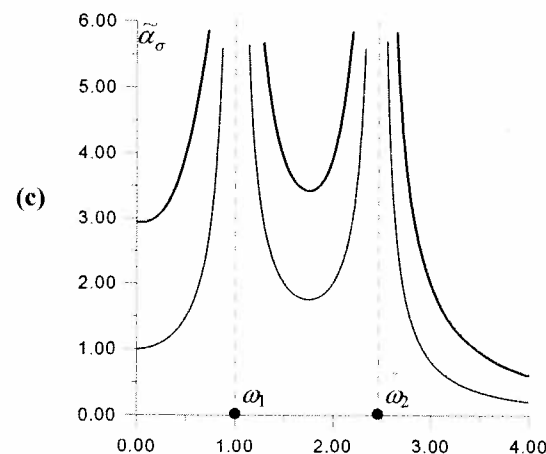
da cui seguono, per u_B e σ_1 , le espressioni:

$$(u_B)_{stat} = \frac{F}{2c}, \quad (\sigma_1)_{stat} = -\frac{F}{3} \quad (g)$$

Introdotte le grandezze adimensionali (*fattori dinamici*):

$$\begin{aligned} \alpha_u(t) &= \frac{u_B(t)}{(u_B)_{stat}} = \frac{c}{m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_1 t) \\ \alpha_\sigma(t) &= \frac{\sigma_1(t)}{(\sigma_1)_{stat}} = 3 \frac{c}{m} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_1 t) - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_2 t) \right] \end{aligned} \quad (h)$$

e diagrammandole per i valori di frequenza assegnati si hanno le storie temporali riportate nelle Fig. (a) e (b) dove la linea a tratto continuo si riferisce ad $\omega = \omega_1/2$, mentre quella tratteggiata ad $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Si vede che, per $\omega = \omega_1/2$, $\alpha_\sigma(t)$ ha un andamento molto simile ad $\alpha_u(t)$, ciò in quanto il contributo ad $\alpha_\sigma(t)$ del primo modo, di frequenza più vicina ad ω , è prevalente su quello del secondo (Eq. h₂). Per $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ gli andamenti di $\alpha_u(t)$ e $\alpha_\sigma(t)$ sono molto diversi, ciò in quanto il contributo del secondo modo non è più trascurabile.



(c) Poiché è $\sigma_1 = -cq_1$, tenuto conto della soluzione particolare, dalla (h) si ha:

$$\tilde{\alpha}_\sigma = \frac{\tilde{\sigma}_1(\omega)}{(\sigma_1)_{stat}} = 3 \frac{c}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (f)$$

Si ottiene il diagramma a tratto sottile di Fig. (c), del tipo quello in Fig. 4. Per tener conto del

contributo delle oscillazioni libere occorre calcolare i massimi delle storie temporali $\alpha_o(t)$, descritte dalla (h₂), al variare di ω . Procedendo numericamente si ottiene la curva a tratto spesso di Fig. (c).

3.4 Spostamenti impressi

Un importante tipo di moto forzato è quello prodotto da spostamenti impressi ai vincoli, variabili nel tempo con legge assegnata. Esempio di questo tipo di eccitazione è rappresentato dalla sollecitazione sismica su strutture vincolate. Si è già visto in statica (Par. 7.5.2) che i cedimenti vincolari \mathbf{s} sono equivalenti a forze lagrangiane $\mathbf{p}_s = -\hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_s = -\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{u}_s$, dove $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ sono le deformazioni degli organi dovute ai cedimenti vincolari agenti sul sistema principale isocinematico ($\mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$). In dinamica, oltre che di queste forze, occorre tenere conto anche delle forze di inerzia equivalenti.

Siano assegnati dei cedimenti $\mathbf{s}(t)$. Il campo degli spostamenti $\mathbf{u}(t)$ può essere descritto come somma di uno spostamento $\mathbf{u}_s(t)$, congruente con i cedimenti vincolari, e del generico campo di spostamenti $\mathbf{u}_q(t) = \mathbf{U} \mathbf{q}(t)$, congruente con cedimenti vincolari nulli. È perciò:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{U} \mathbf{q}(t) \quad (56)$$

Scelti i parametri lagrangiani \mathbf{q} , il campo di spostamenti \mathbf{u}_s è definito in modo univoco; esso coincide con quello del sistema principale isocinematico soggetto ai cedimenti \mathbf{s} . $\mathbf{u}_s(t)$ è detto *spostamento quasi-statico* in quanto rappresenta lo spostamento che si avrebbe nel sistema se i cedimenti $\mathbf{s}(t)$ fossero applicati in un tempo infinito (cioè appunto in modo quasi-statico), in modo tale da non generare forze di inerzia; $\mathbf{u}_q(t)$ ha quindi il significato di *contributo dinamico* della risposta. Per ottenere le equazioni lagrangiane di equilibrio in forma diretta, può procedersi come segue (l'Esercizio 15 mostrerà invece un'applicazione della formulazione variazionale). Le condizioni di equilibrio del sistema vincolato si scrivono (cfr. Eq. 7.11):

$$\mathbf{f}_v(t) + \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}^I(t) + \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \quad (57)$$

dove \mathbf{f}_v sono le forze generalizzate vincolari, \mathbf{f}_e le forze elastiche, \mathbf{f}^I le forze di inerzia ed \mathbf{f} le forze attive. Le forze elastiche e quelle d'inerzia valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) &= -\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}(t) = -\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{f}^I(t) &= -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) \end{aligned} \quad (58)$$

ovvero, tenuto conto della (56),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) &= -\mathbf{K}[\mathbf{u}_s(t) + \mathbf{U} \mathbf{q}(t)] \\ \mathbf{f}^I(t) &= -\mathbf{M}[\ddot{\mathbf{u}}_s(t) + \mathbf{U} \ddot{\mathbf{q}}(t)] \end{aligned} \quad (59)$$

Sostituendo nella (57) e premoltiplicando per \mathbf{U}^T , ricordando che $\mathbf{U}^T \mathbf{f}_v = \mathbf{0}$ (cfr. Osser-

vazione 7.8), si ottengono le equazioni lagrangiane:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}_s(t) + \mathbf{p}_s^I(t) \quad (60)$$

dove $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$, $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$, $\mathbf{p} = \mathbf{U}^T \mathbf{f}$ ed inoltre:

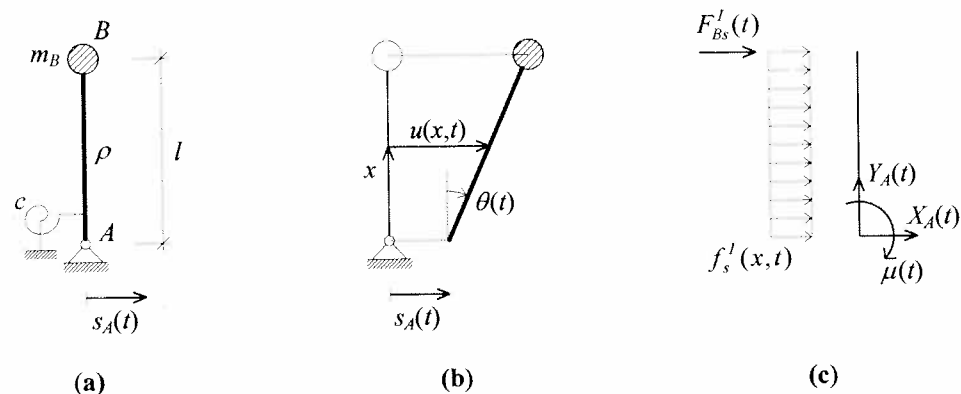
$$\mathbf{p}_s(t) = -\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{u}_s(t), \quad \mathbf{p}_s^I(t) = -\mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_s(t) \quad (61)$$

$\mathbf{p}_s(t)$ è il vettore delle forze pseudostatiche associate ai cedimenti vincolari, identico a quello già incontrato nel problema elastostatico, e $\mathbf{p}_s^I(t)$ è il vettore delle forze d'inerzia associate ai cedimenti vincolari. Per quest'ultimo vale un'interpretazione meccanica analoga a quella fatta per \mathbf{p}_s (cfr. Osservazione 7.19).

La risposta forzata $\mathbf{q}(t)$ può essere determinata come nel caso delle sole forze attive. Noto $\mathbf{q}(t)$ si calcolano le deformazioni come $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_s(t) + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{q}(t)$ e le tensioni come $\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

- **Osservazione 25.** Nel caso di sistemi cinematicamente determinati, ai cedimenti \mathbf{s} corrisponde un campo di spostamenti $\mathbf{u}_s(t)$ rigido, per il quale è dunque $\boldsymbol{\varepsilon}_s(t) \equiv \mathbf{0}$; è perciò $\mathbf{p}_s(t) \equiv \mathbf{0}$. Comunque risulta $\mathbf{p}_s^I(t) \neq \mathbf{0}$ (si veda il successivo Esercizio 14). Nel caso di sistemi iperstatici, invece, entrambi i contributi sono diversi da zero (si veda il successivo Esercizio 15).

Esercizio 14: Si determini la risposta del sistema dell'Esercizio 3 sottoposto ad uno spostamento impresso alla base $s_A(t) = \tilde{s}_A \cos \omega t$ (Fig. a).



Il campo degli spostamenti è (Fig. b):

$$u(x, t) = s_A(t) + x \theta(t) \quad (a)$$

cosicché è $u_s(x, t) = s_A(t)$. Allo spostamento u_s è associata una deformazione della molla $\kappa_s \equiv 0$, cosicché è $p_s \equiv 0$. Per determinare p_s^I occorre prima determinare le forze di inerzia associate al moto $u_s(t)$; si ha (Fig. c):

$$F_{Bs}^I(t) = -m_B \ddot{s}_A(t), \quad f_s^I(x, t) = -\rho \ddot{s}_A(t) \quad (b)$$

il cui momento rispetto ad A vale:

$$M_{As}^I(t) = -S_A \ddot{s}_A(t) \quad (c)$$

dove $S_A = m_b l + \rho l^2/2$ è il momento statico rispetto ad A della massa. L'equazione del moto è dunque, ricordando le (f) dell'Esercizio 3:

$$I_A \ddot{\theta}(t) + c\theta(t) = S_A \tilde{s}_A \omega^2 \cos \omega t \quad (d)$$

Posta la soluzione nella forma:

$$\theta(t) = \tilde{\theta} \cos \omega t \quad (e)$$

sostituendo nella (d) e risolvendo si ha:

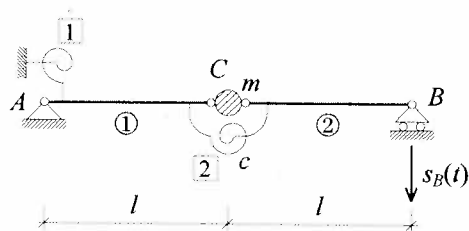
$$\tilde{\theta} = \frac{S_A \tilde{s}_A \omega^2}{c - I_A \omega^2} \quad (f)$$

La soluzione generale è quindi:

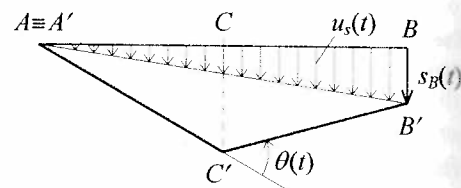
$$\theta(t) = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t + \frac{S_A \tilde{s}_A \omega^2}{I_A (\omega_1^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (g)$$

dove $\omega_1 = (c/I_A)^{1/2}$.

Esercizio 15 Applicando la formulazione variazionale si scrivano le equazioni del moto del sistema in Fig. (a).



(a)



(b)

Il sistema rigido associato ha un g.d.l.. Si assume la rotazione relativa $\theta(t)$ tra le due aste quale parametro lagrangiano (Fig. b); lo spostamento $u_s(t)$ è quello congruente con $s_B(t) \neq 0$ e $\theta(t) = 0$ (Fig. b). Sovrapponendo gli effetti le deformazioni valgono:

$$\kappa_1 = -\frac{s_B}{2l} - \frac{\theta}{2}, \quad \kappa_2 = \theta \quad (a)$$

e lo spostamento di C è:

$$v_C = -\frac{s_B}{2} - \theta \frac{l}{2} \quad (b)$$

L'energia potenziale elastica si scrive:

$$\Phi = \frac{1}{2} c (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) = \frac{1}{2} c \left(\frac{5}{4} \theta^2 + \frac{s_B}{2l} \theta + \frac{s_B^2}{4l^2} \right) \quad (c)$$

e l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}_C^2 = \frac{1}{8} m (\dot{s}_B^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \dot{s}_B \dot{\theta}) \quad (d)$$

Applicando il principio di Hamilton si ha:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Phi) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{4} m (l^2 \dot{\theta} + \dot{s}_B)^2 \delta \dot{\theta} - c \left(\frac{5}{4} \theta + \frac{1}{4} \frac{s_B}{l} \right) \delta \theta \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{4} m (l^2 \ddot{\theta} + \ddot{s}_B) + c \left(\frac{5}{4} \theta + \frac{1}{4} \frac{s_B}{l} \right) \right] \delta \theta dt + [\dots]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad \forall \delta \theta \end{aligned} \quad (e)$$

da cui si ottiene l'equazione del moto:

$$ml^2 \ddot{\theta} + 5c\theta = -ml\ddot{s}_B - c \frac{s_B}{l} \quad (f)$$

3.5 Limiti della teoria lineare: cenni di dinamica non lineare

Si è detto (Osservazioni 11 e 23) che la teoria lineare presenta due inconvenienti: (a) non permette di valutare la dipendenza delle frequenze naturali dall'ampiezza dell'oscillazione; (b) fornisce una risposta di ampiezza infinita in condizioni di risonanza. Ciò è conseguenza dell'aver trascurato i termini non lineari nelle equazioni del moto. D'altra parte la Dinamica Non Lineare è materia estremamente vasta e complessa da non poter essere qui affrontata. Ci si limiterà pertanto a dare dei cenni sulla questione, con riferimento ad un sistema ad un g.d.l.. Si sottolineerà così come l'analogia con il problema della biforcazione dell'equilibrio, già più volte richiamata, sussista anche in campo non lineare (si veda il Par. 10.3.7). Per semplificare la trattazione ci si limiterà a considerare sistemi la cui reazione strutturale è simmetrica. L'equazione non lineare del moto per un'ampia classe di sistemi (simmetrici) ad un g.d.l. forzati armonicamente si scrive:

$$m\ddot{q}(t) + p_e(q(t)) = \tilde{p} \cos \omega t, \quad p_e(0) = 0, \quad p_e(q) = -p_e(-q) \quad (62)$$

dove $p_e(q)$ è la forza elastica, in generale funzione non lineare dello spostamento $q(t)$. La funzione $p_e(q)$ ammette lo sviluppo in serie:

$$p_e(q) = kq + \frac{1}{3!} p_e'''(0) q^3 + O(q^5) \quad (63)$$

dove l'apice indica derivazione rispetto a q e:

$$k := p_e'(0) \quad (64)$$

è la rigidezza elastica del sistema. Se nelle (62) si ritiene il solo termine lineare in q si perviene ai risultati già illustrati. In particolare la frequenza naturale è $\omega_1 = (k/m)^{1/2}$, indipendente dall'ampiezza, ed inoltre $q \rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow \omega_1$.

La soluzione esatta della (62) non è nota; tuttavia è facile trovare una soluzione particolare (periodica) approssimata procedendo come segue (*metodo del bilancio armonico*). Posta la soluzione del tipo:

$$q = a \cos \omega t \quad (65)$$

con a ampiezza del moto, e sostituendola nella (62), in cui $p_e(q)$ sia stata sviluppata

in serie, si ha:

$$(-m\omega^2 + k)a \cos \omega t + \frac{1}{6} p_e'''(0) a^3 \cos^3 \omega t + \dots = \tilde{p} \cos \omega t \quad (66)$$

Si vede che la (65), a differenza del caso lineare, non soddisfa l'equazione del moto. Tuttavia, assunta la (65) come il primo termine di uno sviluppo in serie di Fourier della soluzione incognita, si può richiedere che essa annulli almeno le armoniche $\cos \omega t$ nella (66) (per annullare anche le armoniche superiori sarebbero necessari più termini dello sviluppo in serie). Tenuto conto che:

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \quad (67)$$

e trascurando nella (66) le armoniche superiori si ha:

$$a \left(-m\omega^2 + k + \frac{1}{8} p_e'''(0) a^2 \right) - \tilde{p} = 0 \quad (68)$$

Si consideri prima il caso omogeneo (risposta libera, $\tilde{p} = 0$). In tal caso è $\omega = \omega_1$ (frequenza naturale). Dalla (68) si ha:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} + \frac{1}{8} \frac{p_e'''(0)}{m} a^2 \quad (69)$$

Essa esprime la *frequenza naturale come funzione dell'ampiezza* a dell'oscillazione. Per $a \rightarrow 0$ la frequenza non lineare tende alla frequenza lineare. Se $p_e'''(0) > 0$ la frequenza cresce con l'ampiezza, se $p_e'''(0) < 0$ la frequenza decresce con l'ampiezza (Fig. 5b). Nel primo caso il sistema è detto a *rigidezza crescente* (o *hardening*), ha cioè reazione strutturale maggiore di quella lineare; nel secondo caso è detto a *rigidezza decrescente* (o *softening*), ha cioè reazione strutturale minore di quella lineare (Fig. 5a).

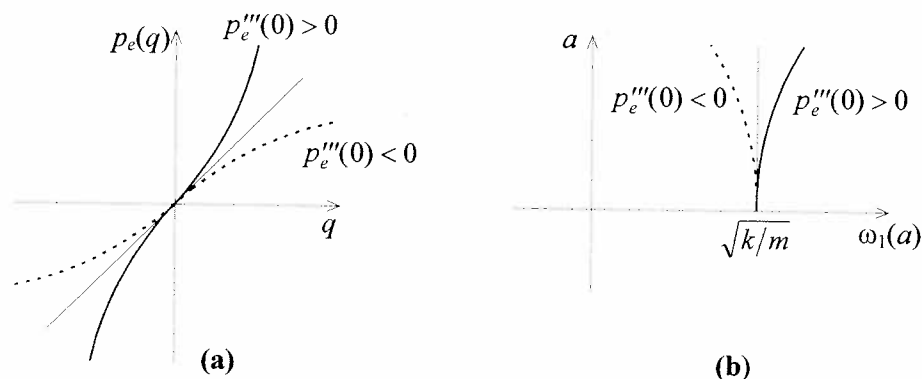


Fig. 5 (a) Reazione strutturale elastica (hardening o softening) e (b) corrispondente frequenza naturale in funzione dell'ampiezza

- **Osservazione 26.** Si noti l'analogia tra la Fig. 5b e la Fig. 10.7a,b. Ruotando la Fig. 5b di 90° si possono identificare le curve ampiezza-frequenza con quelle del percorso biforcuto, nel caso sopracritico e sottocritico.

Passando a studiare la risposta forzata, la (68) fornisce:

$$\omega^2(a) = \omega_1^2(a) - \frac{\tilde{p}}{am} \quad (70)$$

che mostra come per $a \gg \tilde{p}$, $\omega(a) \rightarrow \omega_1(a)$. La (70) è rappresentata in Fig. 6. Si vede che in risonanza, cioè per $\omega = (k/m)^{1/2}$, la risposta non lineare è finita.

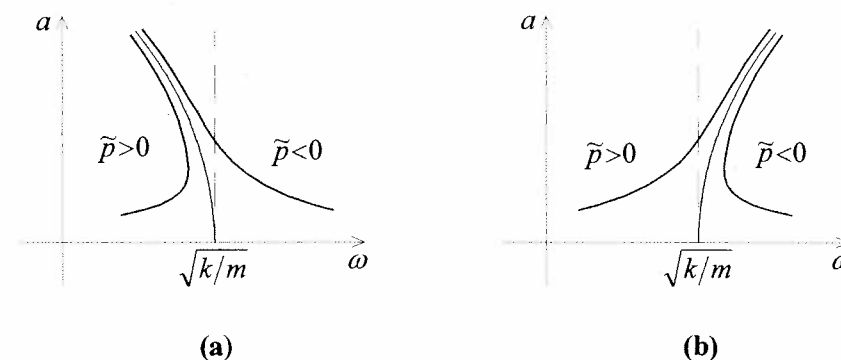
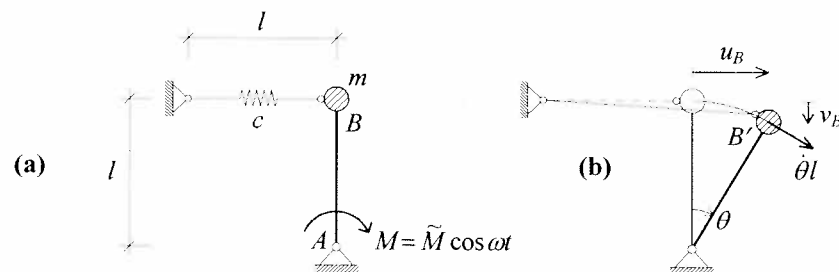


Fig. 6 Curve frequenza-risposta: (a) caso softening; (b) caso hardening

- **Osservazione 27.** La Fig. 6 è stata costruita, per comodità, nella forma $\omega = \omega(a)$. In realtà, ω è assegnata (frequenza della forzante) ed a è incognita. Dalla Fig. 6 si vede che, in certi campi di frequenza, la risposta è a più valori. Nella Dinamica Non Lineare si dimostra che alcune di queste soluzioni sono stabili ed altre instabili.
- **Osservazione 28.** Come nel caso della biforcazione dell'equilibrio (cfr. Fig. 10.8a,b) le curve relative al problema non omogeneo sono attratte da quelle relative al problema omogeneo.
- **Osservazione 29.** La (65) esprime solo una soluzione particolare dell'Eq. (62), non la soluzione generale. È tuttavia significativa; infatti, in presenza di smorzamento, essa rappresenta, a meno dello sfasamento, la soluzione a regime come nel caso lineare (Osservazione 22).

Esercizio 16 Si determini la frequenza naturale non lineare del sistema in Fig. (a), nonché la risposta non lineare a regime in condizioni di risonanza.



Si assume la rotazione θ quale parametro lagrangiano. Assegnata una rotazione finita (Fig. b) si ha, fino ai termini cubici:

$$u_B = l \sin \theta \cong l(\theta - \theta^3/6), \quad v_B = l(1 - \cos \theta) \cong l\theta^2/2 \quad (a)$$

L'allungamento della molla è (cfr. Osservazione 9.2):

$$\varepsilon \cong u_B + \frac{1}{2} \left(\frac{v_B}{l} \right)^2 = l \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) \quad (b)$$

L'energia potenziale totale si scrive:

$$U = \frac{1}{2} c \varepsilon^2 - M \theta = \frac{1}{2} c l^2 \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \theta^4 + \dots \right) - M \theta \quad (c)$$

Essendo la velocità della massa $V = l \dot{\theta}$, l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (d)$$

Applicando il principio di Hamilton si trova la seguente equazione del moto:

$$m l^2 \ddot{\theta} + c l^2 \left(\theta - \frac{2}{3} \theta^3 \right) = \tilde{M} \cos \omega t \quad (e)$$

Il sistema è a rigidezza decrescente, in quanto il coefficiente di θ^3 è negativo. Posto:

$$\theta(t) = a \cos \omega t \quad (f)$$

sostituendo nell'equazione del moto ed eguagliando a zero le armoniche in $\cos \omega t$ si ha:

$$a \left[-\omega^2 + \frac{c}{m} \left(1 - \frac{1}{2} a^2 \right) \right] - p = 0, \quad p = \frac{\tilde{M}}{m l^2} \quad (g)$$

da cui segue la frequenza naturale:

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m} \left(1 - \frac{1}{2} a^2 \right) \quad (h)$$

Risolvendo l'equazione cubica (h_1) rispetto all'ampiezza a , per $\omega = \sqrt{c/m}$ si ha:

$$a = -\sqrt[3]{2p} \quad (i)$$

Poiché $a < 0$ la risposta a regime è in opposizione di fase con la forzante:

$$\theta(t) = \sqrt[3]{2p} \cos(\omega t + \pi) \quad (l)$$

4. Cenni di stabilità dell'equilibrio

4.1 Introduzione

L'analisi di biforcazione sviluppata nel Cap. 10 ha condotto naturalmente alla posizione del problema della *qualità dell'equilibrio*. In quella sede, infatti, pur ignorando nozioni di dinamica, ma facendo uso di considerazioni di puro equilibrio (criterio statico di stabilità) si sono individuate situazioni di *equilibrio stabile* ovvero *instabile* e si sono messe in relazione i fenomeni di *biforcazione dell'equilibrio* e di *perdita di stabilità dell'equilibrio*. L'interesse, poi, non è stato limitato allo studio della stabilità del solo percorso fondamentale, ma anche a quella del percorso diramato, nei casi in cui tale percorso sia stato determinato con un'analisi postcritica non lineare (cfr. Par. 10.3.7). È opportuno pertanto riprendere l'argomento alla luce delle considerazioni svolte in questo capitolo, per porre in modo più rigoroso l'intera problematica.

4.2 Definizione di stabilità

Per definire il concetto di stabilità di una posizione di equilibrio occorre prima definire lo *spazio di stato* del sistema, quale spazio $2l$ -dimensionale $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T$ delle possibili posizioni e velocità assumibili dal sistema. In esso il punto $O \equiv (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ rappresenta la posizione di equilibrio di cui si vuole esaminare la stabilità, mentre una generica curva (*traiettoria*) rappresenta un moto. Occorre poi definire una misura della distanza $d(t)$ tra lo stato attuale $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}^T$ assunto dal sistema al generico istante t e la posizione di equilibrio O ; una possibile misura della distanza è quella *euclidea* $d = \mathbf{q} \mathbf{q}^T + \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}^T$. La posizione O è detta *stabile* se, nello spazio di stato, esiste una sfera S_δ di raggio δ tale che, le traiettorie che hanno origine da stati perturbati in essa contenuti, sono contenute in ogni istante t in una sfera S_ε di raggio ε , ed inoltre se $\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ (Fig. 7a). Viceversa la posizione O è detta *instabile* se non è possibile trovare un intorno δ che gode di queste proprietà (Fig. 7b).

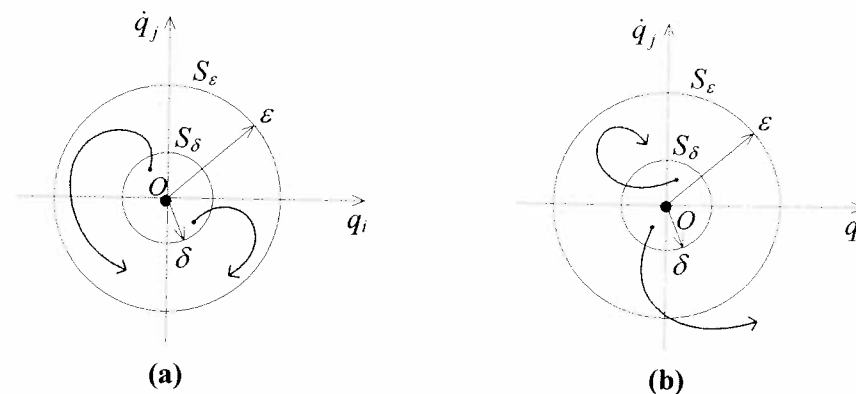


Fig. 7 Definizione di stabilità di una posizione di equilibrio: (a) equilibrio stabile; (b) equilibrio instabile

- **Osservazione 30.** La definizione richiede che sia possibile ridurre quanto si vuole la massima deviazione ε dalla posizione iniziale, riducendo opportunamente l'ampiezza δ della perturbazione, e che questo accada *qualunque sia la forma della perturbazione iniziale* (cioè per tutte le direzioni uscenti da O , Fig. 7a). Se esiste anche una sola perturbazione da cui origina un moto che non può essere confinato e questa situazione persiste al tendere a zero della perturbazione, allora la posizione di equilibrio è instabile (Fig. 7b).
- **Osservazione 31.** Se ad esempio i moti che hanno origine da perturbazioni iniziali sono tutti armonici, del tipo $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \cos \omega t$, l'equilibrio è stabile, in quanto il moto è confinato e tende a zero con l'ampiezza della perturbazione iniziale \mathbf{q}_0 . Se invece anche solo uno dei moti è esponenzialmente divergente, del tipo $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \exp(\alpha t)$, l'equilibrio è instabile, perché per quanto piccola è la perturbazione iniziale, la risposta diviene nel tempo comunque grande.

4.3 Stabilità dei sistemi elastici soggetti a forze conservative

Si consideri un sistema elastico presollecitato da forze conservative. Le equazioni linearizzate del moto libero nell'intorno di una posizione di equilibrio $\mathbf{q} = \mathbf{q}_E$ (in generale diversa da quella naturale) si scrivono:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_E) \ddot{\delta \mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}_E) \delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (71)$$

dove $\mathbf{M}(\mathbf{q}_E)$ e $\mathbf{K}(\mathbf{q}_E)$ dipendono dalla configurazione di equilibrio, \mathbf{K} è la matrice di rigidità totale (elastica più geometrica) e $\delta \mathbf{q}(t)$ descrive l'evoluzione della deviazione dalla posizione di equilibrio conseguente a perturbazioni iniziali. La (71) è detta *equazione variazionale* del moto. Posta la soluzione del tipo:

$$\delta \mathbf{q}(t) = \phi_k e^{\gamma_k t} \quad (72)$$

dove γ_k è detto *esponente caratteristico*, la (71) fornisce:

$$(\mathbf{K} + \gamma_k^2 \mathbf{M}) \phi_k = \mathbf{0} \quad (73)$$

avendo ommesso l'argomento \mathbf{q}_E . Dalla (73) segue l'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{K} + \gamma_k^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (74)$$

Poiché $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ ed inoltre \mathbf{M} è definita positiva, dalle (74) si hanno l radici γ_k^2 reali (cfr. Appendice B.2). Possono aversi due casi:

- (a) $\gamma_k^2 = -\omega_k^2 < 0$: si ha una coppia di radici immaginarie pure $\gamma_k = \pm i\omega_k$, a cui corrisponde, tramite la (72), un moto armonico

$$\delta \mathbf{q}(t) = \phi_k (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (75)$$

- (b) $\gamma_k^2 = \alpha_k^2 > 0$: si ha una coppia di radici reali $\gamma_k = \pm \alpha_k$, a cui corrisponde, tramite la (72), un moto esponenziale

$$\delta \mathbf{q}(t) = \phi_k (a_k e^{\alpha_k t} + b_k e^{-\alpha_k t}) \quad (76)$$

costituito da una componente divergente ed una decadente.

Applicando, quindi, la definizione di stabilità (cfr. Osservazione 31) si ha (criterio dinamico di stabilità): *CNES per la stabilità di una posizione di equilibrio di un sistema elastico sottoposto a forze conservative è che tutti gli esponenti caratteristici γ_k ($k = 1, 2, \dots, l$) siano immaginari puri. Se anche solo uno degli esponenti è reale positivo la posizione di equilibrio è instabile.* Infatti, perturbazioni generiche attivano la componente divergente del moto (76).

- **Osservazione 32.** La precedente conclusione è stata ottenuta studiando la sola parte lineare (71) delle equazioni del moto, trascurando cioè le non linearità. Tuttavia si dimostra, nella Teoria della Stabilità, che le conclusioni a cui si è pervenuti sono corrette (le non linearità sono invece decisive nel caso critico $\gamma_k = 0$). Ciò può essere giustificato con il fatto che la definizione di stabilità deve essere soddisfatta in un intorno infinitamente piccolo della posizione di equilibrio (cioè per $\delta \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$), dove la parte lineare prevale su quella non lineare.

4.4 Relazione tra gli esponenti caratteristici e gli autovalori della matrice di rigidità

Della condizione di stabilità dei sistemi elastici può darsi una forma ancora più significativa procedendo come segue. È noto dall'Algebra (si veda l'Appendice B.5) che data una matrice \mathbf{M} definita positiva esiste una matrice non singolare $\mathbf{M}^{1/2}$ tale che:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{M}^{T/2} \quad (77)$$

È possibile allora trasformare il problema agli autovalori (73) nella forma standard procedendo come segue (cfr. Appendice B.6). Sostituendo la (77) nella (73), posto:

$$\phi = \mathbf{M}^{-T/2} \psi \quad (78)$$

e premoltiplicando per $\mathbf{M}^{-1/2}$, la (73) si scrive:

$$(\mathbf{K}^* - \Gamma_k \mathbf{I}) \psi_k = \mathbf{0} \quad (79)$$

dove:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-T/2}, \quad \Gamma_k = -\gamma_k^2 \quad (80)$$

Nella (79) Γ_k è un *autovalore della matrice simmetrica \mathbf{K}^** . La (80₂) lo mette in relazione con l'esponente caratteristico γ_k . A ciascun $\Gamma_k > 0$ corrispondono due esponenti caratteristici immaginari puri; a ciascun $\Gamma_k < 0$ corrispondono esponenti caratteristici reali di segno opposto. Quindi, la condizione di stabilità è che \mathbf{K}^* abbia tutti autovalori positivi, che sia cioè definita positiva (cfr. Appendice B.4); deve perciò essere:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^* \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^l \quad (81)$$

ovvero, posto $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{T/2} \mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^l \quad (82)$$

Può perciò concludersi: *CNES per la stabilità di una posizione di equilibrio di un sistema elastico sottoposto a forze conservative è che la matrice di rigidezza (totale) sia definita positiva.*

- **Osservazione 33.** Si noti che la stabilità di un sistema dipende solo dalle caratteristiche elastiche e geometriche che concorrono a formare la matrice \mathbf{K} , e non dalle caratteristiche inerziali, che sono influenti. Quindi una posizione di equilibrio di un sistema elastico è stabile o instabile indipendentemente dalla distribuzione della massa. Ciò è conseguenza del fatto che \mathbf{M} è sempre definita positiva.
- **Osservazione 34.** Per un sistema ad un g.d.l., la condizione di stabilità $k(q_E) > 0$, utilizzata nel Cap. 10 (cfr. Osservazione 10.27), è in accordo con le condizioni qui tratte.

4.5 Interpretazione energetica: Teorema di Lagrange

La condizione di stabilità di un sistema elastico può anche essere interpretata da un punto di vista energetico. Sia $U(\mathbf{q}_E, \mathbf{p}_E)$ l'EPT del sistema nella configurazione di equilibrio $\mathbf{q}=\mathbf{q}_E$ sotto l'azione dei carichi $\mathbf{p}=\mathbf{p}_E$. Se, a carico fissato, si variano i parametri lagrangiani è:

$$U(\mathbf{q}_E + \delta\mathbf{q}; \mathbf{p}_E) = U(\mathbf{q}_E; \mathbf{p}_E) + \delta U(\mathbf{q}_E; \mathbf{p}_E) + \frac{1}{2} \delta^2 U(\mathbf{q}_E; \mathbf{p}_E) \quad (83)$$

dove $\delta U(\mathbf{q}_E; \mathbf{p}_E) = 0$ per l'equilibrio e:

$$\frac{1}{2} \delta^2 U = \frac{1}{2} \delta\mathbf{q}^T \mathbf{K}(\mathbf{q}_E) \delta\mathbf{q} \quad (84)$$

Se $\mathbf{K}(\mathbf{q}_E)$ è definita positiva, U assume un minimo isolato nel punto di equilibrio \mathbf{q}_E . Può concludersi che (Teorema di Lagrange): *CNES perché la posizione di equilibrio di un sistema elastico sottoposto a forze conservative sia stabile è che in essa l'EPT assuma un minimo isolato.*

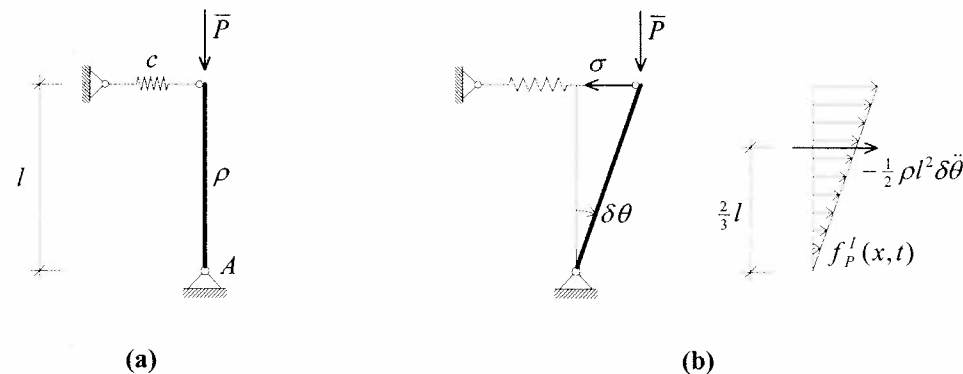
4.6 Stabilità e biforcazione

Si è visto, nel Cap. 10, che lungo un percorso di equilibrio noto si verifica una biforcazione allorquando la matrice di rigidezza totale, elastica più geometrica, diviene singolare. Ciò avviene in corrispondenza di un valore critico λ_c del moltiplicatore dei carichi. È facile vedere che *ad un punto di biforcazione è associata una perdita di stabilità del percorso*. Infatti, gli autovalori Γ_k di \mathbf{K} dipendono dal moltiplicatore λ , è cioè $\Gamma_k = \Gamma_k(\lambda)$. Quando $\lambda < \lambda_c$ è $\Gamma_k(\lambda) > 0$: l'equilibrio è stabile; per $\lambda = \lambda_c$ uno degli autovalori, ad esempio Γ_c , si annulla, $\Gamma_c(\lambda_c) = 0$, rendendo \mathbf{K} singolare; per $\lambda > \lambda_c$, in virtù della continuità della funzione, è $\Gamma_c(\lambda) < 0$ e la posizione di equilibrio è instabile.

4.7 Applicazioni

Si presentano alcune applicazioni del criterio dinamico di stabilità.

Esercizio 17: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 10.8 si analizzi la stabilità dell'equilibrio della configurazione banale studiando le piccole oscillazioni.



Si assume una distribuzione di massa uniforme, di densità ρ (cfr. Osservazione 33). Le forze agenti nella configurazione variata sono illustrate in Fig. (b). L'equilibrio alla rotazione intorno ad A fornisce:

$$(cl^2 - \bar{P}l)\delta\theta + I_A \delta\ddot{\theta} = 0 \quad (a)$$

con $I_A = \rho l^3 / 3$. Posto $\delta\theta = \phi e^{\gamma t}$ si ha:

$$(cl^2 - \bar{P}l + \gamma^2 I_A)\phi = 0 \quad (b)$$

da cui, ricordando che $P_c = cl$, per $\phi \neq 0$ è:

$$\gamma^2 = \frac{\bar{P} - P_c}{I_A / l} \quad (c)$$

Dalle (c) si ha:

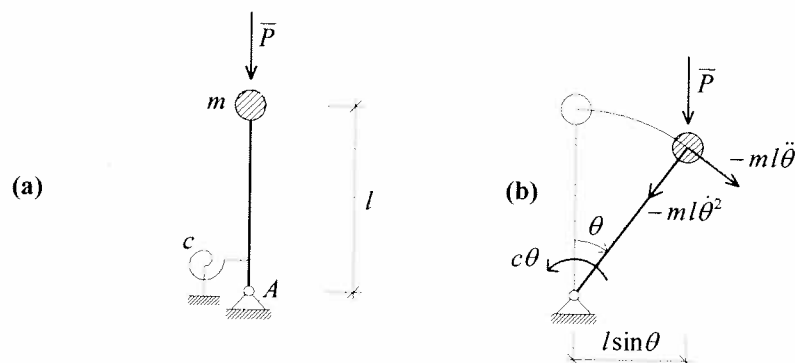
$$\gamma = \begin{cases} \pm i \sqrt{\frac{P_c - \bar{P}}{I_A / l}} & \text{se } \bar{P} < P_c \\ \pm \sqrt{\frac{\bar{P} - P_c}{I_A / l}} & \text{se } \bar{P} > P_c \end{cases} \quad (d)$$

La soluzione della (a), nei due diversi casi (d), si scrive:

$$\delta\theta = \begin{cases} a \cos \sqrt{\frac{P_c - \bar{P}}{I_A / l}} t + b \sin \sqrt{\frac{P_c - \bar{P}}{I_A / l}} t \\ a \exp \left(\sqrt{\frac{\bar{P} - P_c}{I_A / l}} t \right) + b \exp \left(- \sqrt{\frac{\bar{P} - P_c}{I_A / l}} t \right) \end{cases} \quad (e)$$

Per $\bar{P} < P_c$ l'equilibrio è stabile; per $\bar{P} > P_c$ l'equilibrio è instabile.

Esercizio 18: Determinando gli esponenti caratteristici, si esamini la stabilità dell'equilibrio del percorso diramato del sistema dell'Esercizio 10.15.



Si assume la massa concentrata nell'estremo superiore (Fig. a). Nella configurazione variata la forza d'inerzia ha componente $-ml\ddot{\theta}$ secondo la tangente alla circonferenza, e componente centripeta $-ml\dot{\theta}^2$. Dall'equilibrio alla rotazione si ha:

$$c\theta - \bar{P}l\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0 \quad (a)$$

Il percorso biforcuto ha equazione (cfr. Eq (b) dell'Esercizio 10.15):

$$\bar{P} = \frac{c \cdot \theta_E}{l \sin\theta_E} \quad (b)$$

Per ottenere l'equazione variazionale che governa il moto nell'intorno di (\bar{P}, θ_E) si perturba θ_E :

$$c(\theta_E + \delta\theta) - \bar{P}l\sin(\theta_E + \delta\theta) + ml^2(\ddot{\theta}_E + \delta\ddot{\theta}) = 0 \quad (c)$$

Poiché $\ddot{\theta}_E = 0$, tenuto conto della (b), la (c) fornisce:

$$(c - \bar{P}l\cos\theta_E)\delta\theta + ml^2\delta\ddot{\theta} = 0 \quad (d)$$

Posto $\delta\theta = \phi e^{\gamma t}$, dalla (d) si ricava:

$$\gamma^2 = \frac{\bar{P}l\cos\theta_E - c}{ml^2} \quad (e)$$

Sostituendo a \bar{P} la sua espressione (b), si ha:

$$\gamma^2 = \frac{c}{ml^2}(\theta_E/\tan\theta_E - 1) < 0 \quad \text{per} \quad -\pi < \theta_E < \pi \quad (f)$$

per cui l'equilibrio è stabile.

Esercizio 19: Con riferimento al sistema dell'Esercizio 10.10, si esamini la definitezza in segno della matrice di rigidezza lungo il percorso fondamentale.

Dall'equazione (d) dell'Esercizio 10.10 la matrice di rigidezza in $(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$ è:

$$\mathbf{K} = c \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \bar{P} \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \quad (a)$$

ovvero, posto $\lambda = \bar{P}l/c$, è:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Per esaminare la definitezza in segno si calcolano gli autovalori Γ_1 e Γ_2 di \mathbf{K} . Essi sono soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{K} - \Gamma\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) - \Gamma & -1 \\ -1 & (1-\lambda) - \Gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (c)$$

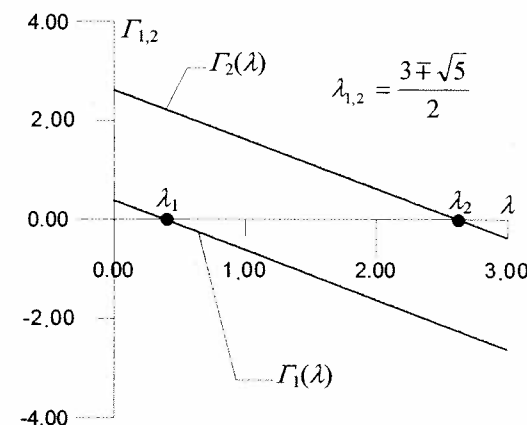
Sviluppando il determinante si ha:

$$\Gamma^2 - \Gamma(3-2\lambda) + (1-3\lambda+\lambda^2) = 0 \quad (d)$$

che, risolta, fornisce:

$$\Gamma_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} - \lambda \quad (e)$$

Diagrammando le due radici in funzione di λ si ottiene il grafico in figura.



Gli autovalori $\Gamma_{1,2}$ si annullano in corrispondenza di λ_1 e λ_2 (carichi critici). Per $\lambda < \lambda_1$ gli autovalori sono entrambi positivi e l'equilibrio è stabile; Per $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ un autovalore è negativo e per $\lambda > \lambda_2$ entrambi gli autovalori sono negativi: l'equilibrio è instabile.

Appendice A

Sistemi di equazioni lineari indeterminati e impossibili. Identità bilineare

A.1 Sistemi indeterminati

Si consideri un sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{b} \quad (1)$$

con matrice \mathbf{L} di dimensioni $m \times n$, con $m < n$ (sistema indeterminato di grado $n-m$). Nell'ipotesi che \mathbf{L} abbia rango massimo m , si partiziona il sistema (1) in modo da isolare un minore principale non nullo, sia esso \mathbf{L}_1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{b} \quad \det \mathbf{L}_1 \neq 0 \quad (2)$$

Le (2) possono essere risolte attribuendo alle $n-m$ incognite eccedenti valori arbitrari: $\alpha := \mathbf{x}_2$. Si ottiene:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \alpha \quad \forall \alpha \quad (3)$$

da cui, ricostituendo il vettore \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{b} + \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \alpha \quad (4)$$

In forma compatta si ha:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_b + \mathbf{X} \alpha \quad (5)$$

dove

$$\mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{b}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Il vettore $\alpha = \{\alpha_i\}$, di dimensioni $(n-m) \times 1$ è il *vettore dei parametri liberi*; la matrice \mathbf{X} , di dimensioni $n \times (n-m)$ è la *matrice delle autosoluzioni*. Essa dipende dalle sole proprietà del sistema, e non dal termine noto \mathbf{b} .

La (5) mostra che la soluzione è somma di due contributi: (1) *una soluzione particolare* \mathbf{x}_b del problema non omogeneo, in quanto associata ad una particolare scelta del minore principale \mathbf{L}_1 ; (2) *la soluzione del problema omogeneo* $\mathbf{L}\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{0}$, dove

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{X}\alpha \quad \forall \alpha \quad (7)$$

- **Osservazione 1.** La matrice \mathbf{X} è suscettibile della seguente interpretazione. Posto l' i -esimo parametro libero α_i uguale ad 1 e tutti gli altri uguali a zero, $\alpha_j = 0$ ($j \neq i$), l' i -esima colonna di \mathbf{X} si identifica con il vettore \mathbf{x}_α . Quindi, partizionando \mathbf{X} per colonne si ha:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}'_1 \quad \mathbf{x}'_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}'_{n-m}\} \quad (8)$$

dove \mathbf{x}'_i è una soluzione particolare del problema omogeneo $\mathbf{L}\mathbf{x}'_i = \mathbf{0}$. La soluzione generale \mathbf{x}_α del problema omogeneo (Eq. 7) è dunque espressa come combinazione lineare a coefficienti arbitrari α_i di $n-m$ soluzioni particolari \mathbf{x}'_i . Naturalmente la scelta delle \mathbf{x}'_i non è univoca, in quanto ogni loro combinazione lineare è ancora soluzione del problema omogeneo.

Con la posizione (8) la (5) può anche scriversi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_b + \sum_{i=1}^{n-m} \mathbf{x}'_i \alpha_i \quad (9)$$

A.2 Sistemi impossibili

Si consideri un sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{c} \quad (10)$$

con matrice \mathbf{M} di dimensioni $r \times s$, con $r > s$ (sistema sovradeterminato, o impossibile, di grado $r-s$). Il sistema (10) generalmente non ammette soluzione; tuttavia, per particolari valori del termine noto \mathbf{c} , esso è ugualmente risolubile. Si vogliono determinare le condizioni sotto cui ciò avviene. Nell'ipotesi che \mathbf{M} abbia rango massimo s , si partiziona il sistema (10) in modo da isolare un minore principale non nullo, sia esso \mathbf{M}_1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{M}_1 \neq 0 \quad (11)$$

Le prime s equazioni possono essere risolte per fornire:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{c}_1 \quad (12)$$

Sostituendo la precedente nelle rimanenti $r-s$ equazioni si ha:

$$\mathbf{c}_2 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{c}_1 = \mathbf{0} \quad (13)$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Se \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 sono assegnati in modo arbitrario le (14) non sono generalmente soddisfatte; se invece, come caso particolare, \mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2 soddisfano le (14), allora la soluzione (unica) delle (10) è data dalle (12). Quindi le (14) esprimono la *condizione di solvibilità* (o compatibilità) del sistema (10), cioè la condizione necessaria e sufficiente affinché un problema, in generale impossibile, ammetta egualmente soluzione.

- **Osservazione 2.** La condizione di solvibilità richiede che i termini noti \mathbf{c}_2 siano combinazioni lineari dei termini noti \mathbf{c}_1 nello stesso modo in cui i coefficienti \mathbf{M}_2 delle equazioni sono combinazioni lineari dei coefficienti \mathbf{M}_1 ; in tal caso le $r-s$ equazioni eccedenti possono essere scartate ed il sistema può essere risolto in corrispondenza delle prime s equazioni.

In forma compatta le condizioni di solvibilità (14) si scrivono:

$$\mathbf{Y}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (15)$$

avendo posto:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matrice \mathbf{Y} , di dimensioni $(r-s) \times r$ è la *matrice di solvibilità* (o compatibilità) del sistema impossibile (10). Essa dipende dalle sole proprietà del sistema, e non dal termine noto \mathbf{c} .

- **Osservazione 3.** Se $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ (problema omogeneo) la condizione di solvibilità è sempre soddisfatta; in tal caso, dalla (12), si ha anche $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, cioè la soluzione è banale.

A.3 Proprietà di dualità

Si consideri un sistema di equazioni lineari indeterminato

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (17)$$

ed un sistema di equazioni lineari sovradeterminato

$$\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{c} \quad (18)$$

I due problemi sono detti *duali* se le matrici dei coefficienti sono l'una la trasposta dell'altra

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \quad (19)$$

In tal caso, tra la matrice delle autosoluzioni \mathbf{X} del problema indeterminato (17) e la matrice di solvibilità \mathbf{Y} del problema impossibile (18) sussiste la seguente, notevole, relazione:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^T \quad (20)$$

Infatti, poiché è:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2], \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

per la (19) è $\mathbf{M}_1 = \mathbf{L}_1^T$ ed $\mathbf{M}_2 = \mathbf{L}_2^T$. Ricordando le espressioni (6₂) di \mathbf{X} e (16) di \mathbf{Y} si ha:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2)^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \quad (22)$$

da cui la (20). La proprietà di dualità (20) permette di scrivere la condizione di solvibilità (15) di un problema sovradeterminato come:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{c} = 0 \quad (23)$$

Ricordando il significato delle colonne di \mathbf{X} (Osservazione 1), la (23) può così enunciarsi: *CNES affinché un problema impossibile ammetta soluzione* (condizione di solvibilità) è che il termine noto sia ortogonale a tutte le soluzioni del problema omogeneo trasposto.

A.4 Problemi aggiunti: l'identità bilineare

Si generalizzano le proprietà di dualità discusse nel paragrafo precedente. Siano:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{By} &= \mathbf{c} \end{aligned} \quad (24)$$

due problemi lineari (determinati, indeterminati o sovradeterminati) in cui:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \quad (25)$$

I due problemi (24) sono detti *aggiunti* (o duali). Premoltiplicando la (24₁) per \mathbf{y}^T e la (24₂) per \mathbf{x}^T e sottraendo membro a membro si ha:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Ax} - \mathbf{x}^T \mathbf{By} = \mathbf{y}^T \mathbf{b} - \mathbf{x}^T \mathbf{c} \quad (26)$$

per ogni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) che soddisfano le (24). Stante la (25), il primo membro della (26) è nullo, cosicché sussiste la seguente identità:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{x}^T \mathbf{c} \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left\{ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{c} \right\} \quad (27)$$

Essa costituisce l'*identità bilineare* dei due problemi aggiunti.

- **Osservazione 4.** La condizione di solvibilità (23) di un problema impossibile può anche essere ricavata dall'identità bilineare. Dato il problema impossibile $\mathbf{My} = \mathbf{c}$ e considerato il problema omogeneo aggiunto $\mathbf{Lx} = \mathbf{0}$, sussiste l'identità bilineare:

$$\mathbf{x}_\alpha^T \mathbf{c} = 0 \quad \forall \mathbf{x}_\alpha | \mathbf{Lx}_\alpha = \mathbf{0} \quad (28)$$

Poiché il problema omogeneo aggiunto ammette infinite autosoluzioni $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{X}\alpha$ $\forall \alpha$ (Eq. 7), la (28) si scrive:

$$\alpha^T \mathbf{X}^T \mathbf{c} = 0 \quad \forall \alpha \quad (29)$$

da cui segue la (23). Ciò comunque dimostra la sola necessità della condizione, che si è invece dimostrato essere anche sufficiente.

Appendice B

Il problema agli autovalori

B.1 Il problema simmetrico in forma non standard

Si consideri il problema algebrico:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\phi = 0 \quad (1)$$

dove λ è un parametro, \mathbf{A} e \mathbf{B} sono due matrici quadrate di ordine n , reali e *simmetriche*; \mathbf{B} inoltre è *definita positiva*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \phi^T \mathbf{B} \phi > 0 \quad \forall \phi \neq 0 \quad (2)$$

Il problema (1) è detto *problema agli autovalori* simmetrico in forma non standard. *CNES* perché il problema (1) ammetta soluzione non banale è che il determinante della matrice dei coefficienti sia uguale a zero:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) = 0 \quad (3)$$

La (3), detta *equazione caratteristica*, è un'equazione algebrica di grado n nel parametro λ . Le sue radici λ_k ($k=1,2,\dots,n$) sono dette gli *autovalori* di \mathbf{A} rispetto a \mathbf{B} . Sostituendo la k -esima radice λ_k nella (1) e risolvendo si determina il vettore ϕ_k , detto *autovettore*. È cioè:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{B})\phi_k = 0 \quad (4)$$

dove la coppia (λ_k, ϕ_k) è detta *autosoluzione* del problema agli autovalori.

Poiché il problema è omogeneo, se ϕ_k è una soluzione, anche $\alpha \phi_k$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è una soluzione. Gli autovettori, dunque, sono definiti a meno di una costante moltiplicativa.

- **Osservazione 1.** Se, invece di \mathbf{B} , è \mathbf{A} la matrice definita positiva, il problema (1) può essere riscritto come:

$$\left(\mathbf{B} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \right) \phi = 0$$

nell'autovalore $1/\lambda$. Il caso $\lambda=0$ è infatti escluso, perché \mathbf{A} è non singolare.

B.2 Proprietà di autovalori e autovettori del problema non standard

Le autosoluzioni (λ_k, ϕ_k) del problema simmetrico non standard (1) godono delle seguenti proprietà:

- (a) gli autovalori λ_k ($k=1,2,\dots,n$) sono *reali*;
- (b) gli autovettori ϕ_k ($k=1,2,\dots,n$) sono *ortogonali* rispetto alle matrici **A** e **B**, nel senso che:

$$\phi_h^T \mathbf{A} \phi_k = 0, \quad \phi_h^T \mathbf{B} \phi_k = 0 \quad \text{per } h \neq k \quad (5)$$

- (c) gli autovettori ϕ_k ($k=1,2,\dots,n$) sono *linearmente indipendenti*.

(a) Per dimostrare la proprietà (a) si procede per assurdo. Ammesso che λ sia complesso, anche $\bar{\lambda}$, complesso coniugato di λ , è un autovalore, associato all'autovettore $\bar{\phi}$. Infatti, se (λ_k, ϕ_k) è un'autosoluzione, $(\lambda_k, \bar{\phi}_k)$ è pure un'autosoluzione, ottenuta coniugando tutti i termini della (1). È allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \phi_k &= \lambda_k \mathbf{B} \phi_k \\ \mathbf{A} \bar{\phi}_k &= \bar{\lambda}_k \mathbf{B} \bar{\phi}_k \end{aligned} \quad (6)$$

Premoltiplicando la prima equazione per $\bar{\phi}_k^T$, la seconda per ϕ_k^T e sottraendo membro a membro si ha:

$$\bar{\phi}_k^T \mathbf{A} \phi_k - \phi_k^T \mathbf{A} \bar{\phi}_k = \lambda_k \bar{\phi}_k^T \mathbf{B} \phi_k - \bar{\lambda}_k \phi_k^T \mathbf{B} \bar{\phi}_k \quad (7)$$

Poiché **A** e **B** sono simmetriche la precedente si scrive anche:

$$0 = (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \bar{\phi}_k^T \mathbf{B} \phi_k \quad (8)$$

Poiché, data la definitezza in segno di **B**, è:

$$\bar{\phi}_k^T \mathbf{B} \phi_k = (\text{Re } \phi_k)^T \mathbf{B} \text{Re } \phi_k + (\text{Im } \phi_k)^T \mathbf{B} \text{Im } \phi_k > 0 \quad (9)$$

dalla (8) segue che $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, cioè λ_k è reale.

(b) Per dimostrare la proprietà (b) si considerano due autosoluzioni distinte (λ_h, ϕ_h) e (λ_k, ϕ_k) . È cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \phi_h &= \lambda_h \mathbf{B} \phi_h \\ \mathbf{A} \phi_k &= \lambda_k \mathbf{B} \phi_k \end{aligned} \quad (10)$$

Premoltiplicando la prima equazione per ϕ_k^T , la seconda per ϕ_h^T e sottraendo membro a membro, tenuto conto della simmetria si ha:

$$0 = (\lambda_h - \lambda_k) \phi_h^T \mathbf{B} \phi_k \quad (11)$$

da cui, essendo per ipotesi $\lambda_h \neq \lambda_k$, segue la (5₂). Conseguentemente, dalla (10₂) premoltiplicando per ϕ_h^T segue la (5₁).

- **Osservazione 2.** È possibile dimostrare che, se due (o più) autovalori sono uguali (autovalori multipli) ogni combinazione lineare dei corrispondenti autovettori è un autovettore. Tra questi è sempre possibile scegliere due (o più) coppie tra loro ortogonali che soddisfano le (5).

Poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, questa può scegliersi in modo tale che sia:

$$\phi_k^T \mathbf{B} \phi_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

conseguentemente, dalla (10₂) premoltiplicata per ϕ_k^T , si ha:

$$\phi_k^T \mathbf{A} \phi_k = \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

Gli autovettori che soddisfano le (12) e (13) sono detti *normalizzati*. Le (5), (12) e (13) possono anche scriversi:

$$\phi_h^T \mathbf{A} \phi_k = \delta_{hk} \lambda_k \quad \phi_h^T \mathbf{B} \phi_k = \delta_{hk} \quad (14)$$

dove δ_{hk} è il simbolo di Kronecher ($\delta_{hk}=1$ se $h=k$, $\delta_{hk}=0$ se $h \neq k$). Autovettori che soddisfano le (13) sono detti *ortonormali* rispetto alla matrice **B**.

Ordinando gli autovettori per colonna in una matrice Φ si ha:

$$\Phi := [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \quad (15)$$

La matrice Φ è detta *matrice degli autovettori*. Le (14) possono anche scriversi in forma matriciale:

$$\Phi^T \mathbf{A} \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \mathbf{B} \Phi = \mathbf{I} \quad (16)$$

dove:

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (17)$$

è una matrice diagonale detta *matrice degli autovalori*.

(c) Per dimostrare la proprietà (c) si procede per assurdo. Se gli autovettori ϕ_k (assunti normalizzati) fossero linearmente dipendenti esisterebbe una n -pla di coefficienti non tutti nulli tale che:

$$\sum_k c_k \phi_k = 0 \quad (18)$$

Premoltiplicando la (18) per il vettore $(\mathbf{B} \phi_h)^T$ ($h=1,2,\dots,n$) ed usando la (14₂) si ha:

$$\sum_k c_k \phi_h^T \mathbf{B} \phi_k = \sum_k c_k \delta_{hk} = c_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

Essendo tutti i coefficienti $c_k=0$ si contraddice l'ipotesi. Gli autovettori ϕ_k sono dunque linearmente indipendenti. Essi costituiscono una *base ortonormale per lo spazio \mathbb{R}^n nella metrica associata alla matrice **B***.

B.3 Rapporto di Rayleigh. Matrici definite positive

Se le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} , oltre ad essere simmetriche, sono entrambe *definite positive*, se cioè:

$$\phi^T \mathbf{A} \phi > 0, \quad \phi^T \mathbf{B} \phi > 0 \quad \forall \phi \neq 0 \quad \phi \in \mathbb{R}^n \quad (20)$$

gli autovalori λ_k del problema (1), oltre ad essere reali, sono positivi.

Per dimostrarlo è sufficiente premoltiplicare la (4) per ϕ_k^T e risolvere rispetto a λ_k ; si ottiene:

$$\lambda_k = \frac{\phi_k^T \mathbf{A} \phi_k}{\phi_k^T \mathbf{B} \phi_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

detto *rapporto di Rayleigh*. Poiché, per la (20), il numeratore e il denominatore del rapporto di Rayleigh sono positivi, λ_k è positivo.

B.4 Il problema agli autovalori in forma standard

Se $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, il problema agli autovalori (1) si dice essere in *forma standard*:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \phi = 0 \quad (22)$$

λ_k sono allora detti *gli autovalori di A* e ϕ_k *gli autovettori di A*.

Le proprietà precedentemente dimostrate si riformulano come segue.

- (a) Se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gli autovalori λ_k ($k=1, 2, \dots, n$) sono reali.
- (b) Gli autovettori ϕ_k ($k=1, 2, \dots, n$) sono ortogonali nel senso propriamente euclideo:

$$\phi_h^T \mathbf{A} \phi_k = 0, \quad \phi_h^T \phi_k = 0 \quad \text{per } h \neq k \quad (23)$$

- (c) La condizione (12) di normalizzazione degli autovettori si scrive:

$$\phi_k^T \phi_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

cioè gli autovettori hanno lunghezza unitaria e dunque costituiscono una base canonica ortonormale.

- (d) Introdotta la matrice degli autovettori Φ , valgono le proprietà:

$$\Phi^T \mathbf{A} \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \Phi = \mathbf{I} \quad (25)$$

La (25₂) mostra che:

$$\Phi^T = \Phi^{-1} \quad (26)$$

cioè Φ è una matrice ortogonale.

- (e) Se \mathbf{A} è definita positiva i suoi autovalori sono positivi. Infatti il rapporto di Rayleigh si scrive:

$$\lambda_k = \frac{\phi_k^T \mathbf{A} \phi_k}{\phi_k^T \phi_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

B.5 Decomposizione di una matrice simmetrica definita positiva

Per ulteriori sviluppi è opportuno dimostrare la seguente proprietà: *una matrice A simmetrica definita positiva è esprimibile come prodotto*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{T/2} \quad (28)$$

dove $\mathbf{A}^{1/2}$ è una matrice non singolare e $\mathbf{A}^{T/2}$ la sua trasposta. Infatti, poiché gli autovalori di \mathbf{A} sono tutti positivi, è:

$$\Lambda = \Lambda^{1/2} \Lambda^{T/2} \quad (29)$$

con:

$$\Lambda^{1/2} = \Lambda^{T/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \quad (30)$$

Dalla (25₁), quindi, detta Φ la matrice degli autovettori di \mathbf{A} , e tenuto conto delle (26) e (29) si ha:

$$\mathbf{A} = \Phi \Lambda \Phi^T = \Phi \Lambda^{1/2} \Lambda^{T/2} \Phi^T = (\Phi \Lambda^{1/2})(\Phi \Lambda^{1/2})^T \quad (31)$$

È quindi:

$$\mathbf{A}^{1/2} = \Phi \Lambda^{1/2} \quad (32)$$

Poiché Φ è non singolare, anche $\mathbf{A}^{1/2}$ è non singolare.

B.6 Riduzione alla forma standard del problema non standard

Il problema agli autovalori non standard (1) può sempre essere trasformato nella forma standard (22). Infatti, poiché \mathbf{B} è definita positiva, per quanto dimostrato nel Par. B.5, esiste una matrice $\mathbf{B}^{1/2}$ non singolare tale che:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{B}^{T/2} \quad (33)$$

Posto:

$$\phi = \mathbf{B}^{-T/2} \psi \quad (34)$$

la (1) si scrive:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}^{-T/2} - \lambda \mathbf{B}^{1/2}) \psi = 0 \quad (35)$$

da cui, premoltiplicando per $\mathbf{B}^{-1/2}$ si ha:

$$(\mathbf{A}^* - \lambda \mathbf{I}) \psi = 0 \quad (36)$$

dove:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-T/2} \quad (37)$$

è una matrice simmetrica. Il problema è stato così ricondotto alla forma standard. Gli autovalori del problema non standard (1) coincidono con gli autovalori della matrice \mathbf{A}^* ; invece gli autovettori del problema non standard sono legati a quelli di \mathbf{A}^* dalla trasformazione (34).

- **Osservazione 3.** Gli autovettori ψ , in quanto autovettori della matrice simmetrica \mathbf{A}^* , sono tra loro ortogonali in senso euclideo. Costituiscono quindi un insieme di

vettori linearmente indipendenti. Poiché gli autovettori ϕ si ottengono da quelli ψ attraverso la trasformazione non singolare $\mathbf{B}^{-T/2}$, anche gli autovettori ϕ , non più ortogonali in senso euclideo, sono tra loro linearmente indipendenti. Si dimostra quindi la proprietà (c) del Par. B.2 in modo alternativo a quanto precedentemente fatto.

B.7 Soluzione del problema non omogeneo nella base degli autovettori

Sia dato il problema algebrico non omogeneo:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (38)$$

Si voglia determinare la soluzione \mathbf{u} come funzione del parametro λ . Poiché gli autovettori del problema reso omogeneo formano una base per lo spazio \mathcal{R}^n , è possibile esprimere la soluzione \mathbf{u} nella forma:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \eta_k \phi_k = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (39)$$

dove Φ è la matrice (15) degli autovettori, assunti normalizzati, ed $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}$ è il vettore delle coordinate normali incognite, che rappresentano le componenti di \mathbf{u} nella base $\{\phi_k\}$. Sostituendo la (39) nella (38) e premoltiplicando per Φ^T si ha:

$$(\Phi^T \mathbf{A} \Phi - \lambda \Phi^T \mathbf{B} \Phi) \boldsymbol{\eta} = \Phi^T \mathbf{b} \quad (40)$$

Tenuto conto della proprietà di ortogonalità (16), la (40) si scrive:

$$(\Lambda - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{c} \quad (41)$$

dove il vettore:

$$\mathbf{c} = \Phi^T \mathbf{b} \quad (42)$$

rappresenta le proiezioni di \mathbf{b} su $\{\phi_k\}$. Le (41) costituiscono un sistema disaccoppiato nelle coordinate normali incognite, che si scrive:

$$(\lambda_k - \lambda) \eta_k = c_k \quad (43)$$

Risolvendo e sostituendo nella (39) si ha infine:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\lambda_k - \lambda} \phi_k \quad (44)$$

- **Osservazione 4.** La (44) mostra che $\mathbf{u} \rightarrow \infty$ quando $\lambda = \lambda_k$ e $c_k \neq 0$. Infatti, quando $\lambda = \lambda_k$ la matrice dei coefficienti $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$ del problema non omogeneo è singolare (essendo $\det(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{B}) = 0$), per cui, per il teorema di Rouché-Capelli, il problema (38) in generale non ammette soluzione. Tuttavia, è noto (cfr. Appendice A.3) che se, come caso particolare, è $c_k = \mathbf{b}^T \phi_k = 0$, se cioè il vettore dei termini noti \mathbf{b} è ortogonale alla soluzione del problema omogeneo (trasposto), allora il problema ammette egualmente soluzione. La (44) in tal caso fornisce una forma indeterminata $0/0$. La soluzione è infatti unica nel supplemento ortogonale a ϕ_k , ma ha componente indeterminata nell'autospazio descritto da ϕ_k .

Indice delle Osservazioni

Cap. 1

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
1.1	2	1.7	5	1.13	14	1.19	42
1.2	3	1.8	7	1.14	14	1.20	52
1.3	3	1.9	8	1.15	23	1.21	52
1.4	5	1.10	8	1.16	27	1.22	53
1.5	5	1.11	11	1.17	38		
1.6	5	1.12	14	1.18	40		

Cap. 2

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
2.1	57	2.9	60	2.17	73	2.25	90
2.2	57	2.10	61	2.18	76	2.26	91
2.3	57	2.11	64	2.19	76	2.27	91
2.4	58	2.12	65	2.20	79	2.28	91
2.5	58	2.13	66	2.21	82	2.29	93
2.6	58	2.14	68	2.22	85	2.30	93
2.7	59	2.15	71	2.23	86	2.31	94
2.8	60	2.16	72	2.24	89		

Cap. 3

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
3.1	97	3.5	99	3.9	104	3.13	109
3.2	97	3.6	101	3.10	107	3.14	110
3.3	99	3.7	101	3.11	107	3.15	114
3.4	99	3.8	104	3.12	109	3.16	119

Cap. 4

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
4.1	126	4.5	130	4.9	135	4.13	142
4.2	127	4.6	131	4.10	136	4.14	142
4.3	128	4.7	132	4.11	137	4.15	144
4.4	128	4.8	132	4.12	139		

Cap. 5

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
5.1	148	5.7	154	5.13	160	5.19	166
5.2	148	5.8	155	5.14	161	5.20	168
5.3	150	5.9	156	5.15	164	5.21	168
5.4	150	5.10	157	5.16	164	5.22	168
5.5	150	5.11	157	5.17	165	5.23	170
5.6	153	5.12	158	5.18	165	5.24	171

Cap. 6

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
6.1	178	6.10	191	6.19	201	6.28	208
6.2	179	6.11	192	6.20	201	6.29	209
6.3	181	6.12	192	6.21	202	6.30	210
6.4	182	6.13	192	6.22	202	6.31	210
6.5	184	6.14	193	6.23	205	6.32	210
6.6	186	6.15	194	6.24	205	6.33	213
6.7	186	6.16	195	6.25	206		
6.8	189	6.17	196	6.26	207		
6.9	191	6.18	198	6.27	207		

Cap. 7

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
7.1	218	7.6	224	7.11	233	7.16	236
7.2	219	7.7	227	7.12	233	7.17	236
7.3	219	7.8	227	7.13	234		
7.4	221	7.9	227	7.14	234		
7.5	222	7.10	231	7.15	235		

Cap. 8

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
8.1	262	8.7	270	8.13	293	8.19	298
8.2	262	8.8	270	8.14	294	8.20	298
8.3	263	8.9	272	8.15	295	8.21	299
8.4	263	8.10	277	8.16	296	8.22	299
8.5	265	8.11	277	8.17	297	8.23	300
8.6	267	8.12	287	8.18	297	8.24	302

Cap. 9

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
9.1	311	9.10	317	9.19	327	9.28	340
9.2	311	9.11	319	9.20	328	9.29	340
9.3	312	9.12	320	9.21	328	9.30	341
9.4	313	9.13	322	9.22	328		
9.5	313	9.14	323	9.23	330		
9.6	313	9.15	325	9.24	332		
9.7	314	9.16	325	9.25	335		
9.8	317	9.17	327	9.26	335		
9.9	317	9.18	327	9.27	336		

Cap. 10

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
10.1	346	10.10	355	10.19	363	10.28	380
10.2	347	10.11	358	10.20	368	10.29	381
10.3	347	10.12	358	10.21	370	10.30	382
10.4	348	10.13	358	10.22	370	10.31	383
10.5	348	10.14	359	10.23	371	10.32	386
10.6	348	10.15	360	10.24	372	10.33	387
10.7	348	10.16	360	10.25	373	10.34	388
10.8	350	10.17	361	10.26	377	10.35	390
10.9	352	10.18	362	10.27	377		

Cap. 11

Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.	Oss.	Pag.
11.1	393	11.10	405	11.19	416	11.28	427
11.2	393	11.11	406	11.20	417	11.29	427
11.3	395	11.12	408	11.21	418	11.30	430
11.4	397	11.13	410	11.22	418	11.31	430
11.5	398	11.14	412	11.23	419	11.32	431
11.6	402	11.15	412	11.24	419	11.33	432
11.7	402	11.16	414	11.25	423	11.34	432
11.8	402	11.17	414	11.26	427		
11.9	404	11.18	416	11.27	427		

Indice degli Esercizi*Cap. 1*

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
1.1	3	1.7	20	1.13	32	1.19	45
1.2	6	1.8	21	1.14	33	1.20	46
1.3	9	1.9	23	1.15	37	1.21	48
1.4	14	1.10	25	1.16	39	1.22	49
1.5	16	1.11	25	1.17	40	1.23	50
1.6	18	1.12	30	1.18	42	1.24	51

Cap. 2

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
2.1	59	2.6	73	2.11	83	2.16	94
2.2	62	2.7	76	2.12	84	2.17	94
2.3	64	2.8	78	2.13	87		
2.4	69	2.9	78	2.14	91		
2.5	70	2.10	82	2.15	93		

Cap. 3

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
3.1	104	3.4	112	3.7	116	3.10	120
3.2	107	3.5	114	3.8	117	3.11	121
3.3	110	3.6	115	3.9	119	3.12	122

Cap. 4

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
4.1	140	4.2	140	4.3	141	4.4	145

Cap. 5

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
5.1	151	5.4	161	5.7	170	5.10	173
5.2	153	5.5	167	5.8	171		
5.3	158	5.6	169	5.9	172		

Cap. 6

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
6.1	180	6.5	189	6.9	198	6.13	208
6.2	185	6.6	191	6.10	201	6.14	210
6.3	185	6.7	194	6.11	203	6.15	211
6.4	188	6.8	196	6.12	206	6.16	212

Cap. 7

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
7.1	221	7.7	235	7.13	248	7.19	253
7.2	223	7.8	236	7.14	248	7.20	255
7.3	224	7.9	237	7.15	250	7.21	256
7.4	228	7.10	241	7.16	250	7.22	257
7.5	229	7.11	243	7.17	252	7.23	259
7.6	230	7.12	244	7.18	252		

Cap. 8

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
8.1	266	8.6	272	8.11	284	8.16	298
8.2	267	8.7	273	8.12	286	8.17	301
8.3	269	8.8	275	8.13	289	8.18	303
8.4	270	8.9	279	8.14	291	8.19	305
8.5	271	8.10	281	8.15	292		

Cap. 9

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
9.1	311	9.5	318	9.9	323	9.13	336
9.2	314	9.6	318	9.10	329	9.14	342
9.3	315	9.7	320	9.11	331		
9.4	316	9.8	322	9.12	333		

Cap. 10

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
10.1	349	10.7	357	10.13	370	10.19	386
10.2	351	10.8	360	10.14	374	10.20	387
10.3	354	10.9	361	10.15	378	10.21	388
10.4	354	10.10	364	10.16	381		
10.5	356	10.11	366	10.17	383		
10.6	356	10.12	369	10.18	384		

Cap. 11

Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.	Es.	Pag.
11.1	395	11.6	406	11.11	413	11.16	428
11.2	397	11.7	406	11.12	414	11.17	433
11.3	399	11.8	407	11.13	420	11.18	434
11.4	400	11.9	409	11.14	423	11.19	434
11.5	403	11.10	410	11.15	424		